

【調 査】

# 地域間物価指数の理論と都道府県別物価指数の構築\*

阿部修人・稲倉典子\*\*

公開されている公式統計に基づき、日本の都道府県別物価指数を試算した。主要結果は下記の通りである。(1)帰属家賃を含む都道府県間物価指数は、全ての指数において大きな違いを示しており、物価の高い県と低い県の間には20%ポイント以上の差がある。(2)帰属家賃を除く場合、総務省による価格差指数同様、都道府県間の物価の違いは小さく、その差は10%ポイント以下程度となる。(3)食料品に関しては、物価指数算式間の差は少ない。(4)非食料品の指数算式間の差は大きく、特にJevons指数およびCUPI(CES Unified Price Index)と他の差が大きい。また、比較的同様の挙動を示すGeary-KhamisやFisher指数、GiniやAbe-Rao指数等の間でも1%から3%ポイント程度という無視できない違いが生じている。これらは、都道府県間の物価の違いを見る際、帰属家賃の影響が極めて大きいこと、また、それほどではないにしろ、指数算式間の違いも存在しており、分析・利用目的に応じた指数算式の選択が重要であることを示している。

JEL Classification Codes: C13, C83, E01, E31

## 1. 導入

スーパーマーケット等の小売店では多くの種類の商品が販売されている。また外食をする際にも、高級レストランからファミリーレストランまで多様であるし、各レストランの中でも多様な料理が提供されている。日々取引されている商品の種類はまさに無数に存在しており、いわゆるビッグデータ解析が特殊な研究分野ではなくなった今日では、研究用のデータセットに数万種類を超える商品情報が含まれることも珍しくない。一方、精緻なミクロ計量分析が経済学の諸分野で広く用いられるようになった今でも、構造モデルで扱われる商品の種類は、現実の商品種類に比較して非常に少ない。家計分析を例にとると、食料品は外食とそれ以外に分ける程度の大カテゴリー単位の分析が多い。すなわち、無数の異なる商品が1つの財カテゴリーに集計されているのである。

どのような条件で、どのようにすれば、異なる多様な商品を集計し、あたかも1つの商品のように扱うことができるのだろうか。集計問題と呼ばれるこのトピックはマクロ経済学の黎明期である20世紀中旬においては数多くの研究がなされ、特にジョン・ヒックス、ウィリアム・ゴーマン、そしてローレンス・クライン達により精力的に分析された<sup>1)</sup>。現在、財の集計問題に関し、多くの経済学者は下記

のような作業により処理している。第1に、家計の支出総額(あるいは食料支出のようなカテゴリー単位の支出総額)を計算する。第2に、そのカテゴリーに対応する物価指数で割り、「実質」消費支出を求める。最後に、実質消費支出をあたかも1つの商品であるかのようにみなし、モデルを構築する。ここで用いられる「実質」消費支出額が明確に議論されることは必ずしも多くないが、実質化することにより名目金額は1つの財の数量のように扱われている。同様に、また、企業分析においても、金銭単位の売上高、あるいは総付加価値を物価指数で割ることにより生産「数量」を得る、という作業が頻繁に行われている。後述するように、物価指数が、支出関数の比として定義される生計費指数と一致していれば、物価でデフレートして得られる「実質」消費額は効用関数の情報を含む。したがって、上記の慣行は標準的な経済理論に即したものである。ヒックスやクライン達による分析を踏まえる必要なく、容易に集計問題を処理できているのである。そこでは、平均的な価格の動向を示すために作られている消費者物価指数が、極めて重要な役割を果たしている。

一方、各種マクロ統計作成に関する第一人者であるアラン・ヘストンは、国際間の物価統計に関するアンガス・ディートンとの共同論文の中で下記のように記している。

「以降の分析において、私達は物価指数を生計費

指数ではなく、国民経済計算で行われる慣例に従って取り扱う。それだと明確な厚生分析が不可能になる、という批判は当然あるであろう。その意見には同意する。しかし、私達は、どのようにして生計費指数を作成したらよいのかわからないのだ(p.6 in Deaton and Heston 2010)」

すなわち、各国の統計局が作成している各種物価・価格指数は、ミクロ経済理論上の概念である生計費指数に一致するとは限らず、特にヘストン達の関心事である地域間・国間の物価指数においては、生計費指数との乖離は深刻な問題になっているのである。各国の統計局が物価指数、あるいは価格指数を作成する時、経済理論に即した生計費指数を意識していることは少ない。そして、生計費指数を経済理論に即して構築しようとしても、後述するような様々な問題が生じている。経済理論に即した生計費指数の構築の試みは多数行われているものの、統計実務に耐える生計費指数のアルゴリズム構築は、現在の指数分析のフロンティアであり、特に地域間の生計費の比較は重要な問題となっている。

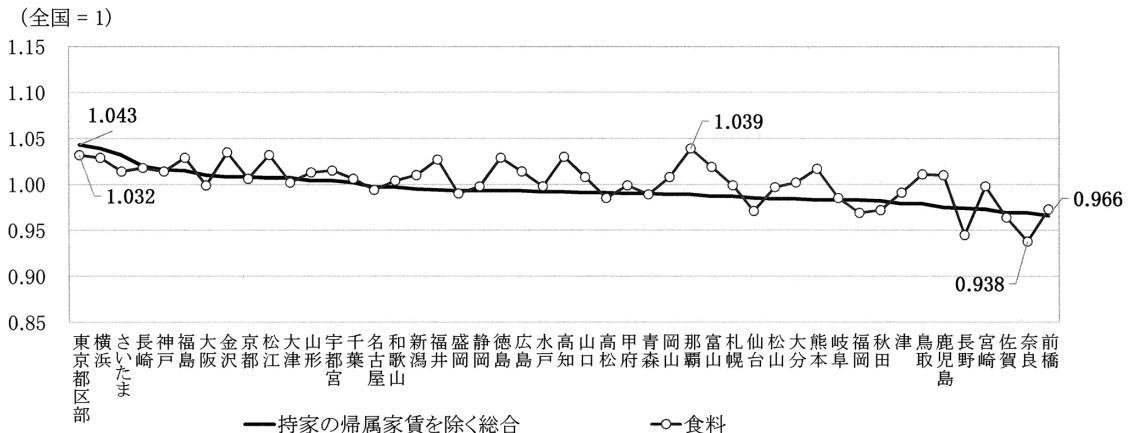
経済理論に即さなくとも、地域間の物価指数を作成するにはいくつもの困難がある。第1は、北海道と沖縄の物価の違いを調べる時に、第3の地域、例えば東京を間に挟むことで矛盾が生じてはいけないことである。具体的には、北海道の物価が沖縄の2倍であり、東京の物価が沖縄の1/2倍であれば、北海道の物価は東京の4倍でなければならない。地域間物価指数が一貫性を持つには、物価指数が推移性を満たす必要があるが、推移性を満たす物価指数はごく限られており、現実には(1)推移性をみたくように多地域(Multilateral)物価指数を導入する、か、(2)2地点の物価の比較は、常に特定の第3の地域経由でのみ可能にする、という2つの選択肢から選ばれている。国際標準は(1)であり、1931年に発表されたコンラート・ジニの提案に即した、現在GEKS(Gini-Eltető-Köves-Szulc)法と呼ばれる手法が広く採用されている。一方、日本では(2)の手法で作成されている。日本の地域間価格差指数では、各都道府県間の物価は、常に全国平均を経由してのみ比較する、ということになっている。この手法の問題は、北海道と沖縄の比較をする際に、なぜ全国平均を経由せねばならないのか、その根拠がはっきりしないことである。また、全国平均も幾何平均、算術平均、各種加重平均など手法により値が異なり、それに伴い、地域間物価指数も異なるものになって

しまう。一方GEKSはそのような恣意性がなく、ずっと異なる手法を採用してきたPenn World TableでもGEKSが一部利用されるようになってきている。しかしながら、GEKSにも後述する様に多数の問題があり、指数理論や経済理論に即した場合、決して望ましい指数と言うことはできない。GEKSはヘストンの言う、慣例に従う指数算式の一つであり、経済学的な根拠は薄く、GEKSによる物価指数で得られる実質消費は、経済学的に解釈することが困難なものである。

地域間の物価比較における第2の困難は、異なる地域では異なる商品が購入されていることが多いことにある。米文化圏と小麦文化圏、日本酒とワイン、など、食文化の違いにより主要な商品は異なるものになるだろう。日本国内に限定しても、東京と沖縄で全く同じ消費行動をとることは困難であろう。同一の商品が存在しないとき、価格比較をする際には様々な調整が必要になるが、異なる商品を同一商品とみなすための調整は、理論的にも実務的にも様々な問題をはらんでいる。

本稿の目的は2つある。第1は、近年進捗が著しい地域間物価指数理論の発展に関して、古典的な指数理論も視野に入れつつ紹介することである。第2は、国際標準となっているGEKSを含め、各種地域間物価指数算式を用い、日本の都道府県間の物価指数を構築することである。図1は、総務省統計局が作成した2015年における日本の地域間物価指数を表している。全国平均を1としたとき、地域間の価格差は非常に小さく、日本では都道府県間に価格差はほとんどない、という結果になっている。価格指数の地域差がほとんど生じない1つの理由は、総務省の地域間指数に帰属家賃が含まれていないことである。帰属家賃を含まない場合、消費支出に占める家賃の割合は、その地域の持ち家比率に大きく依存することになる。しかし、借家のみ消費とみなし持ち家は消費とみなさない、という方針は、経済理論上正当化することが困難であり、人々の生計費を比較するためには、帰属家賃を含む方が適切であると考えられる。そこで、本稿では、帰属家賃も含む日本の都道府県間物価指数を構築し、どの程度の価格差が生じているかを分析する。また、前述のように、日本の地域間物価指数の算式は国際標準と異なるものになっている。本稿では、日本に固有の指数算式による物価指数が、国際標準算式によるものとどの程度異なるものになるかを示す。

図 1. 消費者物価地域差指数(2015 年)



出所) 総務省『小売物価統計調査(構造編)』「第1表 10 大費目別消費者物価地域差指数(全国平均=100)」より作成。

注) 図中の都市は、「持家の帰属家賃を除く総合」の指数が大きいものから順に並んでいる。

日本の都道府県データを用いた主要結果は下記の通りである。(1) 帰属家賃を含む都道府県間物価指数は、全ての指数算式において大きな違いを示しており、物価の高い県と低い県の間には20%ポイント以上の差がある。(2) 帰属家賃を除く場合は、総務省による価格差指数同様、都道府県間の物価の違いは小さく、その差は10%ポイント以下程度となる。(3) 食料品に関しては、物価指数算式間の差はほとんどない。(4) 非食料品に関しては指数算式間の差は大きく、特にJevons指数およびCUPI(CES Unified Price Index)と他の差が大きい。また、比較的同様の挙動を示すGeary-KhamisやFisher指数、GiniやAbe-Rao指数等の間でも1%から3%ポイント程度の違いが指数間で生じており、無視できない値となっている。これらは、都道府県間の物価の違いを見る際、帰属家賃の影響が極めて大きいこと、また、それほどではないにしろ、指数算式間の違いも存在しており、分析・利用目的に応じた指数算式の選択が重要であることを示している。

## 2. 地域間物価指数の理論

物価指数に対しては各種の理論があり、その区分けも研究者により様々である<sup>2)</sup>。20世紀初頭にアーヴィング・フィッシャーが公理的アプローチを提唱する前の、18世紀のウィリアム・フリーウッドやニコラ・デュト、19世紀のエディエンヌ・ラスパイレスやヘルマン・パーシェ達の指数をどう扱うかにより区分け方が異ってくるが<sup>3)</sup>、現在の指数研究において主に用いられている理論は、公理的アプローチ、経済学的アプローチ、および確率的アプロ

ーチの3種類である。その中で、確率的アプローチは、主に下位品目(elementary)レベル、すなわち、食パンやキャベツ、など最も細かいレベルでの集計に用いられており<sup>4)</sup>、商品カテゴリー間の集計で使われることはまれである<sup>5)</sup>。本稿ではカテゴリー間の集計に主に注目するため、確率的アプローチには立ち入らず、主に公理的アプローチと経済学的アプローチに限定することにする<sup>6)</sup>。

### 2.1 公理的アプローチ

公理的(Axiomatic)アプローチはテストアプローチとも呼ばれる、アーヴィング・フィッシャーが1922年に記した大著で提唱した指数理論であり、現在においても指数理論の中心に位置している。物価指数を数量と価格の関数として定義し、その関数が満たすべき公理、あるいは通過すべきテストを並べ、より多くの公理を満たす指数を望ましい指数とみなすものである。通常、2地点、 $s$ 地域と $t$ 地域の間の物価を示す関数として、物価指数 $PI$ は下記のように定義される。

$$PI: \mathbf{R}_+^N \rightarrow \mathbf{R}_+, PI(s, t) = PI(p_s, q_s, p_t, q_t),$$

ただし、 $p_k, q_k$ は $k=s, t$ 地域における価格と数量ベクトルであり、 $N$ は商品の種類数である。数量と価格、特に価格は正值であることを想定されることが多い。この関数が満たすべき公理として、フィッシャー以降の公理的アプローチで特に重視されているのは、下記の基本公理と呼ばれるものである。

#### (A-1) 弱恒等性

$$\text{For all } p_s, q_s, q_t \in \mathbf{R}_+^N, PI(p_s, q_s, p_s, q_t) = 1.$$

## (A-2) 単調性

For all  $p_s, q_s, p_t, q_t \in \mathbf{R}_+^N$ ,  
if  $p'_t \geq p_t$ , then  $PI(p_s, q_s, p'_t, q_t) \geq PI(p_s, q_s, p_t, q_t)$ .

## (A-3) 位無差別性(Commensurability)

For all  $p_s, q_s, p_t, q_t \in \mathbf{R}_+^N, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbf{R}_{++}^N$

Define  $p'_k = \left( \frac{p_{1k}}{\lambda_1}, \frac{p_{2k}}{\lambda_2}, \dots, \frac{p_{Nk}}{\lambda_N} \right), q'_k$   
 $= (\lambda_1 q_{1k}, \lambda_2 q_{2k}, \dots, \lambda_N q_{Nk}), k = s, t$   
 then,  $PI(p'_s, q'_s, p'_t, q'_t) = PI(p_s, q_s, p_t, q_t)$ .

(A-4) 1次同次性<sup>7)</sup>

For all  $p_s, q_s, p_t, q_t \in \mathbf{R}_+^N, \lambda \in \mathbf{R}_{++}$

$$PI(p_s, q_s, \lambda p_t, q_t) = \lambda PI(p_s, q_s, p_t, q_t),$$

$$PI(\lambda p_s, q_s, p_t, q_t) = \frac{1}{\lambda} PI(p_s, q_s, p_t, q_t)$$

上記の各公理の意味に関しては、CPI マニュアル<sup>8)</sup>や Balk(2008)に詳細な説明があるが、(A-3)を除き、その意味は明らかであろう。(A-3)は、商品の計測単位がなんであっても、指数の値には影響しないことを意味している。これは、例えば牛乳の計測単位をリットルからガロンにし、リットル当たり単価からガロン当たり単価に変更しても、指数の値には影響しないとするものであり、異なる商品の価格を扱う物価指数を計算するうえで特に重要な性質である。

上記の4公理をみたす指数は無数に存在し、よく使われるラスパイレス指数やフィッシャー指数も全て満たしている。そこで、さらに下記の公理が、物価指数にとり望ましい性質であると考えられてきた<sup>9)</sup>。

## (T-1) 要素反転性

For all  $p_s, q_s, p_t, q_t \in \mathbf{R}_+^N$ ,

$$PI(p_s, q_s, p_t, q_t) \times PI(q_s, p_s, q_t, p_t) = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^N p_{is} q_{is}}.$$

## (T-2) 推移性

For all  $p_s, q_s, p_t, q_t, p_k, q_k \in \mathbf{R}_+^N$ ,

$$PI(p_s, q_s, p_t, q_t) \times PI(p_t, q_t, p_k, q_k) \\ = PI(p_s, q_s, p_k, q_k).$$

要素反転性は、物価指数の価格と数量を入れ替えたもの、すなわち数量指数と物価指数を乗じると、総支出比になるというもので、物価指数をデフレーターとして支出総額を割って得られる実質消費に意味を与えるものである。もしもこの性質がなく、か

つ物価指数に経済学的な根拠がない場合、物価指数をデフレーターとする「実質消費支出」に意味がなくなってしまう。推移性は、物価指数の多期間、多地点にわたる一貫性を保証するものであり、地域間物価指数においては特に重要なものである。物価指数に推移性がない場合、東京と沖縄の物価と、沖縄と北海道の物価の関係から東京と北海道の物価を得ることが出来なくなる。要素反転性と推移性のいずれも指数として望ましい性質であるが、これらの公理に関し、下記の2つの定理が知られている。

**定理1** (A-1), (T-1), (T-2)を全て同時に満たす  $PI: \mathbf{R}_+^{4N} \rightarrow \mathbf{R}_+$  は存在しない。

**定理2** (A-1), (A-2), (A-3), (A-4)及び(T-2)を同時に満たす指数は、

$$PI(p_s, q_s, p_t, q_t) = \prod_{i=1}^N \left( \frac{p_{it}}{p_{is}} \right)^{\alpha_i} \quad (1)$$

where  $0 < \alpha_i$ , for  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

and  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ ,

のみである<sup>10)</sup>。

コブダグラス型の物価指数(1)は数量情報が使われておらず、実際に用いるには制約が強すぎる。この2つの定理は公理的アプローチの限界として広く知られており、公理的アプローチから1つの指数を理想的な算式として特定しようとするフィッシャーのアプローチは事実上頓挫しているといえるだろう<sup>11)</sup>。

ところで、定理2については若干の補足が必要である。Gini(1931)は推移性を満たす指数算式をいくつか提案している。その中の第1の算式は、指数算式の対象となる地域が全部でMであるとすると、下記のようにになっている。

$$PI_{-G1} = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} \left( \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M q_{ik} \right)}{\sum_{i=1}^N p_{is} \left( \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M q_{ik} \right)}.$$

この算式は、(A-1)から(A-4)までの全てと(T-2)を満たす。これは望ましいものであるが、CPI マニュアルや Balk(2008)で指摘されているように、この指数には、豊かな国・地域の影響が大きくなってしまいう性質がある。そのため、下記の公理が通常、地域間指数では重視される。

## (T-3) 地域の数量規模に対する不変性

For all  $p_s, q_s, p_t, q_t \in \mathbf{R}_+^N, \lambda \in \mathbf{R}_{++}$

$$PI(p_s, q_s, p_t, \lambda q_t) = PI(p_s, q_s, p_t, q_t).$$



すなわち、比較対象地域(国)の数量規模に関して、物価指数はゼロ次同次になっていなければならない。この公理が満たされていないと、日本における東京都や、世界各国におけるアメリカ合衆国や中華人民共和国のような、規模の大きな国の影響が大きくなってしまふ。そこで、ウェイトを算術平均ではなく、幾何平均、すなわち

$$PI\_Gini = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} \left( \prod_{k=1}^M q_{ik}^{1/M} \right)}{\sum_{i=1}^N p_{is} \left( \prod_{k=1}^M q_{ik}^{1/M} \right)} \quad (2)$$

とすると、この算式は(A-1)から(A-4)までの全てと(T-2)と(T-3)を同時に満たす<sup>12)</sup>。定理2が対象としている関数は

$$PI: \mathbf{R}_+^N \rightarrow \mathbf{R}_+, PI(s, t) = PI(p_s, q_s, p_t, q_t)$$

であり、2地点以外の他の地域の数量には依存していない。なので、この関数が(A-1)-(A-4)及び(T-2)と(T-3)すべてを満たしても、定理2と矛盾するわけではない。ここで、数量ベクトルを観察された数量とは無関係な、外生的な、ある参照数量ベクトル  $q_f$  とすると、これは Lowe 指数と呼ばれるものとなる。

$$PI\_Lowe = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} q_{if}}{\sum_{i=1}^N p_{is} q_{if}}$$

この Lowe 指数は(A-1)、(A-2)、(A-4)及び(T-2)と(T-3)をみたす。計測単位の変更に関しては、リットルからガロンへの変更は、参照数量ベクトルの単位も変更になるため、やはり Commensurable となる。問題は、(A-3)の Commensurability の定義では、このような参照ベクトルの単位変更がカバーされていないため、Lowe 指数は(A-3)を満たさなくなってしまうのである。これは、基本公理の1つである(A-3)では Commensurability を十分に描写できていないことを示している。すなわち、定理2をベースに、コブダグラス型のみを考える必要はなく、2地点以外の情報を用いたり、参照ベクトルを用いることで、推移性や位無差別性を確保することが可能になるのである。

### 2.1.1 Multilateral 指数

これまで紹介した指数算式は、最後に紹介した Gini(1931)に準拠したものを除き、すべて2地点間の情報のみに依存した、Bilateral 指数であった。そして、定理2により、Bilateral だと、地域間指

数で特に重要な推移性をみたす指数がほとんど存在しない、という結果を紹介した。そこで、現在の地域間物価指数では、Bilateral ではなく、推計対象の全地域の情報に依存する Multilateral 指数を用いることが標準となっている。具体的には、Multilateral 指数は下記のように定義される。

$$PI(s, t): \mathbf{R}_+^{2NM} \rightarrow \mathbf{R}_{++}$$

$$PI(s, t) = PI(p_1, p_2, \dots, p_M, q_1, q_2, \dots, q_M).$$

前節で議論した Gini(1931)に準拠した(2)もまた、Multilateral 指数の一種である。地域間物価指数では、異なる地域間の物価が、他地域を経由する場合も含め一貫性がなければならない。これまで提案されてきた Multilateral 指数は、3種類の方法でその一貫性を確保してきた。今、経済には4地域、A, B, C, D があり、図2-1のように配置されているとする。この経済において、2地点間の物価を比較する際には、図2-2のような組み合わせが存在しうる。AとCの比較をする際には、ACを直接比較するAC線、Bを経由するABC、Dを経由するADCの3種類である。そこで、2地点間をつなぐ可能な全ての経路を網羅し、それらの平均として2地点間の物価を定義すれば、地域間物価指数は一貫性を確保できるだろう。具体的には、まず、トルンクピスト指数やフィッシャー指数等、Bilateral な指数算式を選択する。次に、2地点  $s, t$  の物価を下記の、多数の Bilateral 指数の単純幾何平均で定義する。

$$PI(s, t)_{GEKS}$$

$$= \left[ \prod_{k=1}^M PI(p_s, q_s, p_k, q_k) PI(p_k, q_k, p_t, q_t) \right]^{1/M}.$$

すなわち、 $s$  地と  $t$  地の物価を  $k$  地を経由して計算しているが、その  $k$  地として、選択可能な全ての地を網羅( $s, t$  両地も含む)し、その単純幾何平均をとっている。この指数は提案した4人の研究者の頭文字から GEKS(Gini-Eltetö-Köves-Szulc)と呼ばれる。GEKSには、下記のような特徴があることが知られている。まず、通常の2地点間の物価指数  $PI(s, t)$  が満たすべき性質として

### (T-4) 地域反転性

$$\text{For all } p_s, q_s, p_t, q_t \in \mathbf{R}_+^N,$$

$$PI(p_s, q_s, p_t, q_t) \times PI(p_t, q_t, p_s, q_s) = 1.$$

を考えよう。これは、 $s$  地と  $t$  地の物価をまず計算し、それに  $t$  地から  $s$  地まで逆に計算した物価を乗じると1になる、ということであり、(A-1)と(T-2)を満たしていれば、(T-4)は自動的に成立する<sup>13)</sup>。

図. 2-1

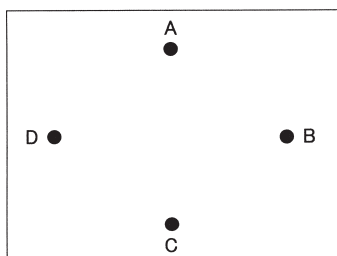


図. 2-2

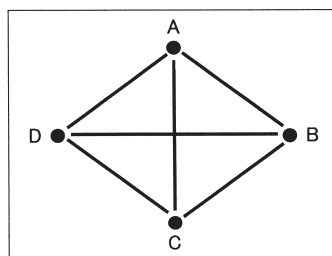


図. 2-3

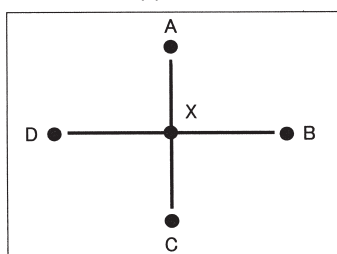
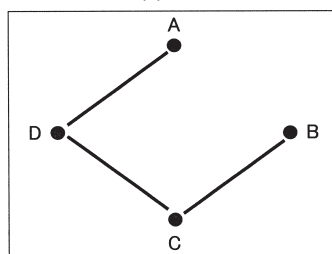


図. 2-4



すると、下記の定理が知られている。

**定理 3 (GEKS の最適性)**

$PI(s, t)$  が (A-1), (T-4) を満たすとする。

そのとき、下記の最小化問題

$$\min_{P_{st}} \sum_{s=1}^M \sum_{t=1}^M [\ln P_{st} - \ln P(s, t)]^2 \text{ subject to } P_{sk} \cdot P_{kt} = P_{st} \forall s, t, k = 1, 2, \dots, M$$

の解は下記で与えられる<sup>14)</sup>。

$$PI(s, t)_{\text{GEKS}} = \prod_{k=1}^M [P(s, k) \cdot P(k, t)]^{1/M} \quad (3)$$

この定理から、GEKS は、その基本となる Bilateral な物価指数に最も近い推移性を有する物価指数であることがわかる。基本の物価指数が何らかの望ましい性質を有していて、それが理想的な算式であるなら、その GEKS は、推移性という一貫性を確保することを優先したうえで、基本の物価指数に最も近いものなのだから、地域間の物価指数として望ましいもの、と議論することもできるだろう。なお、GEKS の基本となる指数が (T-1) を満たすならば、その GEKS も (T-1)、すなわち要素反転性を満たす。そのため、要素反転性をみたす指数として知られるフィッシャー指数が GEKS の基として良く用いられており、Penn World Table や ICP における指数算式として用いられている。GEKS の問題点は、(A-1) 等、重要な公理が成立しないことである。例えば、基本となる物価指数が (A-1) を満たし、かつアメリカと日本の価格が全て同じであっても、

GEKS ではアメリカと日本の物価は 1 にならない。日本とアメリカの物価が同じになるためには、全ての国で物価が同じであるか、日本とアメリカで価格と数量の両方が同じであるか、のいずれかの時であり、(A-1) に比べて非常に強い仮定が必要となる。基本の物価指数が位無差別性を持っていれば、その GEKS もまた位無差別性を有するが、単調性に関しては一般に GEKS は成立しない。また、2 地点間で常にラスパイレス指数がパーシェ指数を上回っていても、GEKS にすると、パーシェ指数がラスパイレス指数を上回ってしまうこともありうる。その点、Gini の指数を幾何平均に変更した (2) は、(A-1) を満たし、かつ推移性を満たすという点で GEKS よりも優れた性質を有している。GEKS の第 2 の問題は、後述する経済学的アプローチにおいて、正当化することができないことにある。GEKS のベースとなるフィッシャー指数等は経済学的アプローチと整合的であるが、その (3) 式のような変換を行うと経済理論と不整合となってしまうのである<sup>15)</sup>。

## 2.2 Geary-Kahmis 法

GEKS は (図 2-2) に対応していたが、地域間物価指数に一貫性を持たせるもう 1 つの考えは、(図 2-3) に基づくものである。ここでは、4 地点に加え、新たに、なんらかの中央となる地点を設け、全ての地域の物価指数は、その地点との相対値のみで定義されることになる。無論、中央の地を新たに設定せず、特定の国、地域を中心国と位置づけることも可

能である。日本の総務省による地域間価格差指数もこの方式で作成されている<sup>16)</sup>。このシステムで Multilateral 指数を定義すると、A と C の間の物価は、AX-XC という経路でのみ計算されることになり、AC という二地点を直接比較することは許されない。このような、仮想的な中心地域、あるいは経済全体を示す地域を設定し、そことの対比で物価を計算する手法には長い歴史があり、購買力平価の計算でかつて用いられていた Geary-Khamis(GK) 法もこの 1 つである<sup>17)</sup>。Geary-Khamis 法では、 $j$  国の物価水準 ( $PPP_j$ ) は、各商品の世界価格 ( $P_i$ ) という仮想的な価格との関係で、下記の式を満たすように定義される。

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^M PPP_j p_{ij} q_{ij}}{\sum_{j=1}^M q_{ij}}, PPP_j = \frac{\sum_{i=1}^N P_i q_{ij}}{\sum_{i=1}^N p_{ij} q_{ij}}.$$

$P_i$  と  $PPP_j$  は再帰的に定義されているので、計算するには、上記の式を反復させ、収束した先を PPP とすることになる。この式は常に収束することが知られており<sup>18)</sup>、GEKS が一般に採用されるまで、広く利用されていた<sup>19)</sup>。しかし、近年、GEKS に比べて GK 法は各種問題が指摘されており、Penn World Table を除き、現在ではあまり利用されていない<sup>20)</sup>。

### 2.3 その他の Multilateral 指数

新たに仮想的な中心地域を設けずに、任意の 2 地域間の物価がユニークに定まるように各地点をつなげることも可能である。(図 2-4)では、A と B をつなげるのは、A-D-C-B という連鎖を経由した経路のみであり、D と B もまた、D-C-B と、その繋がり方はユニークに定まる。従って、各地域間の物価指数を(図 2-4)のように Bilateral な指数を連鎖させていくことで定義すれば、A-B を直接比較することは許されないため、作られる地域間物価指数は内部で矛盾は発生しない。問題は、そのような地域間の連鎖をどのようにして作るか、である。Hill (1999)は、任意の 2 地域間の距離を何らかの方法で定義し、経済全体で、その距離の和が最小になるような経路、Minimum Spanning Tree(MST)を用いることを提唱している。MST はネットワーク理論で主に用いられている概念であり、対象地域が多いと MST の計算負荷は大きくなるものの、近年のコンピューターでは比較的容易に計算が可能である。無論、問題は、2 地域間の距離をどのように定義す

るか、であり、ラスパイレス・パーシェギャップ等、様々な指標が考案されている。Hill(1999)では、OECD 諸国の MST が描かれているが、そこでは日本は他の国とノルウェーを通じてのみ繋がっている。日本とアメリカの間には、ノルウェー、スイス、ドイツ、アイルランド、オーストラリア、カナダが存在している。アメリカと日本の間の物価は、これらの国を介して計算することになる。はたして、これが説得的であるか否かは評価が分かれるところであるが、MST の大きな問題点は、時期が異なると MST の構造が変化し、時系列方向で地域間物価指数が安定しないことにある。MST は理論的可能性として多くの注目を集めているが、現段階では実用的なものとは言えない。

Multilateral 指数のもう 1 つの形は、推移性を有するコブダグラス型の指数を活用することである。Abe and Rao(2019)は下記のようなコブダグラス型関数をまず考える。

$$P_{st} = \prod_{i=1}^N \left[ \frac{p_{st}}{p_{is}} \right]^{\phi_i} \text{ for all } s, t = 1, 2, \dots, M \quad (4)$$

次に、Bilateral な物価指数として、各種望ましい性質を有する指数の、2 地域  $s, t$  間の各商品の幾何平均におけるウェイトを  $\phi_i^s > 0$  とすると、下記の定理を導いている。

#### 定理 4

以下の最小化問題

$$\min_{\phi_i} \frac{1}{2} \sum_{s=1}^M \sum_{t=1}^M \sum_{i=1}^N (\phi_i^s - \phi_i)^2 \text{ s. t. } \sum_{i=1}^N \phi_i = 1, \quad (5)$$

の解は、下記で与えられる。

$$\hat{\phi}_i = \bar{\phi}_i = \frac{\sum_{t=1}^M \sum_{s=1}^M (\phi_i^s)}{M^2} \text{ for all } i. \quad (6)$$

この定理は、例えばトルンクピスト指数や Sato-Vartia 指数等、様々な視点で優れた指数と考えられる幾何平均物価指数がもしもあるならば、そのウェイトの単純平均を用いたコブダグラス型地域間物価指数は、オリジナルのウェイトからの距離が最小になる指数でもある、ということを示している。この指数の利点は、GEKS が満たさない(A-1)等を満たす点にある。また計算量も少なく、さらに、各地域の様々なウェイトを用い加重平均に拡張することも容易である。本稿の実証分析においては、この指数も用いることにする。

### 3. 経済学的アプローチ

経済理論を用いた物価指数は、1924年にコニユースがロシア語で記し、1939年の *Econometrica* に英訳されたその論文に始まるとされる。経済学的アプローチに基づく物価指数は (Cost of Living Index, COLI) 生計費指数と呼ばれるが、Konüs の真の生計費指数とも呼ばれる。

支出関数は、価格ベクトルと効用水準を所与とし、一定の効用を得るために必要な最低の支出水準である。効用関数を  $u(q_t)$  とし、 $t$  地域における効用水準を  $u_t$  とすると、支出関数と支出総額の間には下記の関係がある。

$$\begin{aligned} E(P_t, u_t) &= \min_{(q_t)} \left\{ \sum_{i=1}^N p_{ti} q_{ti} : u(q_t) \geq u_t \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ti} q_{ti}(P_t, E(P_t, u_t)) \end{aligned}$$

ただし、 $u_t = u(q_t)$  は消費ベクトル  $q_t$  がもたらす効用水準、 $P_t$  は地域における価格ベクトル、 $q_u(P_t, E(P_t, u_t))$  は需要関数である。ある数量ベクトル、 $q_f$  で評価された生計費指数は

$$PI(P_s, P_t, q_f) = \frac{E(P_t, u(q_f))}{E(P_s, u(q_f))} \quad (7)$$

で定義される。選好がホモセティックであれば、支出関数は効用関数と単位費用関数の積となるので、上式から効用関数に関する部分がなくなり、

$$\begin{aligned} PI(P_s, P_t, q_f) &= \frac{E(P_t, 1) \times u(q_f)}{E(P_s, 1) \times u(q_f)} \\ &= \frac{E(P_t, 1)}{E(P_s, 1)} \end{aligned}$$

と、数量ベクトルを指定せずとも物価指数を定義することが可能になる。この生計費指数で、2地点の支出比をデフレートすると、

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=1}^N p_{ti} q_{ti}}{\sum_{i=1}^N p_{si} q_{si}} / PI(P_s, P_t, q_f) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N p_{ti} q_{ti}}{\sum_{i=1}^N p_{si} q_{si}} \times \frac{E(P_s, 1)}{E(P_t, 1)} \\ &= \frac{E(P_t, u_t)}{E(P_s, u_s)} \times \frac{E(P_s, 1)}{E(P_t, 1)} \\ &= \frac{u_t}{u_s} \end{aligned}$$

と、2地点の効用水準の比となる。すなわち、支出比を生計費指数でデフレートして得られる実質支出

は、2地点間の厚生比を示しており、経済学上明確な解釈が可能なのである。すなわち、生計費指数から得られた実質支出が1を超えていれば、比較地の厚生は基準地の厚生よりも高いことになり、かつ、実質支出が大きいほど、厚生の水準も大きいことになる。実質消費支出額に明確な解釈を与える、という点が経済学的アプローチによる生計費指数の最大の利点であるとも言える。

生計費指数を物価指数と考える場合の第1の問題は、生計費指数の計算には、効用関数、あるいは支出関数の形状を正確に知ることが必要なことである。だが、この問題は、Diewert(1976)による最良指数 (Superlative Index) によりほぼ解決されている。経済学的アプローチでは、観察される価格と数量が、特定の (観察不能かつ時間や地域によって変わらない) 効用最大化問題から導出されたものであると仮定されている。すなわち、数量と価格は時間や地域に関わらず、同一の需要曲線上にあることになる。この時、Diewert(1976)は、良く知られた指数算式であるフィッシャー指数、ウォルシュ指数、トルンクビスト指数の3種類の指数算式は、任意の支出関数の2階の近似となる支出関数に対応する生計費指数に一致することを示した。この定義はわかりにくい、数量と価格が経済理論通りの動きをしていれば、フィッシャー指数やトルンクビスト指数は、局所的には、経済理論が予測する生計費指数とはほぼ一致するということになる。この性質のため、トルンクビスト指数やフィッシャー指数は、最良指数、あるいは生計費指数と呼ばれることもある。

生計費指数を物価指数と考える第2の、そして最大の問題は、生計費指数の定義域は価格のみであり、数量に依存していない点にある。生計費指数において、数量は価格と効用水準、あるいは所得水準から自動的に決定されており、数量や支出割合を観察する必要がない。また、生計費指数の定義(7)から明らかのように、この指数は、単調性、弱恒等性、1次同次性、および推移性を満たす<sup>21)</sup>。しかしながら、これらは全て、数量と価格が、生計費指数の背後にある選好関係に従い、厳密に需要関数上に存在することが前提である。最良指数として知られるトルンクビスト指数が推移性はおろか単調性も満たさないのは、この背後の仮定が成立していないことを示唆している<sup>22)</sup>。地域間の生計費指数に即して考えると、生計費指数の背後の仮定、2地点間で効用関数が同一である、という仮定は明らかに強すぎる。生計費



指数の仮定に即し、北海道と沖縄が同じ選好を有していると仮定すると、北海道と沖縄の住民は、同一の価格・所得に直面したら、同じ支出パターンになることになる。しかしながら、両地域における気候・食文化など、様々な違いにより、例え同一の価格ベクトルに直面した同一の所得水準の家計であっても、2地域における消費パターンは異なるものになるだろう。冒頭で紹介したヘストンとディートンもまた、世界各国における選好が異なることを踏まえ、選好が異なる際の生計費指数の計測が著しく困難であることを指摘しているのである。

### 3.1 選好が異なる時の生計費指数

2地点間で選好が異なる時、生計費指数を定義することは可能であろうか？ 選好が時点や地域間で異なることを許容するということは、季節性や気候の違いによる人々の消費行動の違い、およびそれに起因する生計費指数の違いをモデルで描写可能になり、生計費指数の対象範囲を著しく拡大するものである。

これまで、2種類の異質選好下の生計費指数が提案されている。 $s$ 地と $t$ 地における効用関数をそれぞれ $U_s, U_t$ とする。第1の生計費指数は、Cardinal indexであり、

$$\frac{E_t(p_t, U_t(x_t) = U)}{E_s(p_s, U_s(x_s) = U)}$$

とするものである。これは、Redding and Weinstein(2020)が提唱したものである。選好がホモセティックの場合は

$$\begin{aligned} \frac{E_t(p_t, U_t(q_t) = U)}{E_s(p_s, U_s(q_s) = U)} &= \frac{E_t(p_t, 1) U}{E_s(p_s, 1) U} \\ &= \frac{C_t(p_t)}{C_s(p_s)} \end{aligned}$$

となり、生計費指数は単位費用関数の比となる。Redding and Weinstein(2020)は効用関数が代替の弾力性一定(CES)の場合の上記の指数をCUPI(CES Unified Price Index)と名づけ、その後の分析の基礎としている。

第2の生計費指数はOrdinal indexであり、Balk(1989)が提案したものである。

$$\frac{E_t(p_t, U_t(q_R))}{E_s(p_s, U_s(q_R))}$$

とし、ある基準数量ベクトルでの効用水準を用いるものである。Balk(1989)は基準時の数量を用いることを提案しているが、その場合は推移性を満たさな

くなる。

Cardinal indexの問題は、Hicks and Allen(1934)のミクロ経済学の伝統である序数的効用理論から逸脱し、異なる効用関数の水準の比較を試みている点にある。異なる効用関数の水準を比較するためには、各効用関数をなんらかのルールで基準化する必要があるが、その基準化の方法を観察された需要システムから特定することは不可能である。Redding and Weinstein(2020)は、CES型効用関数に選好ショックを導入し、その選好ショックの単純幾何平均が常にゼロになるという条件を加えることで、異なる効用関数の水準の比較を行っている。問題は、幾何平均ではなく、算術平均のような他の平均算式を採用すると指数の値が変化してしまうことである<sup>23)</sup>。Ordinal indexの場合はそのような問題は生じないが、基準ベクトルをどう設定するか、という恣意性が残る。本稿では、Cardinal IndexにおいてはRedding and Weinstein(2020)のCUPIに従い、Ordinal Indexにおいては、全地域の数量の単純幾何平均を基準数量ベクトルとし、実証分析の際に用いることにする。具体的には、効用関数及び単位費用関数として下記を採用する。

$$\begin{aligned} U(p_t, \varphi_t; \sigma) &= \left( \sum_{i=1}^N (\varphi_{it} q_{it})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \\ C(p_t, \varphi_t; \sigma) &= \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_{it}}{\varphi_{it}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}. \end{aligned}$$

ただし、 $\sigma$ は代替の弾力性であり、これは全地域で共通とする。さらに、Redding and Weinstein(2020)に従い、下記のNormalization Conditionを課す<sup>24)</sup>。

$$\prod_{i=1}^N \varphi_{it} = 1.$$

すると、Redding and Weinstein(2020)のCUPIは

$$\begin{aligned} \ln CUPI(s, t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln p_{it} - \ln p_{is}) \\ &\quad - \frac{1}{1-\sigma} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln w_{it} - \ln w_{is}), \end{aligned}$$

と定義される<sup>25)</sup>。ただし、 $w_{it}$ は財 $i$ の $t$ 地における支出割合である。上記の生計費指数は、2地点間の標準的な物価指数

$$\begin{aligned} &\text{For all } p_s, q_s, p_t, q_t \in \mathbf{R}_+^N, \\ \ln CUPI(p_s, q_s, p_t, q_t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln p_{it} - \ln p_{is}) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{1-\sigma} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln w_u - \ln w_{is}),$$

とみなすことも可能である。一般に生計費指数の定義域は価格だけであり、数量は需要曲線上にあるとされるが、CUPI の場合は、任意の数量と価格の関数として、すなわち公理的アプローチにおける物価指数とみなすことができる。これは、 $s$  地において観察された数量と価格が全て需要曲線上にあるように選好パラメーターを設定することが可能であり、かつ、選好パラメーターは地点により異なるため、全ての観察された価格と数量が(同一ではない)需要曲線上にある、とみなして生計費指数を作成していることを意味する。Abe and Rao(2020)は、この CUPI が(A-2)、(A-3)、(A-4)及び(T-2)を満たすことを証明している。(A-1)、すなわち弱恒等性は満たさないが、これは、2 地点間で選好が異なるとする仮定から自然に生じるものであろう。CUPI の最大の問題は、代替の弾力性  $\sigma$  が 1 の時に定義することができず、かつ、1 に近い値をとると不安定になることである。集計対象が大分類のカテゴリー単位になると代替の弾力性は 1 に近くなることが予想される。したがって、CUPI は公理的にも経済学的にも望ましい性質を有するが、Cardinal Utility を採用したことによる既存の経済理論との親和性、外生的に課される Normalization Condition への依存性、さらに代替の弾力性が 1 から大きく離れた値でなければならない、という多くの欠点も有している。

Balk の Ordinal COLI は、選好が CES 型の場合は

$COLI - Balk$

$$= \frac{\left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_u}{\varphi_u} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \times \left( \sum_{i=1}^N (\varphi_{is} q_{is})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_{is}}{\varphi_{is}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \times \left( \sum_{i=1}^N (\varphi_{is} q_{is})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}$$

where  $q_{is} = \prod_{k=1}^M q_{ik}^{1/M}$ ,

で定義される。ここでは Reference ベクトルとして、Gini 型と同様に各都道府県の数量の単純幾何平均としている。この指数は CUPI よりも複雑であるが、選好が異なる場合の生計費指数となっており、経済学的に明確な解釈が可能であること、序数的効用に依拠していることなど、多くの利点がある。一方、その公理的な特徴は CUPI ほどには知られておらず、今後の研究が期待されるものである。

## 4. 日本の都道府県データへの応用

### 4.1 データ

#### 4.1.1 総務省の「消費者物価地域差指数」

物価の地域差が小さい要因の 1 つとして、総務省の地域差指数では考慮されていない「持家の帰属家賃」の影響が考えられる。本稿では、持家の帰属家賃を算入した上で、前節で解説した様々な地域差指数の推計を試みる。はじめに、図 1 を公表データから再現する方法について説明し、次に、持家の帰属家賃の推計方法、最後に、(持家の帰属家賃を含む)「総合」の地域差指数の推計結果を示す。

#### 4.1.2 『家計調査』の指数品目への分割統合

図 3 は、地域差指数の公表値(図 1)と筆者らが推計した地域差指数を比較したものである。両者は完全には一致していないものの、地域間の指数の大小関係はかなりの程度再現できているといえる。一方で、なぜ両者は完全に一致しないのだろうか。これ以降、公表値を完全に再現できない理由を交え、地域差指数を推計した手順を説明する。

本稿で使用する『家計調査』および『小売物価統計調査』はすべて、総務省のウェブサイトからダウンロードできる公表データである。品目別、県庁所在都市別の 3 年分(2013 年～2015 年)の月次データを使用する。価格指数を計算するためには、2 つの調査を突合する必要がある。以下に品目レベルでの突合方法について説明する。

2015 年基準の消費者物価指数(以下、CPI)は 585 品目から成る<sup>26)</sup>。CPI は『家計調査』から得られる支出データと、『小売物価統計調査』から得られる価格情報から作成されているが、2 つの調査の品目数がちょうど 585 である、というわけではない。例えば、2015 年の『家計調査』の品目数は 512 品目であり<sup>27)</sup>、CPI の品目数である 585 を大きく下回っている。調査品目数のギャップは、総務省による「分割統合」という作業で埋められている。この点について、パンを例に説明する(図 4)。パンの指数品目は「食パン」、「あんパン」、「カレーパン」の 3 つであり、『小売物価統計調査』ではこれら 3 つの品目に対応する価格データが収集されている。一方、『家計調査』のパンに関する支出項目は「食パン」と「他のパン」の 2 つのみである。上述した分割統合とは、家計調査の支出データを指数品目へ按分することを指す。具体的には、図 4 の 1/10、5/10、4/

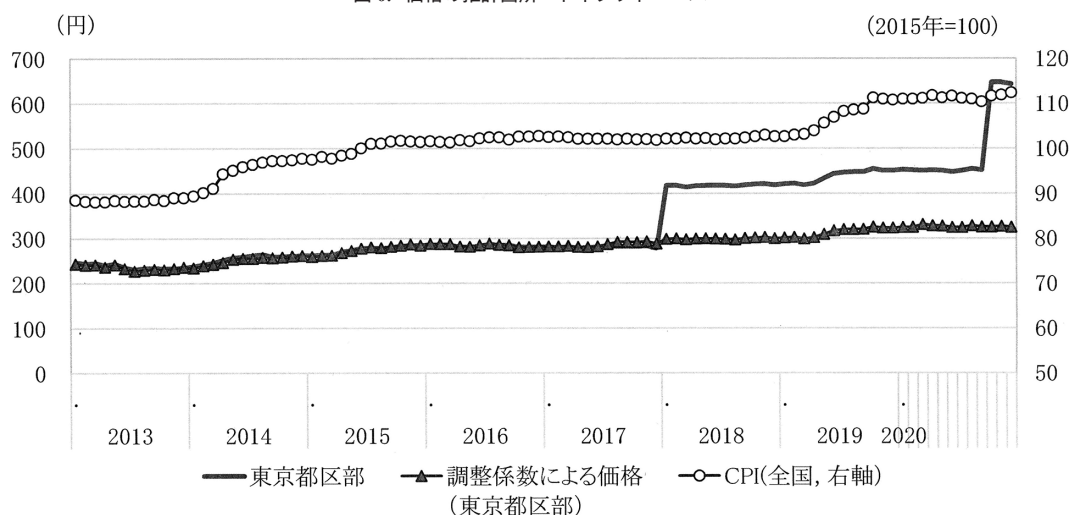


表 1. 銘柄変更の遷移：トイレットペーパー

| 適用期間                  | 基本銘柄                                                                 | 単位     |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------|--------|
| ～2017 年 12 月          | 再生紙 100%, 白, [長さ]55 m, 60 m,<br>2 枚重ね 27.5 m 又は 2 枚重ね 30 m, 12 ロール入り | 1 パック  |
| 2018 年 1 月～2020 年 9 月 | パルプ 100%, 白, [長さ]50 m, 60 m,<br>2 枚重ね 25 m 又は 2 枚重ね 30 m, 12 ロール入り   | 1 パック  |
| 2020 年 10 月～          | パルプ 100%, 白, [長さ]50～60<br>又は 2 枚重ね 25～30 m, 12 ロール入り                 | 1000 m |

出所) 総務省『小売物価統計調査』「毎月の調査品目及び基本銘柄」より抜粋作成。

図 6. 価格の推計箇所：トイレットペーパー



た。

#### (A) 調査銘柄の「容量変化」が公表されているケース

総務省が公表している「これまでの調査品目及び基本銘柄の新旧対照表」<sup>30)</sup>において、「単位」の列に容量変更が明記されている場合は、容量単価を計算し、容量の変更による価格の変化分を調整した。

#### (B) (A)以外のケース

容量調整以外の価格の調整方法について、トイレットペーパーを例に説明する。表 1 は、トイレットペーパーの基本銘柄の遷移をまとめたものである。また、図 6 は東京都区部のトイレットペーパー価格を示している。図中の「調整係数による価格」については後述する。表 1 によれば、トイレットペーパーは 2020 年 10 月から、価格の単位が 1 パックから 1000 メートルに変更になっている。この変更にともない、図 6 では 2020 年 10 月に価格が大きくジャンプしていることが読み取れる。なお、価格のジャンプは 2018 年 1 月にも観察されており、これは「再生紙 100%」から「パルプ 100%」への銘柄変更

によるものである(表 1)。つまり、容量以外の品質変化が生じているわけであるが、再生紙とパルプの品質変化を筆者らが推計することは困難である。そこで、本稿では下記の方法で価格の調整を実施した。

$p_{jt}$  を  $t$  期の都市  $j$  における(調整前の)トイレットペーパー価格、2015 年の 47 都市のトイレットペーパーの単純平均価格を ( $p_{2015}$ ) と表す。ここで、トイレットペーパーに関する月次の CPI(全国, 2015 年基準)を利用し、 $t$  期における 47 都市の単純平均価格を以下のように推計する。

$$\hat{p}_t = p_{2015} \times \frac{CPI_{全国}^t}{CPI_{2015}^{全国}} \quad (8)$$

次に、各  $t$  期の単純平均価格  $\hat{p}_t$  と(8)の比率を計算し、 $ADJ_t$ (調整係数)と定義する。

$$ADJ_t = \frac{\hat{p}_t}{p_t} \quad (9)$$

最後に、 $p_{jt}$  に調整係数を掛け合わせ、調整後の価格  $p'_{jt}$  とする。

$$p'_{jt} = ADJ_t \times p_{jt} \quad (10)$$

上記の方法で推計された価格が図 6 の「調整係数



表 2. 調整係数を用い、一部の価格を推計した品目

| code | 品目名       |
|------|-----------|
| 2041 | ワイン(国産品)  |
| 2042 | ワイン(輸入品)  |
| 3104 | 給湯機       |
| 3176 | 水道工事費     |
| 4032 | 電気掃除機     |
| 4271 | 布団カバー     |
| 4302 | 皿         |
| 4362 | マット       |
| 4413 | トイレットペーパー |
| 4501 | 家事代行料     |
| 6061 | はり薬       |
| 6091 | 漢方薬       |
| 9111 | ボールペン     |
| 9156 | ゲームソフト    |
| 9682 | 口紅 B      |
| 9751 | 腕時計       |

による価格」である。同方法で価格の調整を行った品目は表 2 の通りである。

#### (C) 価格データ自体が存在しないケース

(C-1) 支出に季節性のある品目、あるいは、出回り月が限定される品目については、価格調査自体が実施されていない。これらのケースについては、前月の価格で欠損月を補間した。

(C-2) 調査銘柄の新設・廃止等が原因で、ある年について 12 カ月すべての価格が存在しない場合は、都市別・品目別に 2015 年の(12 カ月)単純平均価格を算出し、CPI(2015 年基準、都市別・中分類)を掛け合わせ、欠損月を補間した。なお、使用している CPI は品目レベルのものではなく、上位の中分類指数である点に注意されたい。これは、都市別には品目別の CPI が公表されていないためである。

(C-3) (C-2)に該当しないケース、すなわち、年の途中から価格調査が開始されている品目については、(C-2)と同様の方法で価格データを補間した。

図 7 は、上記の(C-1)から(C-3)の補間結果について、「かつお」の例を示している。かつおは、1 年のうち、11 月から 2 月までは価格が調査されていない(上述した(C-1)のケースに該当する)。さらに、2017 年以降は、「かつお」が調査品目から外れ、1 年を通して価格データがまったく存在しない((C-2)のケースに該当する)。最後に、2013 年の 1 月、

2 月は「前月分」のデータが存在しないため、(C-3)のケースに該当する<sup>31)</sup>。

以上の方法で、都市別・品目別価格がバランス・パネルになるように価格データの欠損部分を補間した<sup>32)</sup>。なお、価格データを整備する際に用いた出所は表 3 の通りである。品目数の合計は 578 であるが、10 の品目については、都市別の価格ではなく『小売物価統計調査』の「全国共通価格」を用いている。さらに、76 品目については CPI の「全国」を利用している。表 4 は、(C-1)、(C-2)、(C-3)の方法でデータを推計した件数を示す。

以上をまとめると、図 3 における公表値と独自推計が乖離する原因の 2 つ目は、本稿で使用する価格データが総務省の保有する価格情報と完全に一致しない点である。加えて、総務省の地域差価格指数は全国平均価格が基準であるが、本稿では 47 都市の平均価格が基準である点も乖離の一因と考えられる<sup>33)</sup>。

#### 4.1.4 持家の帰属家賃の推計

次に、本稿における「持家の帰属家賃」の推計方法を説明する。

総務省の地域差指数では「持家の帰属家賃」は対象外であるが、CPI では「持家の帰属家賃」を含む「総合」指数が公表されている。図 8 は CPI における 47 都市の「持家の帰属家賃」のウェイト(1 万分比)を示す<sup>34)</sup>。最大値は東京都都区部の 1854、最小値は福岡の 1029 であり、地域間でかなりのばらつきがあることが観察される。なお、「持家の帰属家賃」の全国におけるウェイトは 1499 である。

本稿では、図 8 のウェイト(都市  $i$  のウェイトを  $w_i$  とする。)から、以下の方法で都市別の「持家の帰属家賃」の金額を推計する。

$x_i$ : 持家の帰属家賃(年間)

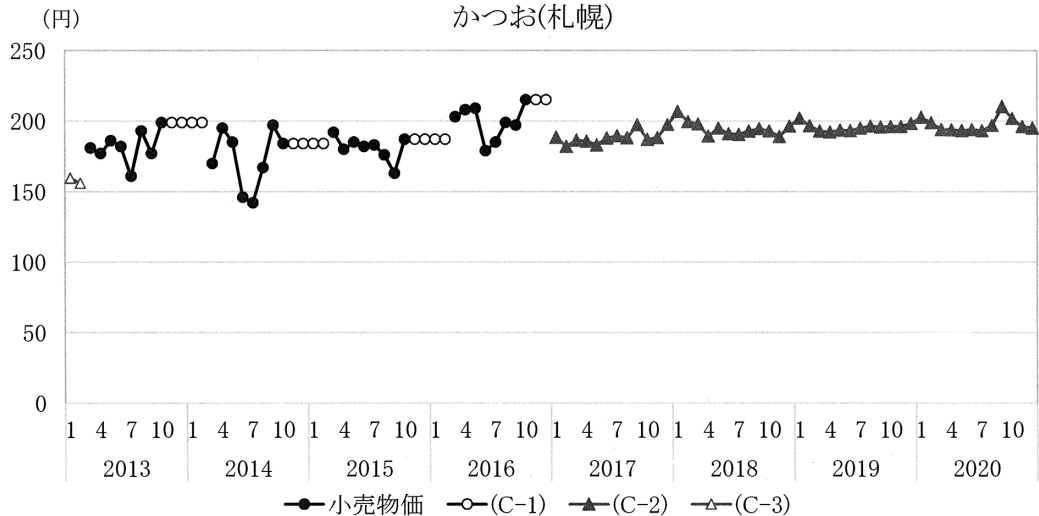
$S_i$ : 消費支出合計額(年間、2015 年 1 月～12 月の家計調査から計算)

$$w_i = \frac{x_i}{S_i + x_i}, x_i = \frac{w_i}{1 - w_i} S_i \quad (11)$$

(11)の第 2 式を 12 で割り、1 か月あたりの「持家の帰属家賃」とする。図 9 が推計結果である。最大値は東京の 71,511 円、最小値は那覇の 29,849 円である。

#### 4.2 推計結果

現在、国際的に広く利用されている地域間物価指

図 7. 価格データの補間推計の例  
かつお(札幌)

注) 図中の(C-1), (C-2), (C-3)は以下の方法で価格情報を補間.

(C-1) 小売物価が欠損でない前期の値で補間.

(C-2) ある年について, 12 カ月すべての価格が欠損であるケース(調査品目の新設・廃止等が原因)

2015年の都市別・品目別の平均価格とCPI(都市別・中分類)から推計した値で補間.

(C-3) (C-2)に該当しない欠損のケース.

(C-2)と同じく, 2015年の都市別・品目別の平均価格とCPI(都市別・中分類)から推計.

表 3. 価格データの出所

| No. | 調査名          | 対象地域                  | 品目数  |
|-----|--------------|-----------------------|------|
| 1   | 小売物価統計調査     | 県庁所在都市(47 都市)         | 502  |
| 2   |              | (うち, 2015 年以降は全国統一価格) | (10) |
| 3   | 消費者物価指数(CPI) | 全国                    | 76   |

品目数の合計 578

表 4. バランス・パネルにした場合のデータの補間状況

| year  | 小売物価      | C-1     | C-2    | C-3   | Total     |
|-------|-----------|---------|--------|-------|-----------|
| 2013  | 290,953   | 12,861  | 17,580 | 4,598 | 325,992   |
| 2014  | 290,900   | 17,247  | 17,568 | 277   | 325,992   |
| 2015  | 307,484   | 17,562  | 660    | 286   | 325,992   |
| 2016  | 307,466   | 17,648  | 660    | 218   | 325,992   |
| 2017  | 307,153   | 17,462  | 1,200  | 177   | 325,992   |
| 2018  | 307,148   | 17,435  | 1,200  | 209   | 325,992   |
| 2019  | 307,107   | 17,512  | 1,200  | 173   | 325,992   |
| 2020  | 305,374   | 18,161  | 1,788  | 669   | 325,992   |
| Total | 2,423,585 | 135,888 | 41,856 | 6,607 | 2,607,936 |
| %     | 92.8      | 5.2     | 1.6    | 0.3   | 100.0     |

注 1) 表中の(C-1)~(C-3)は以下の方法で価格情報を補間.

(C-1) 小売物価が欠損でない前期の値で補間.

(C-2) ある年について, 12 カ月すべての価格が欠損であるケース(調査品目の新設・廃止等が原因).

2015年の都市別・品目別の平均価格とCPI(都市別・中分類)から推計した値で補間.

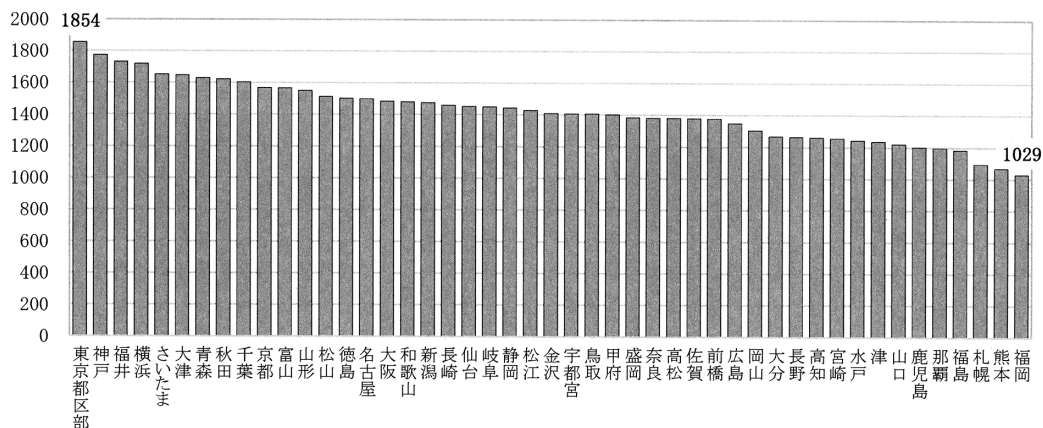
(C-3) (C-2)以外の欠損のケース.

(C-2)と同じく, 2015年の都市別・品目別の平均価格とCPI(都市別・中分類)から推計.

注 2)  $578(\text{品目}) \times 47(\text{都市}) \times 12(\text{か月}) = 325,992$ .

図 8. 「持家の帰属家賃」のウェイト(県庁所在都市, 万分比)

(万分比)

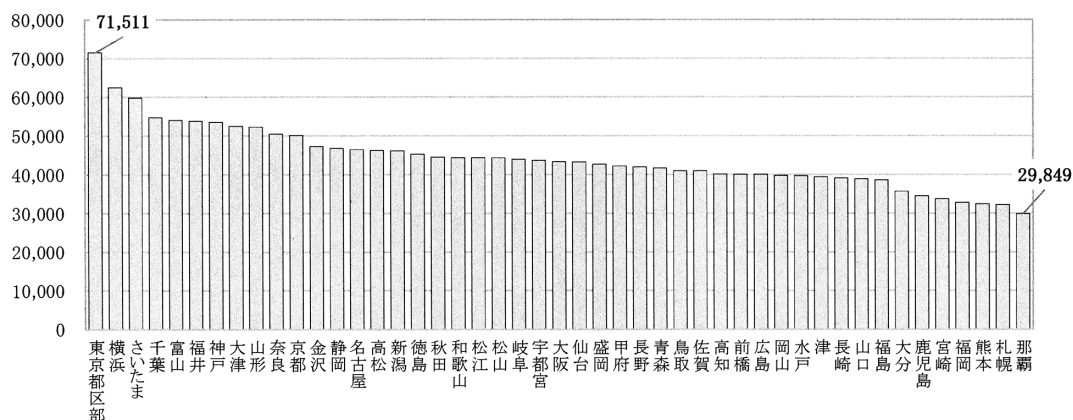


出所) 総務省『消費者物価指数(2015年基準)』。

注) 「総合」のウェイト(10,000)から「持家の帰属家賃を除く総合」のウェイトを引いて算出。

図 9. 持家の帰属家賃(1 か月あたり)の推計値

(円)



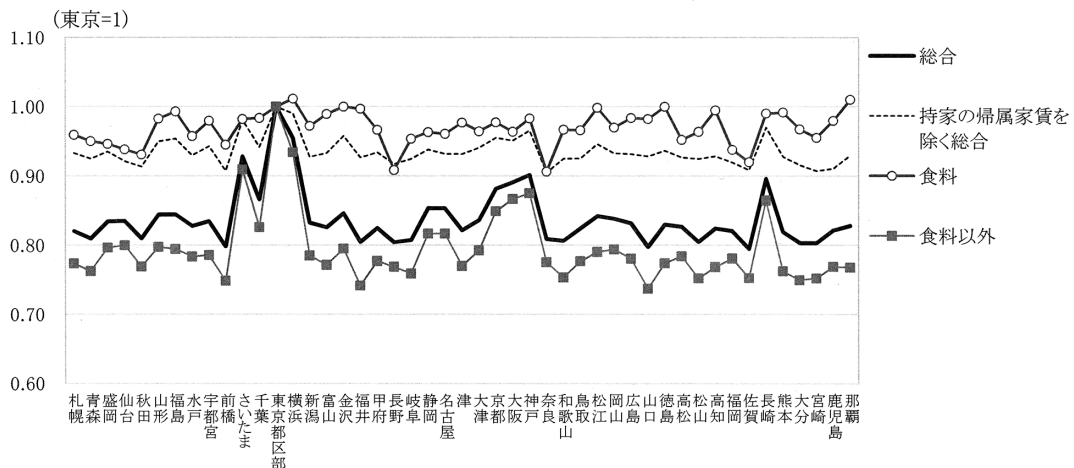
データ出所) 総務省『消費者物価指数(2015年基準)』および、総務省『家計調査』より推計。

数の算式は GEKS-フィッシャーであり、その指数算式を用いた都道府県間物価指数は図 10 にまとめられている。なお、指数の値は東京が 1 になるよう基準化している。食料品の都道府県間価格差は少なく、食料以外の差は大きい。その結果、総合値では東京と他の地域の間で最大で 20% ポイントという大きな相違が生じている。しかしながら、その差の大部分は持ち家の帰属家賃で生じており、持ち家の帰属家賃を除いた場合、東京と他の県の差は、最大でも 10% ポイント弱と、ほぼ半減する。

図 11-1 は主要指数、すなわちラパイレス、パーシェ、フィッシャー、ジェボンズ、及び GEKS のフィッシャー指数の 47 都道府県別の指数を表している。なお、GEKS 以外の指数は全て東京を基準と

したものである。まず上段の食料支出に関しては、各指数算式間での差はほとんどなく、また都道府県間の差も小さな範囲に収まっている。最大値の横浜と最小値の奈良の間の差は 10% ポイント程度である。一方、非食料品支出になると指数算式間の差は大きくなり、特にジェボンズ指数、すなわち単純幾何平均指数は他の指数と際立って異なる値となっている。他の指数も、ラスパイレスとパーシェの間のギャップは最大で 10% ポイント程あり、無視できない大きさである。一方、フィッシャー指数とその GEKS の間の差は小さく、最大でも 1% ポイント程度の差にとどまっている。都道府県間の差は非常に大きく、最大の東京に比べて最小の山口は 26% ポイントも低い値となっている。下段はこれらの集計

図 10. 推計対象別・指数の比較(GEKS-Fisher, 2015 年)



出所) 総務省『家計調査』, 総務省『小売物価統計調査』より独自推計。

となる総合の結果を示しており、非食料品ほどではないにしろ、指数算式の差、および都道府県間の差が無視できないものであることを伺うことが出来る。

図 11-2 は、主要算式以外の指数算式の結果をまとめたものである<sup>35)</sup>。図 11-1 とおおよそ同様の結果となっており、食料品に関しては指数算式間の差はほとんど生じないが、非食料品に関しては、CUPI がジェボンズ指数と同様に、他の指数と大きく異なる結果となっている。CUPI は生計費指数として明確な経済学的根拠を有する指数であるが、そこで採用されている Normalization Condition の影響により、弾力性が大きい場合はジェボンズ指数とよく似た結果となってしまうのである。他の指数算式間では、Abe-Rao 指数が比較的高く、Gini 指数が比較的低い値となっている。そして Balk および Geary-Khamis がそれらの間にあるが、それらの大小関係は絶対的なものではなく、県によっては大小が逆転している。代表的な地域間指数である Geary-Khamis と GEKS-フィッシャーの間には平均して 0.84% ポイント、最大で 1.3% ポイント程度の差が生じており、決して無視できない大きさの相違である。

## 5. 結語

本考察では、近年急速に進展しつつある地域間物価指数の理論に関して展望すると共に、日本の都道府県別データを用い、それら指数算式の違い、および現行の公式統計では含まれていない帰属家賃の影響も加味した推計を行った。その結果、食料に関しては指数算式間でも地域間でも物価の相違はほとん

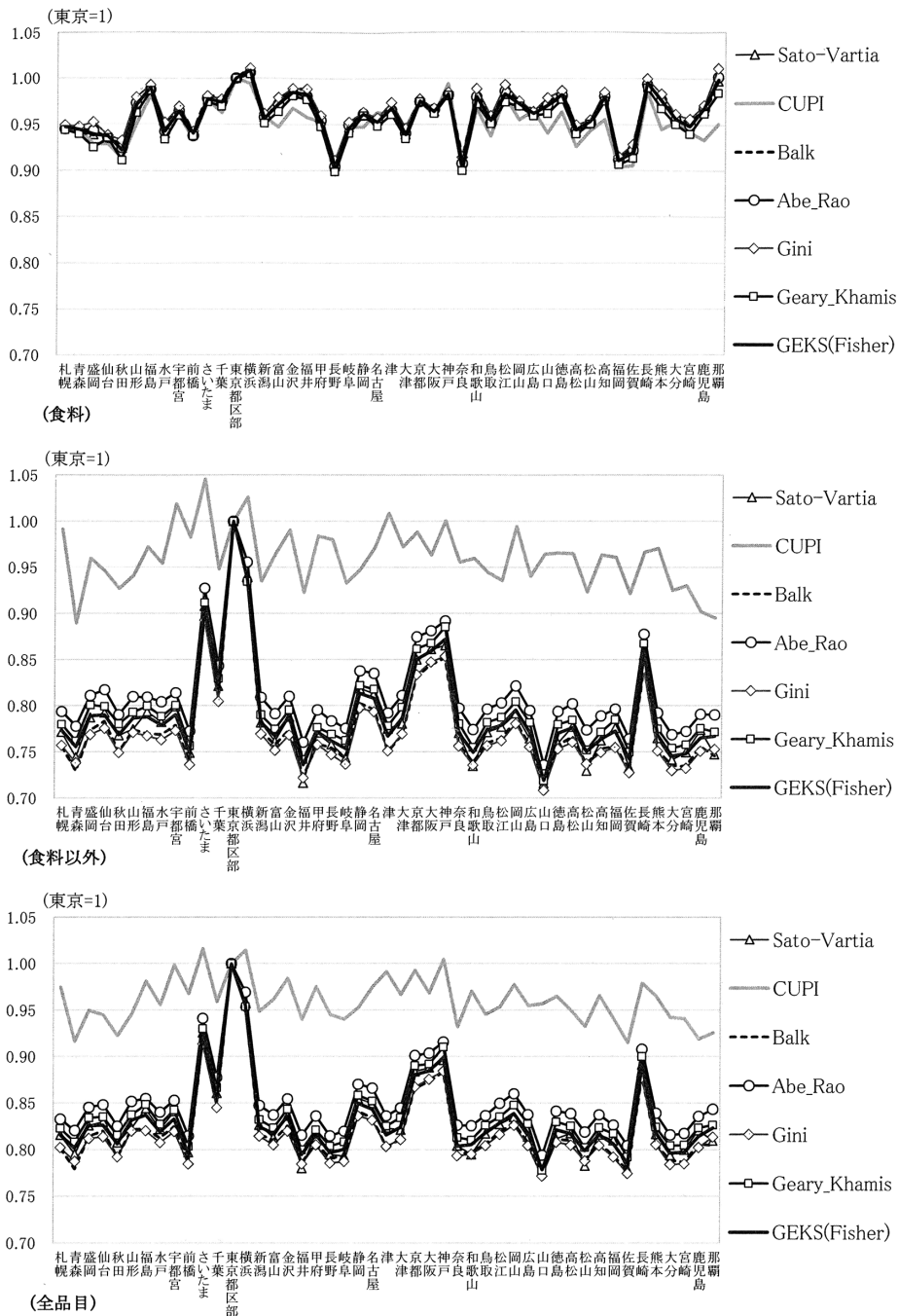
ど生じないが、非食料に関しては指数算式間でも、地域間でも大きな相違が生じていた。その違いの大部分は帰属家賃の影響によるが、指数算式間の違いも無視できないものがあり、地域間物価指数を用いて分析を行う場合、現行の公式統計と今回作成した指数では、その結果は異なってくるだろう。現行の公式統計は、帰属家賃を除いている以外にも、指数算式が国際標準と異なるものになっており、デフレーターとして用いた場合、得られる「実質」消費支出、あるいは「実質」所得・賃金に経済学的な解釈を与えることが困難である。また経済厚生 の尺度として地域間物価指数を用いる場合、帰属家賃の影響を除くことは経済学的には正当化しにくい。今回、帰属家賃を含み、かつ、多数の指数、具体的には経済理論との整合性を重視した CUPI および Balk 指数、国際標準に準拠したフィッシャー型の GEKS、広く応用分析で用いられる Sato-Vartia 指数に準拠した Abe-Rao 指数、GEKS の問題点である Weak Identity の欠如を解決する Gini 指数、かつての国際標準で、その理論的特性が広く知られている Geary-Khamis 指数等、多様な指数を計算した。多様な指数の中で、全てにおいて優れている指数は存在せず、それぞれ利点と欠点を有している。それら多数の指数の中から、分析目的に最も適した指数を選択することで、分析の精度を向上させることが可能になると筆者は考えている。

今回の分析においては、総務省が公表しているデータに基づいて指数を計算している。残念ながら、公開情報のみからでは公式統計と完全に一致する指数を作ることはできず、非公表の様々な情報が残さ





図 11-2. 地域差指数(2015 年, 上段: 食料, 中段: 食料以外, 下段: 全品目)



県在住の人が東京を旅行した場合のデフレーターは何を採用するべきかに関しては, 多くの論点があるだろう。そもそも, 分析単位として都道府県が適切であるのか否かも検証すべきものであり, より狭い,

市区町村単位で生計費指数が異なることもありうる。地域間移動の考慮も含め, より多様な人間の行動を許容した地域間物価指数の構築は, 今後の課題としたい。

(\*\*一橋大学経済研究所  
・ 四国大学経営情報学部)

## 注

\* 本論文に対し、清水千弘・作間逸雄両氏から多くの貴重なコメントを頂いた。また、経済研究所定例研究会においてもいくつかの示唆を頂いた。本研究遂行にあたり、阿部は科学研究費補助金(19H01467, 20H00082)、稲倉は科学研究費・研究活動スタート支援(19K23223)の補助を受けた。ここに感謝したい。

1) 集計理論の歴史的展開に関しては、その分野を牽引してきたクラインとゴーマンによる論文、Klein(1993)、Gorman(1996)が参考になる。

2) Selvanathan and Rao(1994)とBalk(2008)は(1)初期(原子的: Atomistic)、(2)公理(テスト)的、(3)経済学的、そして(4)確率的、と4種類としている。2004年発行のCPIマニュアルでは、(1)公理(テスト)的、(2)経済学的、そして(3)確率的、の3種類である。

3) フリートウッドの指数に関してはAfriat(1977)、デュト以降の指数の歴史に関してはBalk(2008)が詳しい。

4) 購買力平価の計測において、世界銀行による確率的アプローチの活用方法に関してはWorld Bank(2013)を参照せよ。

5) 確率的アプローチと明記していなくとも、回帰分析をベースに物価指数を求めるHamilton(2001)やHandbury and Weinstein(2015)も確率的アプローチによる指数作成と言えるだろう。

6) 確率的アプローチはインドロ・エッジワーズが20世紀初頭にかけて精力的に分析していたが、その後50年以上忘れられていた。20世紀末に、確率的アプローチの再興の立役者となった二人の著者による本、Selvanathan and Rao(1994)は、このアプローチに関するわかりやすい入門書となっている。

7) 単調性と1次同次性から、下記の物価指数は $s$ 地を基準とし $t$ 地の価格が比較的高いか低いか示すものであることがわかるだろう。

8) CPIマニュアルは国際労働機構や国際通貨基金、世界銀行等多くの国際機関が共同で製作している物価指数構築に関する、各国の統計作成者を対象としたマニュアルであり、最新版は理論編と実務編に分かれ、実務編は2020年に発行されている。ここでは、その前に出版された2004年版を参考にしている。

9) 公理的アプローチはFisher(1922)以降、急速に発展した。特にFrisch(1936)による展望論文は、以下の2つの公理における問題点を明らかにし、多くの研究がなされた。公理的アプローチの金字塔はEichhorn and Voeller(1976)であり、それ以降の指数理論の進展に多大な影響を与えている。

10) Funke, *et al.*(1979)とBalk(2008)に定理2の証明、および、Eichhorn and Voeller(1976)に定理1をさらに一般化させたものの証明が載っている。

11) Fisher(1922)は、推移性の代わりに時点反転性(国反転性)という公理を導入し、いわゆるフィッシャー指数が理想算式であると論じているが、推移性を

みたさなくてよい理由についてほとんど論じておらず、Samuelson and Swamy(1974)により強く批判されている。

12) この指数は、Fixed Basket と呼ばれる指数の中で、(T-2)と(T-3)を満たす唯一の指数であることがAbe and Rao(2022)で示されている。

13) これはFisher(1922)における時点反転性と同一公理である。

14) この定理の証明はRao and Banerjee(1986)に掲載されている。

15) GEKSの経済理論との不整合性に関してはNeary(2004)を参照せよ。

16) 各都道府県の物価を全国平均価格からの乖離でとらえる際、全国平均価格の定義が問題となる。この点に関しては宇南山(2002)と美添(2002)が独自の算式を提案している。

17) 倉林義正、作間逸雄両氏のGK法に関する一連の研究はこの分野で広く引用されており、その成果はKurabayashi and Sakuma(1990)にまとまっている。さらに、作間・市岡・牧野(2015)、(2016)はGK法を用いた日本の都道府県間物価指数を計算している。

18) 詳細はRao(1971)、およびRao and Banerjee(1986)を参照されたい。

19) なお、上記のシステムは自由度が1であるため、実際に反復計算をする際には、例えばある地域のPPPを常に1にする、などの基準化が必要である。

20) GK法の最大の問題点は(T-3)が満たされないことである。他のGK法の問題点に関してはAckland *et al.*(2013)を参照されたい。また、Penn World TableにおけるGK法の活用に関してはFeenstra *et al.*(2015)が詳細に解説している。

21) 効用関数は各商品の計測単位に依存して定義されることが多い。そのため、商品の計測単位が変更された場合、効用関数もまたそれに合わせて変化させるというプロセスを導入しないと、位無差別性は一般に確保されない。

22) トルンクピスト指数、及び代替の弾力性が一定(CES)の時の効用関数に対応した生計費指数であるSato-Vartia指数が単調性を満たさないことに関してはReinsdorf and Dorfman(1999)を参照せよ。

23) Abe and Rao(2020)は、この基準化条件のCharacterizationを行い、基準化条件をユニークに決定する公理を導いている。

24) Redding and Weinstein(2020)では、taste parameterの幾何平均を定数とし、1に限定していないが、定数である限りCUPIの値は同じとなる。

25) 詳細はRedding and Weinstein(2020)を参照せよ。

26) 585品目のうち4品目(とうが、ボーク缶詰、ゆで沖縄そば、沖縄そば(外食))は沖縄でのみ調査されている。また、地域差指数には含まれていないが、「持家の帰属家賃」も585品目に含まれている。

27) 小計等を除く品目数。なお、「他の麺類」「他の鮮魚」等、特定の品目に割り振られていない項目も512品目に含まれる。

28) 按分比率の情報は、総務省「2015年基準 消費者物価指数の解説5 家計調査品目の指数品目への分割

統合」で公表されている。

URL: <https://www.stat.go.jp/data/cpi/2015/kaisetsu/index.html>

29) 東京都区部を除き、品目レベルでのCPIは公表されていないため、総務省が各都市、各品目にどのような品質調整を実施しているのか、完全に把握することは非常に困難である。

30) 総務省ウェブサイト「小売物価統計調査(動向編)調査結果」

URL: <https://www.stat.go.jp/data/kouri/doukou/3.html>

31) 2013年の1月に前月の情報が存在しないのは、本稿で整備したデータの起点が2013年1月であることが原因である。

32) 本稿ではバランスパネルデータになるようにデータを加工したが、そもそも取引されている財が地域や時点により異なる場合、その情報を反映して物価指数を構築するべき、と考えることも可能である。財の種類が異なる場合の物価指数はFeenstra(1994)が有名であるが、この手法は効用関数に強い仮定を導入する必要があり、かつ需要要因により財がなくなるケースを分析できない。これは現在の指数理論の中心課題の1つである。

33) 地域差指数は、2013年前後で基準価格が異なる。2013年までは、51都市平均が基準価格であったが、2014年以降は全国平均が基準価格になっている。なお、『家計調査』で公表されている47都道府県庁所在地の世帯数ウェイトの合計は、全国の10000に対し、3251である(2015年1月調査)。

34) 都市別の「持家の帰属家賃」に関するウェイトは公表されていない。ただし、都市別の指数の「総合」から「持家の帰属家賃を除く総合」を引いたものが「持家の帰属家賃」のウェイトとなる。この計算方法については、総務省統計局のご担当者からご教授いただいた。

35) なお、 $\sigma$ はFeenstra(1994)の方法で推計した。その結果、全品目： $\sigma=4.057189$ ，食料： $\sigma=3.584906$ ，食料以外： $\sigma=4.26849$ であった。

## 参考文献

- 作間逸雄・市岡修・牧野好洋(2015)「PPP計測のCGE接近(1)」, *Economic Bulletin of Senshu University*, Vol. 49, No. 3, pp. 1-17.
- 作間逸雄・市岡修・牧野好洋(2016)「PPP計測のCGE接近(2)」, *Economic Bulletin of Senshu University*, Vol. 50, No. 3, pp. 1-23.
- 宇南山卓(2002)「消費者物価のクロスセクション比較について——全国物価統計調査の指数算式について——」『*経済研究*』第53巻第4号, pp. 337-347.
- 美添泰人(2002)「全国物価統計調査の算式について——宇南山論文へのコメント——」『*経済研究*』第53巻第4号, pp. 348-350.
- Abe, N. and D. S. P. Rao (2019) "Multilateral Sato—Vartia Index for International Comparisons of Prices and Real Expenditures," *Economics Letters*, Volume 183, 108535.

- Abe, N. and D. S. P. Rao (2020) "Generalized Logarithmic Index Numbers with Demand Shocks—Bridging the Gap between Theory and Practice," *RCESR Discussion Paper Series* DP20-1.
- Abe, N. and D. S. P. Rao (2022) "Towards a simplified approach to international price comparisons: A case for the Multilateral Walsh Index," *RCESR Discussion Paper Series* DP22-1.
- Ackland, R., S. Dowrick, and B. Freyens (2013) "Measuring Global Poverty: Why PPP Methods Matter," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 95, No. 3, pp. 813-824, July.
- Afriat, S. N. (1977) *The Price Index*, Cambridge University Press.
- Balk, B. (1989) "Changing Consumer Preferences and the Cost-of-Living Index: Theory and Nonparametric Expressions," *Journal of Economics, ErZeitschrift für Nationalökonomie*, Vol. 50, No. 2, pp. 157-169.
- Balk, B. (2008) *Price and Quantity Index Numbers, Models for Measuring Aggregate Change and Difference*, Cambridge University Press.
- Deaton, A., and Heston, A. (2010) "Understanding PPPs and PPP-based National Accounts," *American Economic Journal: Macroeconomics*, Vol. 2, No. 4, pp. 1-35.
- Diewert, W. E. (1976) "Exact and Superlative Index Numbers," *Journal of Econometrics*, Vol. 4, Issue 2, pp. 115-145.
- Eichhorn, W. and J. Voeller (1976) *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag.
- Feenstra, R. (1994) "New Product Varieties and the Measurement of International Prices," *American Economic Review*, Vol. 84, No. 1, pp. 157-177.
- Feenstra, R., Inklaar, R., and Timmer, M. (2015) "The Next Generation of the Penn World Table," *American Economic Review*, Vol. 105, No. 10, pp. 3150-3182.
- Fisher, I. (1922) *The Making of Index Numbers*, Houghton Mifflin Company.
- Frisch, R. (1936) "Annual Survey of General Economic Theory: The Problem of Index Numbers," *Econometrica*, Vol. 4, No. 1 (Jan. 1936), pp. 1-38.
- Funke, H., G. Hacker and J. Voeller (1979) "Fisher's Circular Test Reconsidered," *Swiss Journal of Economics and Statistics*, Vol. 115, IV, pp. 677-688.
- Gini, C. (1931) "On the Circular Test of the Index Number," *Metron*, Vol. 4, No. 2, pp. 3-24.
- Gorman, M. W. (1996) "Klein Aggregates and Conventional Index Numbers," in C. Blackorby and A. F. Shorrocks (eds) *Separability and Aggregation: The Collected Works of W. M. Gorman*, Volume I, Clarendon Press.
- Hamilton, B. W. (2001) "Using Engel's Law to Estimate CPI Bias," *The American Economic Review*, Vol. 91, No. 3, pp. 619-630.
- Handbury, J. and D. E. Weinstein (2015) "Goods Prices and Availability in Cities," *Review of Econom-*



- ic Studies*, Oxford University Press, Vol. 82, No. 1, pp. 258–296.
- Hicks, J. R. and R. G. D. Allen (1934) “A Reconsideration of the Theory of Value, Part 1,” *Economica*, Vol. 1, No. 1, pp. 52–76.
- Hill, R. (1999) “International Comparisons Using Spanning Trees,” in Alan Heston and Robert E. Lipsey ed. *International and Interarea Comparisons of Income, Output, and Prices*, University of Chicago Press, pp. 109–120.
- International Labour Organization (ILO), Eurostat, IMF, OECD, World Bank, and the UN. (2004) *Consumer Price Index manual: Theory and practice*, ed. Peter Hill. Geneva: International Labour Organization.
- Klein, L. R. (1993) “What is macroeconomics?” in H. Barkai, S. Fischer, & N. Livatan (Eds.), *Monetary Theory and Thought* (pp. 35–51). London: Macmillan.
- Konüs, A. A. (1924) English Translation “The Problem of the True Index of the Cost of Living,” *Econometrica*, Vol. 7, No. 1, (Jan. 1939), pp. 10–29.
- Kurabayashi, Y., and I. Sakumra (1990) *Studies in International Comparisons of Real Product and Prices*, Tokyo: Kinokuniya.
- Neary, J. (2004) “Rationalizing the Penn World Table: True Multilateral Indices for International Comparisons of Real Income,” *The American Economic Review*, Vol. 94, No. 5, pp. 1411–1428.
- Rao, D. S. P. (1971) “On the Existence and Uniqueness of a New Class of Index Numbers,” *The Indian Journal of Statistics*, Series B, Vol. 33, No. 3/4, pp. 341–354.
- Rao, D. S. P. and K. S. Banerjee (1986) “A Multilateral Index Number System Based on the Factorial Approach,” *Statistical Papers*, Vol. 27, No. 1, pp. 297–313.
- Redding, S. J. and D. E. Weinstein (2020) “Measuring Aggregate Price Indices with Taste Shocks: Theory and Evidence for CES Preferences,” *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 135, Issue 1, pp. 503–560.
- Reinsdorf, M. B., and A. H. Dorfman (1999) “The Sato-Vartia Index and the Monotonicity Axiom,” *Journal of Econometrics*, Vol. 90, Issue 1, pp. 45–61.
- Samuelson, P. A. and S. Swamy (1974) “Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis,” *American Economic Review*, Vol. 64, No. 4, pp. 566–593.
- Selvanathan, E. A., and D. S. P. Rao (1994) *Index Numbers, a Stochastic Approach*, The Macmillan Press.
- World Bank (2013) *Measuring the Real Size of the World Economy: The Framework, Methodology, and Results of the International Comparison Program—ICP*, World Bank, Washington DC.