経済研究　Vol.75 No.1 Apr.2024
er.ar.032824
DOI: 10.60328keizaikenkyu.er.ar.032824

経済研究
THE ECONOMIC REVIEW

論文 ■ Article

# バイアスがベイズ学習に与える影響について

山本裕一[a]

【要　旨】

近年の研究により，バイアスを持つ経済主体が未知の変数をベイズ学習する際には，通常のバイアスを持たないケースと比べてかなり異なる結果が得られることが明らかになった．具体的には，いつまでたっても信念が収束せず振動し続けたり，信念は収束するもののその収束先が（非常に小さなバイアスしか存在しないにも拘らず）真実のパラメータとは全く異なる値になってしまうなどの例が知られている．本稿では，これらの結果を概観し，なぜこのような事象が起こるのかについて詳細に議論をする．

JEL Classification Codes: C61, D83

[a] 一橋大学経済研究所教授 E-mail: yyamamoto@ier.hit-u.ac.jp

THE ECONOMIC REVIEW Vol.75 No. 1 Apr.2024
er.ar.032824
DOI: 10.60328keizaikenkyu.er.ar.032824

# How Do Biases Influence Learning Outcomes?

Yuichi Yamamoto
Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, Japan

## Abstract

Recent studies on misspecified learning show that when a misspecified agent learns an unknown economic state, its outcome can differ significantly from that of a correctly specified agent. Specifically, there are cases in which one's belief does not converge forever or a negligible amount of misspecification has a significant impact on the learning outcome. In this study, we review these recent results in the literature and discuss what is critical to them.

JEL Classification Codes: C61, D83

## 1. イントロダクション

近年，一部のミクロ経済学の理論家の間では，misspecified learning というトピックの研究が盛んになってきている．これは，経済主体がバイアス（専門家の間では，model misspecification と呼ばれる）を持つような状況を考え，その経済主体が未知の経済変数 $\theta$ について学習していく際にどのようなことが起こるか，について分析する研究である．なおこの分野における「バイアス」という言葉は，日本語話者が通常「バイアス」と聞いてイメージするよりもかなり一般的な意味を持ち，「ある経済主体が自分の置かれた状況について誤った認識をしている」ような状況は全て「バイアスを持つ」と表現される．例えば，本来 10 しかない自分の能力を 20 であると過信している労働者，本来は（価格に関して）非線形であるはずの需要関数を線形であると誤認している企業，本来は複数の経済変数に影響されて決まるはずの株価が一つの経済変数のみに依存していると誤認している経済評論家，などこれらはすべて，「バイアスを持つ経済主体」の一例である．

通常の，バイアスを持たない経済主体が未知の変数を学習してゆく場合には，大数の法則（ないしその一般化された定理）より，「十分長い学習期間を取れば，ほぼ確実に経済変数を正しく学習する」ということが広く知られている．例えば，ある市場に参入したばかりの企業を考えよう．参入当初この企業は，市場の需要関数の形状を詳しく知らないかもしれない．しかし，その市場に十分長い時間滞在すれば，その経験から需要関数の正しい形状を学習できるだろうというわけだ．この結果をもう少しフォーマルな言葉で言い換えると，以下のようになる．経済主体が未知の変数 $\theta$ に関して毎期情報を得るような動学的な学習モデルを考え，第 $t$ 期目の未知の変数 $\theta$ に関する信念を $\mu^t$ で表すとする．また変数 $\theta$ の真の値を $\theta^*$ で表すとする．このとき，経済主体がバイアスを持たないならば，（毎期得られる情報に関して一定の条件が満たされていさえすれば）信念 $\mu^t$ は確率 1 で $1_{\theta^*}$ に収束する，つまり

$$\lim_{t\to\infty} \mu^t = 1_{\theta^*}$$

が確率 1 で成立する，というわけである．ここで $1_{\theta^*}$ は，$\theta^*$ に確率 1 を付与する退化した確率分布（いわゆるクロネッカーのデルタ）を表すものとする．

さてそれでは，経済主体がバイアスを持つ場合，一体どのようなことが起こるのだろうか．大雑把に考えてみると，バイアスを持つ経済主体は（そのバイアスがどんなものかにもよるが，一般的には）毎期得られる情報を正しく処理できないわけだから，$\theta^*$ を正しく学習することはできないだろう，ということは容易に想像がつく．しかしキチンと数学的なモデルを立てて分析してみると，想定以上に風変わりな結果が得られることが近年の研究により明らかになった．具体的には，

- 経済主体の信念 $\mu^t$ がそもそも収束せず，永遠に振動し続けるようなケース
- 信念 $\mu^t$ が収束はするものの，その収束先の信念は（経済主体の持つバイアスがどんなに小さくとも）正しい値 $1_{\theta^*}$ からはかけ離れたものになってしまうケース

が存在することが明らかになっている．

本稿では，これら二つの「風変わりな」結果を簡単にまとめ，さらに関連した文献を紹介する．

## 2. 信念が収束しない例

では早速，具体的にどのようなときに経済主体の信念が収束しないのか，みてみよう．以下の例は，Fudenberg, Romanyuk, and Strack (2017) の扱った例を簡単化したものである．[1)]

### 2.1 需要関数を線形だと誤認している独占企業

ある独占企業が，各 $t = 1, 2, \cdots$ 期に低価格 $x = 2$ または高価格 $x = 3$ を選び，それに応じた売上

$$y = 12 - x^2 + \varepsilon$$

を観察するとしよう．ここで，$\varepsilon$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うノイズ項である．価格が上昇するごとに，需要（売上）が二次関数的に減少してゆくことに注意されたい．生産コストは無視するものとして，企業の毎期の利得は $xy$ であるとする．

ここまでは経済学でよく見る独占企業の問題だが，以下では，この独占企業は需要関数が線形であると誤認しており，その傾き $\theta$ を時間を通じて学習しようとしているとする．具体的にはこの企業は，売上が

$$y = 12 - \theta x + \varepsilon \tag{1}$$

という式で決定されると信じているとする．またこの企業は，未知のパラメータ（需要関数の傾き）が $\theta = 2$ または $\theta = 3$ のいずれかであると信じており，毎期ベイズの公式を用いてその信念 $\mu^t \in \triangle\{2, 3\}$ をアップデートしてゆくものとする．（本稿では，$\triangle X$ で集合 $X$ 上の確率分布全体の集合を表すとする．）なお第 1 期目の信念は $\mu^1 = (0.5, 0.5)$ であるとする．単純化のため，独占企業は近視眼的で，毎期その期の期待利得 $E[xy|\mu^t]$ を最大化するような価格を選ぶものとする．

この問題においては，企業の選ぶ価格は信念 $\mu^t$ に依存して毎期変化するため，得られる情報（売上）も毎期変化する．より正確には，第 $t$ 期目の売上 $y_t$ の分布は過去 $t-1$ 期間に何が起こったかに依存して決定される．このようなモデルをマジメに分析するとかなり大変になるのだが，以下ではなぜこの問題で信念が収束しないのか，直観的に説明してみよう．

まずこの問題において，企業が需要関数の傾きを $\theta = 2$ であると信じているなら，高価格 $x = 3$ が最適になることに注意されたい．実際，高価格を選んだ時の期待利得は $3(12-6) = 18$ であるのに対し，低価格を選んだ時の期待利得は $2(12-4) = 16$ である．（ここで期待利得を計算する際，企業は自身が信じる需要関数の形状 (1) を用いて利得を計算することに注意されたい．）同様に，企業が需要関数の傾きを $\theta = 3$ であると信じているなら，低価格 $x = 2$ が最適になる．もう少し細かく言うと，$\theta = 2$ の確率が 0.4 以上だと信じているならば高価格が，0.4 未満だと信じているならば低価格が最適となる．

以上を踏まえた上で，仮に今期，独占企業が $\theta = 2$ であると強く信じていたとしよう．このとき企業は高価格 $x = 3$ を選ぶが，すると実際に観察される売上の平均は $12 - 3^2 = 3$ となり，これは企業が期待する平均売上 $12 - 6 = 6$ よりもかなり低くなってしまう．すると企業は，「自分が思うよりも需要関数の傾きが急なのではないか」と考え，信念をアップデートする際に $\theta = 3$ へ付与する確率を増加させることになる．

---

[1] ミクロ理論において misspecified learning を考えた最初の論文である Nyarko (1991) でも，似たような例を取り扱っている．しかし Nyarko の分析では，信念の振動については焦点が当てられていない．実際 Nyarko の例では，独占企業の選ぶ価格 $x^t$ は収束せず振動し続けるものの，信念も振動するかは定かではない．

上記のようなことが何度も起こると，独占企業の信念は変化し，$\theta = 3$ であると強く信じるようになる．するとそれに応じて企業は低価格 $x = 2$ を選ぶようになるが，すると実際に観察される売上の平均は $12 - -2^2 = 8$ となり，これは企業が期待する平均売上 $12 - 6 = 6$ よりもかなり高くなる．すると企業は「自分が思うよりも需要関数の傾きが緩やかなのではないか」と考え，信念は元の値へと戻ってゆくことになる．すると企業は再び高価格にスイッチするわけだが，するとまた上記と同様のことが起こり，結果，高価格と低価格のフェーズが交互に現れることが分かる．このことから，上記の例では信念も価格も振動し続けるということが分かるだろう．

## 2.2 関連論文

脚注 1 でも述べた通り，ミクロ理論において misspecified learning を分析した最初の論文は Nyarko（1991) である．Nyarko は，独占企業が需要関数を線形だと誤認しているときに，選ばれる価格が収束せず振動しつづけることを示した．Nyarko 以降しばらく misspecified learning を取り扱う研究は出てこなかったが，これは misspecified learning のモデルの分析が（情報が i.i.d. でないなどの理由で）技術的に困難であったためだと思われる．

しかし今世紀に入って以降，misspecified learning を分析するツールが整ってきて，関連論文が増えてきた．その皮切りとなった Esponda and Pouzo（2016) は，バークナッシュ均衡という概念を導入し，もし信念や行動が収束するならばその収束先は必ずバークナッシュ均衡になることを証明した．従来は，「バイアスを持つ経済主体は真のパラメータ $\theta^*$ を学習することはできないだろう」ということは分かっていたが，「では信念が収束する場合，どこに収束するか」についてはよく分かっていなかった．バークナッシュ均衡という概念によりこの点がクリアになったことで，misspecified learning の分析の際に結果の見通しを立てることが格段に楽になったのである．実際 Heidhues, Kőszegi, and Strack（2018) は，バークナッシュ均衡を使って，自信過剰な労働者の行動が通常の労働者とどう異なるかについてさまざまな分析を行なった．なおバークナッシュ均衡については，山本 (2021a) および 山本（2021b) が日本語でより詳細な解説をしているので，ご興味のある方はそちらもご覧いただきたい．

もっとも，バークナッシュ均衡という概念単体で misspecified learning のモデルで起こる問題をすべて分析できるのかというと，残念ながらそこまで万能なわけではない．実際，バークナッシュ均衡はあくまで「信念が収束するケースにおいて何が起こるか」を明らかにするだけで，所与のモデルにおいて信念が本当に収束するのか，また収束しない場合何が起こるのかについて何も知見を与えない．Fudenberg, Romanyuk, and Strack（2017) は，経済主体が二つの行動しか持たずかつ毎期の情報が正規分布に従う特殊ケースにおいて，この問題に回答を与えた．具体的には彼らは，信念がいつ収束するのか，いつ収束しないのかについての判定条件を与えた．Esponda, Pouzo, and Yamamoto（2019) はこの結果を発展させ，非常に一般的な misspecified learning のモデルにおいて，経済主体の行動頻度や信念の変化が微分包含式によって近似できることを示した．これにより，「いつ信念は収束するのか，収束しない場合何が起こるのか」について非常に一般的なモデルで分析が可能となった．

なお本節で紹介した「信念や行動が収束しないモデル」は，経済主体が cyclic な行動を示すような状況を説明する際に非常に有益である．Leyy, Razin, and Young（2022) は，現実の世界を過度に単純化して考えている（その意味でバイアスを持っている）人たちによる投票モデルを考え，このとき投票者の行動は cyclic になり右派政党と左派政党が交互に選択されることを示した．

## 3. 微小なバイアスが学習に与える影響

Heidhues, Kőszegi, and Strack (2018) をはじめとした misspecified learning に関する初期の論文では，経済主体が一人しか存在しないケースが分析されていた．このような場合，長期的なベイズ学習の結果は，経済主体の持つバイアスの量に関して連続的に変化することが多い．これはすなわち，「経済主体の持つバイアスが微小であるならば，十分時間が経過した後の信念は真のパラメータ $\theta^*$ の近傍に近い値に収束してゆく」ことを意味する．（砕けた言い方をすると，厳密に $\theta^*$ を正しく学習するわけではないが，$\theta^*$ に限りなく近い値 $\theta$ を真の値だと信じるようになる．）その意味で，これらのモデルにおいては，微小なバイアスは長期的な信念に対して微小な影響しか及ぼさないと言える．

しかし近年の研究において，複数の経済主体が存在する場合，「バイアスが微小であるにも関わらず長期的な信念について多大な影響を及ぼす例」が複数あることが分かってきた．本節ではそのような例の一つである，Frick, Iijima, and Ishii (2020) による observational learning model を紹介する．

### 3.1 ベンチマーク： バイアスの存在しない observational learning

無限にいるプレイヤーが，$[0,1]$ 上に均一に分布しているとする．各プレイヤー $i$ はタイプ $t_i \in \boldsymbol{R}$ を持ち，このタイプは分布関数 $F$ に従って独立に分布しているものとする．この分布関数 $F$ は，連続な密度関数 $f$ を持つものとする．

未知の状態変数を $\theta \in [-1,1]$ で表すことにする．以下，各プレイヤーがこの未知の変数 $\theta$ を学習してゆく動学モデルを考える．

**第 0 期**　状態変数 $\theta$ が $[-1,1]$ から一様分布に従って選ばれる．選ばれた変数 $\theta$ は今後変化することはない．その後，各プレイヤー $i$ は，$\theta$ に関する私的シグナル $s_i \in R$ を観察する．このシグナル $s_i$ は，分布 $\Phi(\cdot|\theta)$ に独立に従うとする．分布 $\Phi$ は連続な密度関数 $\phi$ を持ち，さらに Monotone Likelihood Ratio Property (MRLP) を満たすとする．つまり，任意の $\theta$ と $\theta' > \theta$ に対して，$\frac{\phi(s_i|\theta)}{\phi(s_i|\theta')}$ が $s_i$ についての増加関数であるとする．直感的には，大きなシグナル $s_i$ を観察した人ほど，$\theta$ が高いと信じるようになる．この，シグナル $s_i$ を観察したときのプレイヤー $i$ の（変数 $\theta$ に関する）信念を，$\mu(s_i) \in \triangle[0,1]$ で表すことにする．

**第 1 期**　各プレイヤー $i$ は，第 0 期に構成された信念 $\mu(s_i)$ を所与として，利得 $u(t_i,\theta,a_i)$ の期待値を最大化するような行動 $a_i \in \{0,1\}$ を選ぶ．簡単のため，各プレイヤーは近視眼的で，今期の利得 $u(t_i,\theta,a_i)$ のみを最大化する（将来の利得については考慮しない）と仮定する．また以下の分析では，利得関数が

$$u(t_i,\theta,0)=0, \qquad u(t_i,\theta,1)=t_i+\theta$$

であると仮定する．直観的には，行動 $a_i=0$ は「安全な」行動であり，未知の状態変数によらず常に利得ゼロを得ることができる．一方行動 $a_i=1$ は「リスキーな」行動であり，特にタイプが $-1<t_i<1$ であるプレイヤーたちにとっては，その利得は未知の変数 $\theta$ 次第で正にも負にもなる．従って，これらのプレイヤーの最適な行動は，そのプレイヤーの持つ $\theta$ に関する信念に依存する．（基本的には，$\theta$ が大きいと信じているプレイヤーほど，行動 $a_i=1$ を取りやすくなる．）一

方，タイプが非常に小さいプレイヤー（具体的には，$t_i < -1$ であるプレイヤー）にとっては，行動 $a_i = 1$ の利得は常に負なので，そのようなプレイヤーはどのような信念を持とうとも $a_i = 0$ を選ぶ．同様に，タイプが非常に大きいプレイヤー（具体的には，$t_i > 1$ であるプレイヤー）は，どのような信念を持とうとも $a_i = 1$ を選ぶ．

**第 1.5 期**　第 1 期目と第 2 期目の間に，各プレイヤー $i$ は，ランダムにサンプルされたプレイヤー $j$ が 1 期目に選んだ行動 $a_j$ を観察する．この $a_j$ は，プレイヤー $i$ にとって（未知の状態変数 $\theta$ についての）新たな情報源となる．というのも，プレイヤー $j$ は $\theta$ に関する私的情報 $s_j$ を持っており，それが行動 $a_j$ に反映されているからである．従ってこの $a_j$ を観察したプレイヤー $i$ は，$\theta$ に関する信念をアップデートすることになる．このアップデートされた信念を $\mu(s_i, a_j)$ で表すことにする．

**第 2 期**　各プレイヤー $i$ は，上記の通りアップデートされた信念 $\mu(s_i, a_j)$ を所与として，利得 $u$ の期待値を最大化するような行動 $a_i$ を選ぶ．信念の違い以外は，第 1 期と完全に同じである．

**第 2.5 期**　第 2 期の後に，各プレイヤー $i$ はランダムにサンプルされたプレイヤー $k$ の行動 $a_k$ を観察する．これを元にアップデートされた信念を $\mu(s_i, a_j, a_k)$ で表すことにする．以下，第 3 期以降も同様のプロセスを無限回繰り返す．

この動学モデルにおいては，各プレイヤーは「相手がどんな行動を取ったか」を観察し，そこから未知の状態変数 $\theta$ を学習する．このようなモデルは observational learning model と呼ばれ，Banerjee（1992) や Smith and Sorensen（2000) をはじめ，様々な先行研究がある．

一般に observational learning model においては，置かれた仮定によって，

- 時間の経過とともに，プレイヤーが状態変数を正しく学習するケース，
- どんなに時間が経過しても，正しい学習が起こらないケース (information herding)

の 2 通りの結果が起こりうることが知られている．（詳しくは Smith and Sorensen（2000) を参照のこと．）以下の定理が示しているように，本節で考える動学モデルは，前者の「正しい学習が起こるケース」にあたる．簡単のため，第 $t$ 期にプレイヤー $i$ が持つ信念 $\mu(s_i, a_j, a_k, \cdots)$ を $\mu_i^t$ で表すとする．

**定理 1.** 任意の状態変数 $\theta \in [-1, 1]$ に対して，確率 1 で正しい学習が起こる．つまり，確率 1 で全ての $i$ に対して $\lim_{t\to\infty} \mu_i^t = 1_\theta$ が成立する．

## 3.2　バイアスのある observational learning

ではいよいよ，プレイヤーたちがバイアスを持つケースの分析を始めよう．前節のモデルでは，各プレイヤーのタイプ $t_i$ が分布 $F$ によって選ばれ，その $F$ がプレイヤー間で共有知識であると仮定されていた．Frick, Iijima, and Ishii（2020) は，「各プレイヤーのタイプは $F$ によって選ばれるのだが，プレイヤーたちはタイプの分布が $\hat{F} \neq F$ であるという誤った認識をしている（そして $\hat{F}$ が共有知識である）」ような状況を考えた．このような場合，各プレイヤー $i$ は相手のタイプの分布に対してバイアスを持っているので，第 1 期目の終わりに相手の行動 $a_j$ を観察した際にその情報を「正しく」処理することができず，アップデートされた信念 $\mu(s_i, a_j)$ は前節の（バイアス

のない）モデルで計算されたものとは異なる値になる．従って第 2 期における行動や信念も前節のモデルとは異なる値となり，それが先々の期にまで影響を及ぼすことになるのだが，では結局長期的にはどのようなことが起こるのだろうか？

この問いに答えるためには，steady state（定常状態）という概念を考えることが有益である．定常状態とは，その名の通り「ひとたびその状態になったら，それ以降変化が起こらなくなるような」状態のことをいう．今回のモデルでいえば，ある $\hat{\theta} \in (-1, 1,)$ が steady state である（つまり，全員が「$\hat{\theta}$ が真の変数だと信じている)」ならば信念は以後変化せずその値に留まり続ける) ための必要十分条件は，

$$F(-\hat{\theta}) = \hat{F}(-\hat{\theta}) \tag{2}$$

というシンプルな式で与えられる．この式を解釈するために，仮に現在，全員が「$\hat{\theta}$ が真の値である」と信じているとしよう．左辺の $F(-\hat{\theta})$ という項は，「ランダムサンプルをしたときに，行動 0 が実際に観察される真の確率」である．実際，行動 $a_i = 1$ を取った時の利得は $t_i + \theta$ で与えられるから，タイプが $t_i < -\hat{\theta}$ であるプレイヤーは行動 0 を，タイプが $t_i > -\hat{\theta}$ であるプレイヤーは行動 1 を選ぶことになる．タイプの分布は $F$ なので，プレイヤー全体の中で 0 を選ぶ人の割合は $F(-\hat{\theta})$ となることが分かる．一方，右辺の $\hat{F}(-\hat{\theta})$ という項は，「ランダムサンプルをしたときに，行動 0 が観察される（各プレイヤーの信じる）主観的な確率」である．実際，各プレイヤーはタイプの分布が $\hat{F}$ であると信じているので，プレイヤー全体の中で 0 を選ぶ人の割合は $\hat{F}(-\hat{\theta})$ であると信じている．

上記の (2) という条件は，この「行動 0 が観察される頻度についての各人の予測」が「実際に行動 0 が観察される頻度」と完全に一致することを要求している．大雑把にいうと，この条件が満たされず期待と現実が乖離している場合，各プレイヤーは「これはおかしいぞ，真の状態変数は $\hat{\theta}$ ではないのかもしれない」と考えてしまい，現実をよりよく説明するように信念をアップデートしてしまう．よって，長期的にはプレイヤーたちは $\hat{\theta}$ とは異なる値を真の状態変数だと考えるようになる．一方，上記の条件が満たされていて期待と現実が完全に一致しているならば，各人は信念をアップデートすることなく，$\hat{\theta}$ を真の値だと信じたままの状態でい続けるというわけである．なおこの条件は統計学でよく知られた Berk（1966) のフレームワークに基づいており，Esponda and Pouzo（2016) はこのような定常状態のことを Berk–Nash 均衡と呼んでいる．

この議論から，「プレイヤーたちの信念が長期的に収束するなら，その収束先は steady state でなければならない」ということが直感的に分かるだろう．以下の定理が示すように，この直感は正しく，本節で考えたモデルにおいてはプレイヤーたちの信念は必ず steady state（または端点）に収束してゆく．[2)] 詳しい証明は Frick, Iijima, and Ishii（2020) の Proposition B.1 を参照されたい．以下 $\mathrm{SS}(F, \hat{F})$ で，$F$ と $\hat{F}$ を所与とした時の steady state 全てと端点 $-1$，1 からなる集合を表すとする．

**定理 2.** $|SS(F, \hat{F})| < \infty$ を満たすように $F$ と $\hat{F}$ を選び，また真の状態変数 $\theta$ を任意に選ぶ．このとき，ある $\hat{\theta} \in SS(F, \hat{F})$ が存在して，ほぼ全てのプレイヤーの信念は $1_{\hat{\theta}}$ へと確率 1 で収束する．

2　端点への収束が起こるのは，以下のようなケースである．仮に今，全員のプレイヤーが $\theta = 1$ が真の値であると信じているとしよう．そして，$\theta = 1$ が steady state の条件 (2) を満たさず，$F(-1) < \hat{F}(-1)$ であるとしよう．このとき各プレイヤーは，自分が想定しているよりも高い頻度で行動 1 を観察する．従ってそれに対応して信念をアップデートし，$\theta$ がより高い値であると考えるようになるのだが，現在信じている $\theta = 1$ は既に端点であり，これ以上信念をアップデートすることはできない．従って，steady state の条件 (2) を満たしていないにも拘らず，各プレイヤーの信念は現状のまま変化しないことになる．

この定理では $|\mathrm{SS}(F,\hat{F})| < \infty$ という仮定が置かれているが，この仮定は $F \neq \hat{F}$ かつ $\hat{F}$ が解析的でありさえすれば満たされる．この意味で，ほとんど全てのバイアス $\hat{F}$ に対して上記の定理は成立する．よって基本的には，steady state の集合 $\mathrm{SS}(F,\hat{F})$ を計算することで，長期的な学習の結果何が起こるのかを分析できるというわけである．

さてそれでは，この定理を用いて「微小なバイアスが長期的な学習にどのような影響を与えるか」について考察してみよう．まず $F=\hat{F}$，つまりバイアスが全く存在しないケースについては，前節の分析から，全員が状態変数 $\theta$ を正しく学習するということが分かっている．では $\hat{F}$ が微小に $F$ からズレた場合はどうなるか．この場合は上記の定理より，信念は steady state のどこかへと収束することが分かる．重要なのは，この steady state の集合 $\mathrm{SS}(F,\hat{F})$ が，真の状態変数 $\theta$ に全く依存しないということである．（実際，steady state を定義する (2) には $\theta$ は出てこない．）これはつまり，$\hat{F}$ が $F$ から少しでもズレた途端に，長期的な信念は $\theta$ と全く関係のない点（そして一般的には，$\theta$ とは全く異なる点）に突然ジャンプしてしまうということを意味する．一見無視できるほど小さなバイアスであっても，長期的な学習結果に非常に大きな影響を持ちうる，というわけである．

### 3.3 考察および関連文献

前節の議論から，この observational learning model においては，微小なバイアスが存在するだけで（未知の状態変数について，真の値とはかけ離れた）完全に誤った学習が起こってしまうことが分かった．これは，steady state の集合 $SS$ が真の状態変数 $\theta$ と全く無関係に定まるという性質に起因する．（Frick, Iijima, and Ishii （2020) はこの性質のことを decoupled learning と呼んでいる．）ではなぜ，このモデルでは steady state が $\theta$ と無関係になるのだろうか？

結論から言うとここでは，「各人が $\theta$ に関して私的シグナルを得るのは第 0 期における一回だけである」という仮定が決定的に重要である．この仮定の下では，時間が経過するにつれて，私的シグナル $s_i$ が $i$ の信念に及ぼす影響は低下してゆく．（十分時間が経過した後は，$i$ の信念はほぼほぼ「観察された他のプレイヤーの行動 $a_j$」によって決まることになる．）真の状態変数が（シグナル $s_i$ を通じて）信念に影響を及ぼす余地がなくなってしまうのだ．[3)]

実際 Frick, Iijima, and Ishii （2020) は，もし仮定を変更して「各人が毎期 $\theta$ に関する私的シグナルを観察する」ようなモデルを考えると，結論が真逆になり steady state SS はバイアス $\hat{F}$ に関して連続に変化することを示した．つまりこのようなモデルでは，各人が微小なバイアスしか持たないならば，steady state においては $\theta$ についてほぼほぼ正しい学習がなされることになる．この事実からも，「十分時間が経過した後の各人の信念は，観察された相手の行動 $a_j$ によってほぼ完全に決定される」という observational learning 的状況であることが，ここでの結果の鍵となっていることが分かる．

Frick, Iijima, and Ishii （2020) の先行研究である Bohren and Hauser （2021) は，バイアスを持つ agent による observational learning model を考え，微小なバイアスの存在はベイズ学習の結果にほぼ影響を与えないことを示した．しかし彼らの結果は，未知の経済変数 $\theta$ が二種類の値しか取らない，毎期一定確率で（相手の行動だけでなく）$\theta$ に関するシグナルを観察できるなど，様々な仮定に依存している．これを指摘したのが Frick, Iijima, and Ishii （2020) の大きな貢献の 1 つ

3 もちろん，他のプレイヤーの行動 $a_j$ も私的シグナル $s_j$ の影響を受けてはいるが，その影響も時間を通じて減少してゆく．結果，$\theta$ が信念に影響を余地がなくなってしまうのである．

で，Bohren and Hauser (2021) とはやや異なるモデルを考えいるため直接的な比較はできないもののの，observational learning において微小なバイアスしか存在しなくても，場合によっては長期的な信念が正しい値からは大きく離れてしまうことを示した．

なお最近は，Frick, Iijima, and Ishii (2023) や Murooka and Yamamoto (2023) など，Frick, Iijima, and Ishii (2020) とは異なる状況においても同様に微小なバイアスが信念に大きな影響を及ぼしうることを示した．特に Murooka and Yamamoto (2023) は observational learning ではなく，前節の独占企業の例に似たスタンダードなベイズ学習問題においてもそのような結果が成立することを示している．興味のある方はぜひこれらの論文も参考にされたい．

## 参　考　文　献


Banerjee, A. V. (1992): “A Simple Model of Herd Behavior,” *Quarterly Journal of Economics* 107, 797–817.

Berk, R. H. (1966): “Limiting Behavior of Posterior Distributions when the Model is Incorrect,” *Annals of Mathematical Statistics* 37, 51–58.

Bohren, A. and D. Hauser (2021): “Learning With Heterogeneous Misspecified Models: Characterization and Robustness,” *Econometrica* 89, 3025–3077.

Esponda, I. and D. Pouzo (2016): “Berk-Nash Equilibrium: A Framework for Modeling Agents with Misspecified Models,” *Econometrica* 84, 1093–1130.

Esponda, I., D. Pouzo, and Y. Yamamoto (2021): “Asymptotic Behavior of Bayesian Learners with Misspecified Models,” forthcoming in *Journal of Economic Theory*.

Frick, M., R. Iijima, and Y. Ishii (2020): “Misinterpreting Others and the Fragility of Social Learning,” *Econometrica* 88, 2281–2328.

Frick, M., R. Iijima, and Y. Ishii (2023): “Belief Convergence under Misspecified Learning: A Martingale Approach,” forthcoming in *Review of Economic Studies*.

Fudenberg, D., G. Romanyuk, and P. Strack (2017): “Active Learning with a Misspecified Prior,” *Theorectical Economics* 12, 1155–1189.

Heidhues, P., B. Kőszegi, and P. Strack (2018): “Unrealistic Expectations and Misguided Learning,” *Econometrica* 86, 1159–1214.

Levy, R., R. Razin, and A. Young (2022): “Misspecified Politics and the Recurrence of Populism,” *American Economic Review* 112, 928–962.

Murooka, T. and Y. Yamamoto (2023): “Higher-Order Misspecification and Equilibrium Stability,” Working Paper.

Nyarko, Y. (1991): “Learning in Mis-Specified Models and the Possibility of Cycles,” *Journal of Economic Theory*, 55, 416–427.

Smith, L. and P. Sorensen (2000): “Pathological Outcomes of Observational Learning,” *Econometrica* 68, 371–398.

山本裕一 (2021a): ベイズ学習とバイアス：自信過剰な人は得をするか，三菱経済研究所．

山本裕一 (2021b): “バーク・ナッシュ均衡とその性質,” 経済研究 72, 349–362.