経済研究
Vol. 72, No. 4, Oct. 2021

バーク・ナッシュ均衡とその性質

山　本　裕　一

本稿では，misspecified Bayesian learning に関する近年の理論的発展を概説する．特に，各種バーク・ナッシュ均衡の概念を解説し，バーク・ナッシュ均衡への収束の様子について，様々な具体例を用いて詳細に記述する．
JEl Classification Codes: C61, D83

1. イントロダクション

本稿では，理論系ミクロ経済学において近年アクティブな研究分野である Misspecified Bayesian learning について解説する．これは「未知の経済変数を学習しようとする経済主体がバイアス(model misspecification)を持つとき，そのバイアスが学習にどう影響を与え，経済主体の行動がどう変化するか」を明らかにしようとする分野で，例えば

- 自信過剰なマネージャーが新規ビジネスの利潤率について学習していくとき，どのようなことが起きるか
- 需要関数を線形であると誤認している独占企業がその需要関数の傾きを学習しようとするとき，どのような行動を取るか
- 女性の数学的能力は男性に劣るというバイアスを持った教師は，どのような行動を取り，それが学生にどう影響を与えるか

などといった問題を考える．

元々統計学，計量経済学では「データの分析者が誤ったモデルを用いて推定をすること」を model misspecification というが，本稿で取り扱うミクロ経済学的アプローチにおいては「経済主体がバイアスを持って(つまり誤ったモデルを用いて)経済変数を学習したり行動を選んだりすること」を model misspecification という．White (1982) 以来，model misspecification の分析は計量経済学において長い歴史を持ち，異時点間のデータの間に相関がない場合(i.i.d.)ないし弱い相関しかない場合においては様々な研究結果が得られている．しかしながらミクロ経済学的な model misspecification のモデルを考えた場合，これら独立性の仮定は満たされていないことが通常である．例えば，新規ビジネスを始めたばかりのマネージャーが，そのビジネスの利潤率を毎期の売上から学習しようとしているとしよう．もし第一期目の売上が運良く高かった場合，このマネージャーは利潤率について楽観的になり，第二期における投資額を増やすであろう．一方第一期の売上が運悪く低かった場合，マネージャーは悲観的になり投資額を減らすだろう．第二期の売上はこの投資額に依存して決まるため，第一期の売上データと第二期の売上データの間には(選ばれる投資額を通じた)強い相関関係があることが分かる．このため，ミクロ経済学のモデルを分析する際には，計量経済学でこれまで開発されてきた分析手法を流用することはできない．

しかしながら，近年の技術的な進展により，このような異時点間のデータに相関があるベイズ学習モデルにおいて何が起こるのかが少しずつ分かってきた．この一連の研究の中で最も基

本的な概念が，Esponda and Pouzo(2016)が提案したバーク・ナッシュ均衡(Berk Nash equilibrium)である．大雑把にいえば，バーク・ナッシュ均衡とは，動学的なベイズ学習モデルにおける定常点(steady state)のことである．ベイズ学習モデルにおいては，経済主体の持つ(未知の経済変数に関する)信念は時間とともに非常に複雑な変化をしてゆくのだが，結局のところ，もしこの信念が長期的に収束してゆくのであれば，その収束先は定常点，すなわちバーク・ナッシュ均衡でなければならない．従って，十分時間が経過した時の経済主体の信念や行動を知りたければ，複雑な動学モデルを解かずとも，このバーク・ナッシュ均衡を求めてやれば良いということになる．

バイアスを持つ経済主体の分析は今後広い分野での応用が期待され[1)]，その際にはバーク・ナッシュ均衡の概念を理解することが非常に重要になると思われる．しかしながら，この分野の研究はまだ始まって日が浅いがゆえに，既存の専門論文はそれぞれが微妙に異なる問題設定を考えている．例えば，毎期 payoff perturbation があることを仮定している論文とそうでない論文，経済主体が近視眼的であると仮定している論文とそうでない論文，といった具合である．このため専門家以外の方々にとっては，「どの論文のどの結果がどの仮定に依存しているのか」というのが非常に分かりにくく，バーク・ナッシュ均衡の概念とその諸定理をキチンと理解するハードルがかなり高いものとなってしまっている．

本稿ではこの状況を改善すべく，「毎期 payoff perturbation が存在せずかつ，経済主体が近視眼的である」という最もシンプルな設定のもとで，統一的な視点からバーク・ナッシュ均衡にまつわる諸定理を再解釈する．特に，バーク・ナッシュ均衡への収束を考えるにあたっては

- 経済主体の持つ信念とその行動が，ともにバーク・ナッシュ均衡に収束するケース
- 経済主体の行動は収束しない(つまり毎期別の行動を選んでしまう)が，その信念と行動頻度は収束するケース
- 信念も行動も収束しない(つまり，未知の変数がどんな値であるかあやふやな状態がずっと続いてしまう)が，行動頻度は収束するケース

が存在するのだが，それぞれのケースについて具体例を用いて解説する[2)]．専門論文においてはこの収束の仕方の差に関して深く議論されることはないが，応用上は非常に重要な点であり，このようにまとめておくことに価値があるのではないかと思われる．

2. セットアップ

以下のような無限期間ベイズ学習モデルを考える．一人の経済主体が存在して，各 $t=1,2,\cdots$ 期に行動 $x^t \in X$ を選び，結果 $y^t \in Y$ を観察する[3)]．行動 x を所与としたとき，得られる結果 y の真の確率分布を $Q(x) \in \triangle Y$ で表すとする．経済主体の利得は選択された行動とその結果にのみ依存して決まるものとし，この利得を $u(x,y)$ で表すとする．なおここで，$X \subseteq \boldsymbol{R}$ は選択可能な行動の集合，$Y \subseteq \boldsymbol{R}^n$ は起こりうる結果の集合である．

経済主体は結果 y の真の確率分布 Q を知らず，これについて時間を通じて学習していくものとする．より具体的には，この経済主体は結果 y が(未知のパラメータ θ に依存した)確率分布 $Q^\theta(x) \in \triangle Y$ に従うものと信じており，時間を通じてこのパラメータ θ の値をベイズ学習していくとする．$\Theta \subseteq \boldsymbol{R}^m$ でパラメータ θ の取りうる値の集合を表し，第1期目における θ に関する信念を $\mu^1 \in \triangle \Theta$ であるとする．

このフレームワークは非常に一般的で，バイアスを含まない通常のベイズ学習モデル・経済主体がバイアスを持つようなベイズ学習モデルの双方を特殊ケースとして含んでいる．具体的には，経済主体がバイアスを持たない(correctly specified)とは，あるパラメータ $\theta^{\text{true}} \in \Theta$ が

存在して，全ての行動 x について $Q^{\theta^{\mathrm{true}}}(x)=Q(x)$ が満たされることを言う．直観的には，パラメータ θ^{true} は，「真の」パラメータであり，この θ^{true} を所与とすると，経済主体の主観的分布 $Q^{\theta^{\mathrm{true}}}(x)$ が真の分布 $Q(x)$ と完全に一致している．このような状況では，(いくつかの技術的な条件が満たされていれば)経済主体は真のパラメータ θ^{true} を確率1で正しく学習できることが知られている．

一方，そのような θ^{true} が存在しないようなケースでは，どんなパラメータ θ を所与としても，(何らかの行動 x を取ったときに)経済主体の主観的分布 $Q^{\theta}(x)$ と真の分布 $Q(x)$ が異なるものとなってしまう．すなわち，どのようなパラメータ θ を取ってきても，経済主体は分布 Q により記述される現実の世界を正しく認識できず，誤った見方をしてしまう．このようなとき，経済主体はバイアスを持つ(misspecified)と言われる．以下ではこの，経済主体がバイアスを持つケースについて詳細な分析を行っていくが，その前にいくつかの具体例を示しておくことにしよう．

- **自信過剰なマネージャー(Heidhues, Kőszegi, and Strack (2018)** 新規ビジネスを始めたばかりのマネージャーを考えよう．マネージャーは毎期投資額 x を選び，売上

$$y=\theta^{*}(x+a)+\varepsilon$$

を得る．ここで，a はマネージャーの能力，θ^{*} はこのビジネスの真の利潤率，ε は正規分布 $N(0,1)$ に従うノイズ項である．まだビジネスを始めたばかりのマネージャーは真の利潤率 θ^{*} を知らず，時間を通じてこの値を学習していく．このマネージャーは自身の能力について自信過剰であり，真の能力が $A>a$ であると誤認しているとする．つまりマネージャーは，利潤率 θ を所与としたときの売上が

$$y=\theta(x+A)+\varepsilon$$

で与えられるものだと誤認していたとする．マネージャーの利得は，売上からコスト x^2 を引いた $u(x,y)=y-x^2$ であるとする．この例は，$Q(x)$ を平均 $\theta^{*}(x+a)$ の正規分布，Q^{θ} を平均 $\theta(x+A)$ の正規分布とすることで，我々のフレームワークの特殊ケースとして表現できる．

- **真の需要関数を知らない独占企業(Nyarko (1991), Fudenberg, Romanyuk, and Strack (2017))** 独占企業が，毎期価格 x を選び，売上

$$y=12-x^2+\varepsilon$$

を観察するとしよう．価格が上昇するごとに，需要(売上)が二次関数的に減少してゆくことに注意されたい．しかしながら独占企業は需要関数が線形であると誤認しており，その傾き θ を時間を通じて学習しようとしているとする．具体的にはこの企業は，パラメータ θ を所与としたときの売上が

$$y=12-\theta x+\varepsilon$$

であると誤認していたとする．生産コストは無視するものとして，企業の毎期の利得は $u(x,y)=xy$ であるとする．この例は，$Q(x)$ を平均 $12-x^2$ の正規分布，Q^{θ} を平均 $12-\theta x$ の正規分布とすることで，我々のフレームワークの特殊ケースとして表現できる．

これからこのベイズ学習モデルについて分析していくが，その際，下記の技術的な仮定が満たされているものとする．

仮定 1. 以下の条件を仮定する．

(i) Θ はコンパクトである．
(ii) $Q(x)$ と $Q^{\theta}(x)$ は密度関数 $q(\cdot|x)$ と

$q^{\theta}(\cdot|x)$ を持ち，また，これらの密度関数は θ と x に関して連続である．

(iii) ある関数 $g: X \times X \to \boldsymbol{R}$ が存在して，以下の条件を満たすものとする．(a)任意の y に対して，$g(x,y)$ は x に関する連続関数．(b)任意の x に対して，$g(x,\cdot) \in L^2(Y, q(\cdot|x))$．(c)任意の x と θ に対して，$\log \frac{q(\cdot|x)}{q^{\theta}(\cdot|x)} \leq g(x,\cdot)$．

(iv) μ^1 は full support assumption を満たす，つまり，任意の開集合 $U \subset \Theta$ に対して $\mu^1(U) > 0$ である．

簡単のため，経済主体は近視眼的で，毎期その期に得られる期待利得を最大化するものとしよう[4]．このとき，経済主体の取る行動は，以下のように記述できる．まず第1期目においては，経済主体は信念 μ^1 を所与としたときの期待利得

$$E\left[\int_Y u(x,y)\, q^{\theta}(dy|x) \middle| \mu^1\right]$$

を最大化するような行動 x^1 を取り，結果 y^1 を観察する．この観察された結果 y^1 を所与とすると，第2期目の信念 μ^2 は，ベイズの公式

$$\mu^2(U) = \frac{\int_U q^{\theta}(y^1|x^1)\,\mu^1(d\theta)}{\int_{\Theta} q^{\theta}(y^1|x^1)\,\mu^1(d\theta)} \quad \text{for any Borel set } U \subseteq \Theta$$

で与えられる．ここで信念を計算する際には，真の確率分布 $Q(x)$ ではなく，経済主体の主観的確率分布 $Q^{\theta}(x)$ を用いていることに注意されたい．

第2期においても同様に，経済主体はこの信念 μ^2 を所与としたときの期待利得を最大化するような行動 x^2 を選び，結果 y^2 を観察し，ベイズの公式を用いて信念 μ^3 を計算する．より一般的には，第 $t-1$ 期目における信念 μ^{t-1}，行動 x^{t-1}，結果 y^{t-1} を所与とすると，第 t 期目における信念は

$$\mu^t(U) = \frac{\int_U q^{\theta}(y^{t-1}|x^{t-1})\,\mu^{t-1}(d\theta)}{\int_{\Theta} q^{\theta}(y^{t-1}|x^{t-1})\,\mu^{t-1}(d\theta)} \quad \text{for any Borel set } U \subseteq \Theta \tag{1}$$

で与えられる[5]．そして経済主体は，対応する期待利得

$$E\left[\int_Y u(x,y)\, q^{\theta}(dy|x) \middle| \mu^t\right]$$

を最大化するような行動 x^t を取り，結果 y^t を観察する．

さて，ここまでは「第 t 期までの結果 $(y^1, \cdots, y^t)$ が与えられたときに，次の期に何が起こるか」について考えたが，実際には各期の結果 y^t は確率的に定まるので，それに付随して定まる信念 μ^{t+1} や将来の行動 x^{t+1} も確率的に定まることになる．そして t が大きくなるにつれて，これらは非常に複雑な確率過程となる．本稿では，このような状況で十分時間が経過したとき(すなわち，未知の変数を学習するために十分なデータが揃ったとき)に何が起こるのか，考察してゆく．

3. カルバック・ライブラー情報量と Berk(1966)

統計学における有名論文である Berk(1966) は，毎期得られる情報が i.i.d. であるようなケースにおいて，バイアスを持つ経済主体がベイズ学習をしたときの信念の挙動について分析した．この Berk モデルは，我々のフレームワークでいえば，経済主体の取りうる行動が一つしかない(すなわち $X = \{x\}$ である)ような特殊ケースにあたる．実際，経済主体が毎期同じ行動 x を取るならば，観察される情報 y は毎期同じ分布 $Q(x)$ に従うため，i.i.d. となっていることがすぐに分かる．本節ではまず，このもっともシンプルな i.i.d. モデルにおいてどのようなことが起こるかについて解説する．

結論から言うと，Berk は「i.i.d. モデルにおいて十分時間が経過すると，信念は真の分布

$Q(x)$ に最も『近い』主観的分布 $Q^{\theta}(x)$ を与えるようなパラメータ θ に収束していく」という結果を示した．もう少し砕けた言い方をすると，観察される実際のデータの分布 $Q(x)$ を説明するのに最も適したパラメータ θ を真の値だと学習するようになる，というのが Berk の結果である．

例えば，前節で紹介した自信過剰なマネージャーの例において，マネージャーが毎期同じ投資額 x を選ぶような状況を考えよう．このとき，毎期観察される売上 y の平均は $\theta^*(x+a)$ となる．一方，もしマネージャーが $\theta=\dfrac{\theta^*(x+a)}{x+A}$ を真の利潤率だと信じているならば，マネージャーの信じる売上の平均は

$$\theta(x+A)=\theta^*(x+a)$$

となり，マネージャーの信じる主観的な平均が真の平均と完全に一致することが分かる．（より正確には，平均だけではなく，観察される売上の真の分布とマネージャーの信じる主観的な分布が完全に一致している．）この利潤率 $\theta=\dfrac{\theta^*(x+a)}{x+A}$ こそが Berk の言う「観察されるデータを説明するのに最も適した θ」であり，十分時間が経過すると，マネージャーはこの $\theta=\dfrac{\theta^*(x+a)}{x+A}$ を真の利潤率だと信じるようになるというのが Berk の主定理である．なお $A>a$ であることから，$\theta=\dfrac{\theta^*(x+a)}{x+A}<\theta^*$ であることが簡単に分かるが，この式は，自信過剰なマネージャーが利潤率 θ を過小評価してしまうということを意味している．

この結果は，直観的には以下のように理解できる．まず第 1 期において，マネージャーが「真の利潤率はほぼ確実に θ^* である」と信じているとしよう．このときマネージャーが自信過剰であるとすると，実現する売上は(平均的には)想定よりも低いものとなってしまう．するとこのマネージャーは，「売上が低いのは自分の能力が低いせいではなく，このビジネスの利潤率がそもそも低いことが原因である」と解釈してしまい，時間の経過とともに利潤率を過小評価するようになってしまうというわけである．

さて，上記の例においては真の分布 $Q(x)$ と完全に一致する主観的分布 $Q^{\theta}(x)$ を与えるような θ が存在するため分析が簡単であったが，実際には「どのようなパラメータ θ を取ってきたとしても，経済主体の信じる主観的分布 $Q^{\theta}(x)$ が真の分布と一致しない」ような例も存在する．例えば上記のマネージャーの例において，マネージャーはノイズ項 ε が正規分布に従うと信じているが，実際にはより複雑な分布に従っているとしよう．この場合，マネージャーの信じる利潤率 θ がどのような値をとったとしても，マネージャーの信じる売上の分布 $Q^{\theta}(x)$ と真の分布 $Q(x)$ の間には「ズレ」が生じてしまう．Berk は，このような場合にはこの「ズレ」を最小化するような θ に信念が収束してゆくことを示したのだが，この際，真の分布 $Q(x)$ と主観的分布 $Q^{\theta}(x)$ の「ズレ」を計測する際に使われるのが，カルバック・ライブラー情報量(Kullback-Leibuler divergence, 相対エントロピーとも呼ばれる)である．

具体的には，ある行動 x とパラメータ θ を所与としたときに，情報 y の真の確率分布 $Q(x)$ と主観的確率分布 $Q^{\theta}(x)$ の間のカルバック・ライブラー情報量は，

$$\begin{aligned}K(\theta,x)&=E\left[\log\frac{q(y|x)}{q^{\theta}(y|x)}\right]\\&=\int_Y\log\frac{q(y|x)}{q^{\theta}(y|x)}Q(dy|x)\end{aligned}$$

で定義される．やや複雑な形をしているが，これは大雑把に言うと，真の確率分布 $Q(x)$ と主観的確率分布 $Q^{\theta}(x)$ という二つの確率分布の「違い」ないし「距離」を表している．実際，この二つの確率分布が一致するとき(つまり $Q(x)=Q^{\theta}(x)$ のとき)にはカルバック・ライブラー情報量はゼロになり，主観的分布 $Q^{\theta}(x)$ が真の分布から離れていくほど，カルバック・ライブラー情報量は大きくなる．また，通常の距離の概念と同じく $K(\theta,x)\geq 0$，つまりカルバック・ライブラー情報量は常に非負で

ある[6)]．なお，真の分布が平均μ^1分散1の正規分布，主観的な分布が平均μ^2分散1の正規分布であるような場合には，簡単な計算により

$$K(\theta, x) = \frac{(\mu^1 - \mu^2)^2}{2} \tag{2}$$

となることが分かる．主観的な平均μ^2が真の平均μ^1から離れてゆくほど，カルバック・ライブラー情報量も大きくなってゆくのがお分かりいただけるだろう．

行動xが与えられたときに，このカルバック・ライブラー情報量$K(\theta, x)$を最小化するようなパラメータθの集合を$\Theta(x)$で表すことにしよう．直観的には，「行動xを所与としたときに，実際に観察されるデータを説明するのに最も適したパラメータ」の集合が，この$\Theta(x)$ということになる．ここで，このパラメータ$\Theta(x)$が行動xに依存していることに注意されたい．経済主体がとる行動次第で，「現実に最もフィットするパラメータ」も変化してしまうのである．

Berk(1966)は，経済主体が毎期同じ行動xを取るようなケースにおいては，信念がこの$\Theta(x)$へと収束していくことを示した．具体的には，以下の定理が成り立つ．$h=(x^t, y^t)_{t=1}^{\infty}$で無限期間モデルにおけるサンプルパス(毎期どんな行動が選ばれ何が観察されたのかを表す無限点列)，$\mu^t(h)$で(サンプルパスhを所与としたときの)第t期における信念，Pでサンプルパスhの確率分布を表すことにする．

定理 1． $X=\{x\}$，つまり経済主体が毎期同じ行動xしか取ることができないようなベイズ学習モデルを考える．このとき$\Theta(x)$を含む任意の開集合Uに対して，

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\mu^t(h)[U]=1\right)=1$$

が成立する．特に$\Theta(x)=\{\theta\}$のとき，つまり，カルバック・ライブラー情報量を最小化するパラメータθがただ1つ存在するときは，信念はそのパラメータθにほぼ確実に収束する．

4. 純粋バーク・ナッシュ均衡

4.1 自信過剰なマネージャー

それではいよいよ，経済主体が毎期異なる行動を取るモデルについて考えていこう．いきなり一般的なモデルを分析するのはハードルが高いので，まずは前節でも考えた自信過剰なマネージャーの例について考える．前節ではマネージャーが毎期同じ投資額を選ぶという仮定を置いたが，今回はその仮定を外して，マネージャーが(信念に応じて)毎期異なる投資額を選ぶようなケースを考えよう．この場合，選ばれた投資額に応じて観察される売上yの分布も毎期変化してしまうので，信念μの時間を通じた変化はかなり複雑なものとなる．

しかしながら，もしマネージャーの利潤率θに関する信念と選ばれる投資額xが時間を通じて収束してゆくのであれば，その収束先の点$(\hat{\theta}, \hat{x})$においては，以下の二つの条件が満たされていなければならないことがすぐに分かる．

$$\hat{\theta}(\hat{x}+A) = \theta^*(\hat{x}+a), \tag{3}$$

$$\hat{x} = \frac{\hat{\theta}}{2} \tag{4}$$

一番目の式(3)は，前節での式と同じく，「(投資額$\hat{x}$を所与としたときに)マネージャーの信じる売上の平均$\hat{\theta}(\hat{x}+A)$が真の平均$\theta^*(\hat{x}+a)$と一致する」ということを意味している．直観的には，選ばれる投資額が$\hat{x}$に収束するということは，十分時間が経過した後はずっと，マネージャーは投資額$\hat{x}$(ないしそれに近い投資額)を選ぶということを意味する．このような場合，マネージャーの信じる利潤率が(3)を満たす$\hat{\theta}$になるということは，Berkの結果からほぼ明らかであろう．二番目の式(4)は，利潤率$\hat{\theta}$を所与としたときに利潤を最大化する投資額が$\hat{x}$であるということを意味している．もしこの条件が満たされていないとすると，マネージャーの信念が$\hat{\theta}$が収束したときに利潤を最大化する投資額が$\hat{x}$ではない他の値とな

ってしまい，従ってマネージャーの選ぶ投資額が$\tilde{x}$に収束しなくなってしまう．選ばれる投資額が$\tilde{x}$に収束するためには，(4)が満たされていることが必要条件なのである．

この二つの条件(3)，(4)を満たす点$(\tilde{\theta},\tilde{x})$は，このmisspecified learningの分野においてバーク・ナッシュ均衡と呼ばれるものである．Heidhues, Kőszegi, and Strack(2018)は，第1期目の信念μ^1がfull supportでありさえすれば，確率1でマネージャーの信念と投資額がこのバーク・ナッシュ均衡に収束するということを示した．つまり，十分時間が経過した後は，マネージャーは$\tilde{\theta}$を真の利潤率だと信じるようになり，投資額$\tilde{x}$を選ぶようになるのである．(ただしこの結果は，このマネージャーの例に限って成立するものであり，一般的なベイズ学習モデルにおいては成立しない．すなわち，バーク・ナッシュ均衡が存在しても，信念がそこに収束しない例が存在する．これについては後述する．)

前節の議論と同様，このバーク・ナッシュ均衡においては$\tilde{\theta}<\theta^*$が成立する，つまり，マネージャーは利潤率を過小評価している．そして(4)式より，このバーク・ナッシュ均衡において選ばれる投資額$\tilde{x}$は，真の利潤率θ^*が既知のときの最適投資額$x^*=\frac{x^*}{2}$よりも小さいことが分かる．これは，バーク・ナッシュ均衡において過少投資の問題が発生していることを意味する．通常の(バイアスが存在しない)ベイズ学習モデルにおいては，学習を通じて経済主体はより効率的な行動を取るようになるが，この例のように経済主体がバイアスを持っている場合，パラメータを誤って学習をしてしまうことで，選ばれる行動がかえって非効率になってしまうという可能性がある．Heidhues, Kőszegi, and Strack(2018)は，これをself-defeating learningと呼んでいる．

4.2 一般的なモデルにおけるバーク・ナッシュ均衡

さて，具体的なイメージをつかめたところで，Esponda and Pouzo(2016)が提唱した一般的なバーク・ナッシュ均衡の定義を紹介しよう．

定義1. ある行動と信念の組(x,μ)が純粋バーク・ナッシュ均衡(pure Berk-Nash equilibrium)であるとは，以下の二つの条件が満たされていることをいう．

(i) $\mu\in\triangle\Theta(x)$
(ii) $x\in\arg\max_{\tilde{x}}E\left[\int_Y u(\tilde{x},y)Q^{\theta}(dy|\tilde{x})|\mu\right]$

また，行動xが純粋バーク・ナッシュ均衡であるとは，ある信念μが存在して(x,μ)が純粋バーク・ナッシュ均衡を成すことをいう．

条件(i)は，先のマネージャーの例に出てきた条件(3)を，一般的な状況に拡張したものである．直観的には，もし経済主体の行動がxに収束する(すなわち，十分時間が経過したのちに行動xを選び続ける)ならば，Berkの結果より，その経済主体の信念は集合$\Theta(x)$に含まれるパラメータのみに正の確率を与えるような信念に収束していくはずである．従って収束先の信念μにおいては，この条件(i)が満たされていなければならない．同様に条件(ii)も，先のインセンティブ条件(4)を一般的な状況に拡張したものである．もし経済主体の信念がμに収束するのであれば，経済主体はこの信念μを所与として利潤を最大化するような行動xを選ぶようになるはずである．従って収束先の行動xは，条件(ii)を満たさなければならない．

この議論から明らかなように，もし経済主体の行動が収束するのであれば，その収束先は必ずバーク・ナッシュ均衡でなければならない．このことを，定理の形で述べておこう．定理の証明は，Esponda and Pouzo(2016)を参照いただきたい．

定理2. ある*full support*を持つような信念μ^1を所与としたときに，経済主体の行動が正の確率でxに収束したとする．すなわち，$P(\lim_{t\to\infty}x^t=x)>0$であるとする．このとき，$x$は純粋バーク・ナッシュ均衡である．

この定理は，バーク・ナッシュ均衡であることは，x が行動の収束先であるための必要条件であるということを述べている．また既に第4.1節で紹介した通り，自信過剰なマネージャーの例においては，その逆の十分性も成立する．つまり，マネージャーの選ぶ行動は確率1でバーク・ナッシュ均衡に収束してゆく．

しかし，より一般的なモデルにおいては，十分性を保証するためにはバーク・ナッシュ均衡の条件(i), (ii)よりもやや強い条件を課さなければならないことが知られている．Esponda, Pouzo, and Yamamoto (2021) は robustly attracting set，Fudenberg, Lanzani, and Strack (2021)は一様強バーク・ナッシュ均衡という定義をそれぞれ提唱しているが，ここでは定義がよりシンプルな一様強バーク・ナッシュ均衡を紹介しよう．

定義 2. ある行動 x が一様強バーク・ナッシュ均衡(uniform strict Berk-Nash equilibrium)であるとは，任意の信念 $\mu\in\triangle\Theta(x)$ に対して，行動 x が利潤最大化問題の唯一解である，すなわち

$$E\left[\int_Y u(x,y)\,Q^\theta(dy|x)\middle|\mu\right] > E\left[\int_Y u(\tilde{x},y)\,Q^\theta(dy|\tilde{x})\middle|\mu\right] \quad \forall\tilde{x}\neq x$$

であることを言う．

一様強バーク・ナッシュ均衡においては，バーク・ナッシュ均衡と比較すると二つの意味で強い条件が課されている．まず第一に，一様強バーク・ナッシュ均衡 x はある一つの信念 $\mu\in\triangle\Theta(x)$ の下で利潤最大化問題の解になっているのみならず，$\Theta(x)$ をサポートに持つ全ての信念 $\mu\in\triangle\Theta(x)$ の下で最大化問題の解になっていなくてはならない．第二に，行動 x は利潤最大化問題の唯一解でなければならない，すなわち，インセンティブ条件が強い不等式で満たされていなければならない．

Fudenberg, Lanzani, and Strack (2021)は，一様強バーク・ナッシュ均衡であることは，収束のための十分条件であることを示した．具体的には，以下の定理が成立する．

定理 3. 取りうる行動が有限，すなわち $|X|<\infty$ であると仮定する．このとき，任意の一様強バーク・ナッシュ均衡 x と任意の $\kappa\in(0,1)$ に対して，*full support* を持つ信念 μ^1 が存在して $P(\lim_{t\to\infty}x^t=x)>\kappa$ が成立する．

この定理に出てくる信念 μ^1 としては，$\Theta(x)$ に $1-\varepsilon$ を与えるような信念をイメージしていただければ良い．（ここで，ε はゼロに近い微小な正の数.）一様強バーク・ナッシュ均衡 x においてはインセンティブ条件が強い不等式で満たされているため，この信念 μ^1 の下では，行動 x を選ぶことが最適である．すると平均的には，第二期目の信念 μ^2 はより $\triangle\Theta(x)$ に近づくことになり，従って第二期目にも同様に行動 x が選ばれることになる．こうして信念は $\triangle\Theta(x)$ の近傍にとどまり続け，すると経済主体は行動 x を毎期選ぶことになる，というのがこの定理の直観である．もちろん，観察される情報 y はランダムであるため，信念が $\triangle\Theta(x)$ の近傍の外に出てしまうという事象が正の確率で発生する．しかしながら Fudenberg, Lanzani, and Strack (2021)は，この事象の発生する確率が非常に小さいということを証明した．（ただしこの証明はかなり複雑なので，本稿では割愛する.）よって上記の定理が成立するわけである．

なおこの定理は，ある特定の信念 μ^1（具体的には，均衡における信念を近似するような μ^1）から学習が始まったときに行動が収束することを保証しているが，それ以外の信念 μ^1 から学習が始まったときに何が起こるかについては，何も述べていない．このようなケースについて行動が収束するかどうかについて知るためには，バーク・ナッシュ均衡の性質のみを調べるのではなく，元々の動学的なベイズ学習モデルに立ち戻って，経済主体の行動や信念が時間を通じてどう変化してゆくのかをキチンと分析しなけ

ればならない．またこの定理にも述べられている通り，一様強バーク・ナッシュ均衡という概念は，取りうる行動が有限のケースにのみ有用である．従って，先のマネージャーの例のように取りうる行動が無限に存在するようなモデルで行動が収束するかを知るためには，やはり元の動学的なベイズ学習モデルに立ち戻って分析しなければならない．この点については，第6節でより詳しく解説することにする．

5. 混合バーク・ナッシュ均衡

5.1　需要関数を誤認している独占企業

前節では，行動が収束する場合にはその収束先の点が純粋バーク・ナッシュ均衡であるということを説明した．これは逆に言えば，純粋バーク・ナッシュ均衡が存在しないような状況においては，経済主体の行動は収束せず，永遠に振動し続けるということを意味する．このような例を最初に発見したのが，Nyarko (1991) である．本節ではまず，どのようなときに純粋バーク・ナッシュ均衡が存在しないのか，このNyarkoの例を通じて見ていくことにしよう．

第2節で紹介した，真の需要関数を知らない独占企業の例を考えよう．この独占企業は毎期，高価格（$x^t=3$）または低価格（$x^t=2$）を選択することができ，その選択された価格に応じて，売上

$$y=12-x^2+\varepsilon \tag{5}$$

と利得 xy を得る．ここで ε^t はノイズ項で，平均0，分散1の正規分布に従うものとする．企業はこの真の需要関数(5)を知らず，需要関数の傾きが価格によらず一定であると誤認している．具体的には，企業は需要関数が線型，すなわち

$$y=12-\theta x+\varepsilon$$

であると信じており，時間を通じて傾き $\theta\in[2,3]$ を学習してゆくものとする．

さて，この例において，独占企業が低価格 $x=2$ を選び続けたとしよう．このとき毎期観察される売上の平均は $12-2^2=8$ であり，Berkの定理より，企業の信念はこの売上を説明するのに最も適した傾き θ に収束してゆくはずである．具体的には，主観的売上と真の売上が一致するような θ，すなわち

$$12-\theta 2=8 \Leftrightarrow \theta=2$$

が真の傾きであると信じるようになる．しかしこの傾きを所与とすると，高価格 $x=3$ を選んだときの利得 $3(12-3\theta)=18$ の方が，低価格 $x=2$ を選んだときの利得 $2(12-2\theta)=16$ よりも高くなってしまう．従って企業は，ある時点で低価格から高価格へとスイッチすることになる．このことから，価格が低価格に収束することはありえないことが分かる．

同様に，仮に独占企業が高価格 $x=3$ を選び続けたとすると，企業は主観的売上と真の売上が一致するような θ，すなわち

$$12-\theta 3=3 \Leftrightarrow \theta=3$$

が真の傾きであると信じるようになるが，この傾きを所与とすると低価格 $x=2$ を選ぶ方が，高価格 $x=3$ を選ぶよりも高い利得をもたらすことになる．従って企業は高価格を取り続けることはなく，ある時点で高価格から低価格へとスイッチしてしまう．こうして，企業の選ぶ価格は収束せず，永遠に高価格と低価格の間で振動しつづけることになる．（なお上記の議論より，高価格 $x=3$ も低価格 $x=2$ も純粋バーク・ナッシュ均衡にならないことが確認できる．）

さてそれでは，この価格の振動の仕方に何か規則性のようなものは存在するのだろうか？ Esponda, Pouzo, and Yamamoto (2021) は，このように経済主体の行動が収束しないようなケースにおいても，その行動頻度と信念が混合バーク・ナッシュ均衡に収束しうることを示した．次節ではこの結果について解説してゆく．

5.2　行動頻度と信念の収束

まず最初に，行動頻度と混合バーク・ナッシュ均衡という概念についてキチンと定義するところから始めよう．行動頻度とは，過去に経済主体が各行動をどれぐらいの頻度で選択したのかを，集合 X 上の確率分布として表現したものである．具体的には，サンプルパス $h=(x^t, y^t)_{t=1}^{\infty}$ を所与としたときの第 t 期までの行動頻度 $\sigma^t(h) \in \triangle X$ は，

$$\sigma^t(h)[x] = \frac{|\{\tau \leq t | x^\tau = x\}|}{t} \quad \forall x$$

で与えられる．例えば上記の独占企業の例で，最初の 100 期のうち高価格を 50 回，低価格を 50 回選んだ場合の行動頻度は，$\sigma=(0.5, 0.5)$ となる．

続いて混合バーク・ナッシュ均衡の一般的な定義を述べるのだが，そのためにいくつかの記号を導入しよう．第 4 節では，ある行動 x とパラメータ θ を所与としたときの主観的分布 $Q^\theta(x)$ と真の分布 $Q(\theta)$ の「ズレ」を測るカルバック・ライブラー情報量を $K(\theta, x)$ で表すことにしていた．本節ではこの定義を拡張して，任意の行動頻度 $\sigma \in \triangle X$ に対して重み付きカルバック・ライブラー情報量を

$$K(\theta, \sigma) = \int_X K(\theta, x) \sigma(dx)$$

で定義することにしよう．直観的にはこの $K(\theta, \sigma)$ は，経済主体の行動頻度が σ であったときに実際に観察されるデータと，パラメータ θ を所与としたときの主観的分布の「ズレ」を測るものとみなすことができる．この重み付きカルバック・ライブラー情報量 $K(\theta, \sigma)$ を最小化するような θ の集合を，$\Theta(\sigma)$ で表すことにしよう．これらの記法を用いると，混合バーク・ナッシュ均衡は以下のように定義できる[7)]．

定義 3. $\sigma \in \triangle X$ が(混合)バーク・ナッシュ均衡であるとは，σ によって正の確率が付与されている各行動 x に対して，ある信念 $\mu \in \triangle\Theta(\sigma)$ が存在して，この μ の下で x が利得最大化問題の解となっていることをいう．

純粋バーク・ナッシュ均衡とよく似た定義であるが，混合バーク・ナッシュ均衡においては，各行動 $x \in \mathrm{supp}\,\sigma$ ごとに異なる信念 μ を用いてインセンティブ条件を考えている点が重要である．なぜこの定義が適切なのかは，後ほど具体例を通じて説明する．なお，σ が退化した分布，すなわち $\sigma=1_x$ であるときは，ここで考えている条件は x が純粋バーク・ナッシュ均衡であるための条件と完全に一致する．この意味において，上記の定義は(純粋バーク・ナッシュ均衡を特殊ケースとして含む)一般的なバーク・ナッシュ均衡の定義とみなすことができる．なお Esponda and Pouzo (2016) は，第 2 節で述べた仮定が満たされているならば必ず，(純粋ないし混合)バーク・ナッシュ均衡が存在することを示した．

純粋バーク・ナッシュ均衡と同様，混合バーク・ナッシュ均衡であることは，行動頻度が収束するための必要条件である．このことを定理の形で述べておこう．

定理 4. ある full support を持つような信念 μ^1 を所与としたときに，経済主体の行動頻度 σ^t が正の確率で σ に弱収束したとする．このとき，σ はバーク・ナッシュ均衡である．

それでは，先の独占企業の例における混合バーク・ナッシュ均衡を求めてみよう．この例では，真の分布においても主観的分布においても y は分散 1 の正規分布に従う．よって(2)を使うと，σ を所与としたときの重み付きカルバック・ライブラー情報量は

$$K(\theta, \sigma) = \frac{1}{2}[\sigma(x=2)\{8-(12-2\theta)\}^2 + \sigma(x=3)\{3-(12-3\theta)\}^2] \tag{6}$$

という形で書ける．これは θ に関する二次関数であるから，σ を所与としたときに $K(\theta, \sigma)$ を

最小化するようなθがただ一つ存在する．一階条件よりこの解は$\theta=\dfrac{\sigma(x=2)16+\sigma(x=3)54}{\sigma(x=2)8+\sigma(x=3)18}$である．すなわち，$\Theta(\sigma)=\left\{\dfrac{\sigma(x=2)16+\sigma(x=3)54}{\sigma(x=2)8+\sigma(x=3)18}\right\}$となる．さて，任意の$\sigma$に対して$\Theta(\sigma)$は一つの要素$\theta=\dfrac{\sigma(x=2)16+\sigma(x=3)54}{\sigma(x=2)8+\sigma(x=3)18}$しか持たないのであるから，混合バーク・ナッシュ均衡σにおいては，この$\theta=\dfrac{\sigma(x=2)16+\sigma(x=3)54}{\sigma(x=2)8+\sigma(x=3)18}$を所与としたときに低価格$x=2$と高価格$x=3$が無差別になっていなければならない．この二つの価格が無差別となるのは

$$3(12-3\theta)=2(12-2\theta)$$

という関係が満たされるとき，すなわち$\theta=\dfrac{12}{5}$のときである．従って混合バーク・ナッシュ均衡σにおいては

$$\frac{\sigma(x=2)16+\sigma(x=3)54}{\sigma(x=2)8+\sigma(x=3)18}=\frac{12}{5}$$

が成立しなければならない．このことから，混合バーク・ナッシュ均衡は$\sigma=\left(\dfrac{27}{35},\dfrac{8}{35}\right)$であり，この均衡は信念$\theta=\dfrac{12}{5}$によってサポートされていることが分かる．（ここで，$\dfrac{27}{35}$は低価格$x=2$を選ぶ頻度である．）

第6節で説明するように，この例においては，経済主体の行動頻度と信念が確率1でこのバーク・ナッシュ均衡に収束してゆくことを示すことができる．この収束の過程で起きていることを言葉で表現すると，以下のようになる．十分時間が経過すると，企業の信念はパラメータ$\theta=\dfrac{12}{5}$へと収束してゆく．しかし観察される情報にはノイズが含まれるため，経済主体の信じるθは毎期この$\theta=\dfrac{12}{5}$とは微妙にズレて，高くなったり低くなったりする．そして，信じるパラメータが$\theta=\dfrac{12}{5}$よりも大きいときは，(二つの価格はほぼ無差別ではあるが)低価格$x=2$の方が高価格$x=3$よりも大きな利潤を与えるため，$x=2$が選ばれる．一方，信じるパラメータが$\theta=\dfrac{12}{5}$よりも小さいときは$x=3$が選ばれる．この結果，信念が$\theta=\dfrac{12}{5}$へと収束してゆく過程において，高価格$x=3$と低価格$x=2$が正の頻度で選ばれるのである．

5.3 行動頻度は収束しても信念が収束しない例

混合バーク・ナッシュ均衡を定義するにあたっては，均衡で選ばれる各行動xがそれぞれ異なる信念μのもとで最適である，という条件を課した．なぜこのように行動ごとに異なる信念を用いることを許すのかを理解するために，前節で分析した独占企業の例にやや変更を加えて，企業が「需要関数の傾きは$\theta=2$または$\theta=3$のどちらかである」と信じているような状況，つまり$\Theta=\{2,3\}$であるようなモデルを考えよう．（前節では，$\Theta=[2,3\}$)，つまりθは2と3の間の任意の実数値を取ることができた．）なおこれは，Fudenberg, Romanyuk, and Strack (2017)の分析したモデルを簡略したものである．

この新たなモデルにおいても，重み付きカルバック・ライブラー情報量は以前として(6)式で与えられる．しかし，θの値が連続ではないため，カルバック・ライブラー情報量の最小解は

$$\Theta(\sigma)=\begin{cases}\{2\} & \text{if } \sigma(x=2)>\dfrac{9}{13}\\ \{3\} & \text{if } \sigma(x=2)<\dfrac{9}{13}\\ \Theta & \text{if } \sigma(x=2)=\dfrac{9}{13}\end{cases}$$

となる．低価格$x=2$の頻度が高いときは緩い傾き$\theta=2$の方がより現実にフィットするが，高価格$x=3$の頻度が高いときは$\theta=3$の方が現実をよりよく説明できるわけである．（直観的にはこれは，真の需要関数の傾きが二次関数的に急になってゆくことからくる帰結である．）そして$\sigma=\left(\dfrac{9}{13},\dfrac{4}{13}\right)$のときは，$\theta=2$も$\theta=3$同程度に現実を説明できることになる．

このモデルにおける混合バーク・ナッシュ均衡は，この行動頻度$\sigma=\left(\dfrac{9}{13},\dfrac{4}{13}\right)$である．実

際，行動 $x=2$ は信念 $\mu=1_{\theta=3}$ のもとで最適であるし，行動 $x=3$ は信念 $\mu=1_{\theta=2}$ のもとで最適であるから，バーク・ナッシュ均衡であるための条件は確かに満たされている．

さて，この例においても行動頻度が確率 1 でバーク・ナッシュ均衡に収束してゆくことを証明することができるのだが，先の例とは異なり，この例では企業の信念は収束せず，$\theta=2$ と $\theta=3$ の間を永遠に振動し続ける．すなわち，企業は「需要関数の傾きは $\theta=2$ かもしれない，いや，実は $\theta=3$ かもしれない」という状態を繰り返すことになる．なぜこのようなことが起こるのかというと，このバーク・ナッシュ均衡において二つの異なるパラメータ $\theta=2$ と $\theta=3$ がカルバック・ライブラー情報量を最小化しているためである．一般に，カルバック・ライブラー情報量を最小化するパラメータが複数存在する場合には，信念はそのパラメータの間を振動し続けることが知られている[8)]．そして，信念が $\theta=2$ により近いときには高価格 $x=3$ が，$\theta=3$ に近いときには低価格 $x=2$ がそれぞれ選ばれるため，二つの価格が正の頻度で選ばれることになる．この状況はまさに，二つの価格 $x=2$ と $x=3$ がそれぞれ異なる信念でサポートされているというバーク・ナッシュ均衡の条件によって描写されている．

この独占企業の例から分かるように，一口に「行動頻度が収束する」といっても，場合によってその「収束」の意味は大きく異なり，信念が収束する(つまり経済主体がある特定のパラメータ θ が真の値であると認識する)ケースと，信念が収束しない(つまり学習がいつまでたっても終らない)ケースが存在する．バーク・ナッシュ均衡のアイデアを応用で用いる場合には，この点に注意を払う必要があるだろう．

6．収束・非収束の判定方法

これまでに何度か述べた通り，一般にバーク・ナッシュ均衡であることは収束のための必要条件ではあるが，十分条件ではない．特に，本稿では各具体例において「行動(ないし行動頻度)がバーク・ナッシュ均衡に収束する」と簡単に述べてきたが，この収束することをキチンと証明するためには，動学的なベイズ学習モデルに立ち戻って，経済主体の取る行動や信念が時間を通じてどう変化してゆくかについて分析しなければならない．しかしながら，ベイズ学習モデルにおいて観察される情報 y には確率的なノイズが含まれるため，信念や行動も確率的に変化してゆくこととなり，このような確率変数の時間を通じた挙動を分析するのは一般には非常に困難である．この分析を大幅に簡略化する方法を提案したのが，Esponda, Pouzo, and Yamamoto(2021)である．

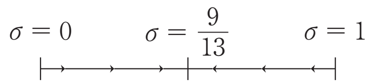
具体的には彼らは，本来確率的に変化するはずの行動頻度 σ の時間を通じた変化が，(漸近的には)確率的なノイズを含まない微分包含式

$$\dot{\sigma}(t) \in \bigcup_{\tilde{\sigma} \in \triangle(\cup_{\mu \in \triangle\Theta(\sigma(t))} X(\mu))} (\tilde{\sigma}-\sigma(t)) \quad (7)$$

で近似できることを示した．ここで，$X(\mu)$ は，信念 μ を所与としたときに利潤を最大化するような行動 x の集合を表すものとする．直観的には，これまでの行動頻度が $\sigma(t)$ であったとすると，現在の信念はほぼ確実に，カルバック・ライブラー情報量を最小化するパラメータ，すなわち $\Theta(\sigma(t))$ に収束しているはずである．つまり，現在の信念は $\mu \in \triangle\Theta(\sigma(t))$ で近似できる．従って今期選ばれる行動は $X(\mu)$ から選ばれるはずであり，従って行動頻度はその方向に向かって変化してゆくはずである．この過程を描写したものが，微分包含式(7)である．(従って大雑把に言えば，この式に出てくる $\tilde{\sigma}$ は，「これまでの行動頻度が $\sigma(t)$ であったときに今期選ばれる行動」を表している．)なおこの微分包含式(7)の導出に関しては，現代経済学の潮流 2021(近日刊行予定)に解説文が掲載予定であるので，興味のある方はそちらもご覧いただきたい．

上記の微分包含式を用いることで，数々の具体例において，行動頻度が収束するかしないかを判定することができる．例えば，第 5.3 節で考えた独占企業のモデルを考えよう．このモデ

図1. $\sigma(t)$ **の挙動**



ルでは，低価格 $x=2$ と高価格 $x=3$ という二種類の行動しかないので，表記を単純化して，低価格 $x=2$ の頻度を σ，高価格 $x=3$ の頻度を $1-\sigma$ で表すことにしよう．この行動頻度 σ が微分包含式(7)に従って変化してゆくとすると，その挙動は以下のように図示できる[9]．

この図から，初期値の値によらず，微分包含式の解はバーク・ナッシュ均衡 $\sigma=\frac{9}{13}$ に収束していくことが分かるだろう．よってこの例では，任意の信念 μ^1 のもとで，行動頻度は確率1で $\sigma=\frac{9}{13}$ に収束することになる．また第5.1で考えた Θ が連続なケースにおいても，上記の図とほぼ同じ図を書くことでき，従って行動頻度がバーク・ナッシュ均衡に収束してゆくことを証明できる．

では，第4.1節で考えたマネージャーの例についてはどうだろうか．結論から言うと，この例でも微分包含式を用いて収束の証明をすることができるのだが，独占企業の例のように一筋縄ではいかない．その原因は，このマネージャーの例においては選択しうる行動の集合 X が無限であり，行動頻度 $\sigma\in\triangle X$ が無限次元のベクトルとなってしまうことにある．このとき微分包含式(7)は無限次元の問題となってしまい，これを解くのは現実的ではない．

このようなケースでは，行動頻度 $\sigma(t)$ の挙動を考えるのではなく，それに付随して決まるパラメータ $\Theta(\sigma(t))$ の挙動を考えることがしばしば有効である．特にこのマネージャーの例においては(i)任意の σ に対して $\Theta(\sigma)$ は一つの要素からなる集合である(つまりカルバック・ライブラー情報量の最小化問題が唯一解を持つ)かつ，(ii)パラメータ θ は一次元の実数値であるため，$\Theta(\sigma(t))$ の挙動は図1と同じく一次元上の図で描写できる．この証明についての解説は，現代経済学の潮流に掲載予定であるので，ご興味のある方はそちらを参照いただきたい．

なお，実際に応用例を考えるにあたっては上記の条件(i)および(ii)が満たされていることが非常に多いが[10]，実はそのような場合には必ず，行動頻度と信念が(純粋ないし混合)バーク・ナッシュ均衡に収束することが知られている．直観的には，条件(i)および(ii)が満たされているときは $\Theta(\sigma(t))$ の挙動は一次元上の自励系システムとして描写できるのだが，そのような自励系システムの図を色々と書いてみると，永遠に振動し続けることはありえず，必ずどこかに収束するということが確認できる．詳しい証明については，Heidhues, Kőszegi, and Strack (2020) や Esponda, Pouzo, and Yamamoto (2019) を参照いただきたい．

定理5. 任意の σ に対して $\min_{\theta\in\Theta}K(\theta,\sigma)$ が唯一解を持ち，かつ $\Theta=[0,1]$ であるとする．このとき，経済主体の信念及び行動頻度は，確率1でバーク・ナッシュ均衡に弱収束する．

(一橋大学経済研究所)

注

1) 実際，マクロ経済，金融，行動経済学などの分野では既にいくつかの論文が発表されている．Cho and Kasa (2017)，Molavi (2020)，He (2019) などを参照されたい．

2) 本稿では詳しく述べないが，一番目と二番目のケースの中間的なケース，つまり「経済主体の行動は収束しないが，行動頻度は退化的な分布 1_x に収束する」ということも起こりうる．詳しくは Esponda, Pouzo, and Yamamoto (2021) を参照されたい．

3) 本稿では議論をシンプルにするために一人の経済主体しか存在しないと仮定しているが，Esponda and Pouzo (2016) は複数の経済主体がいるときのバーク・ナッシュ均衡の定義なども与えている．

4) 本稿で紹介する結果は，経済主体が非近視眼的なケースにもほぼそのまま拡張可能である．例えば，マネージャーの例や独占企業の例においては，たとえマネージャーや企業が非近視眼的であったとしても，確率1でバーク・ナッシュ均衡への収束が起こる．これは，これらの例で identifiability と呼ばれる条件が満たされているためである．詳しくは，Esponda, Pouzo, and Yamamoto (2021) を参照されたい．

5) 仮定(iii-c)より，現実に起こりうる全ての結果 y は主観的なモデル q^θ の下でも正の確率で発生することになり，従って(1)で定義されている信念は well-defined であることに注意されたい．

6) しかしながら，数学で厳密に定義される距離の

概念とは異なる点が二つある．一つは，対称性を満たさない，つまり，$Q(x)$ と $Q^{\theta}(x)$ の間のカルバック・ライブラー情報量と，$Q^{\theta}(x)$ と $Q(x)$ の間のカルバック・ライブラー情報量は必ずしも一致しないことである．二つ目は，いわゆる三角不等式を満たさないことである．このため，カルバック・ライブラー情報量は，「分布間の擬距離」とも呼ばれる．

7) 混合バーク・ナッシュ均衡を最初に提唱したのは Esponda and Pouzo(2016) であるが，後に Esponda, Pouzo, and Yamamoto(2021) がより一般的な定式化をしたので，本稿ではこちらの定義を採用している．

8) 実際，Berk の示した定理 1 は，$\Theta(x)$ が複数のパラメータを含むときには信念が収束することを意味しないことに注意されたい．より正確には，この定理は信念がパラメータ集合 $\Theta(x)$ に確率 $1-\varepsilon$ を与えることは保証しているが，このパラメータ集合上でどのような挙動を示すのかについては何も述べていない．

9) 第 5.3 節で説明した通り，$\sigma<\frac{9}{13}$ のときは $\Theta(\sigma)=\{3\}$ であり，このパラメータ $\theta=3$ を所与としたときの最適な価格は $x=2$ である．このことから，σ が微分包含式(7)に従って変化するならば，$x=2$ の選ばれる頻度 σ は時間を通じて増加してゆく．これは図において右向きの矢印で表現されている．同様に，$\sigma>\frac{9}{13}$ のときは $\Theta(\sigma)=\{2\}$ であり，このパラメータ $\theta=2$ を所与としたときの最適な価格は $x=3$ である．このことから，σ が微分包含式(7)に従って変化するならば，$x=2$ の選ばれる頻度 σ は時間を通じて減少してゆく．これは図において左向きの矢印で表現されている．

10) 条件(i)が満たされるための十分条件は，任意の行動 x を所与としたときのカルバック・ライブラー情報量 $K(\theta, x)$ が θ に関する強凸関数であることである．

参 考 文 献

Berk, R. H. (1966) "Limiting Behavior of Posterior Distributions when the Model is Incorrect," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 37, No. 1, pp. 51–58.

Cho, I-K. and K. Kasa (2017) "Gresham's Law of Model Averaging," *American Economic Review*, Vol. 107, No. 11, pp. 3589–3616.

Esponda, I. and D. Pouzo (2016) "Berk-Nash Equilibrium: A Framework for Modeling Agents with Misspecified Models," *Econometrica*, Vol. 84, No. 3, pp. 1093–1130.

Esponda, I., D. Pouzo, and Y. Yamamoto (2021) "Asymptotic Behavior of Bayesian Learners with Misspecified Models," forthcoming in *Journal of Economic Theory*.

Fudenberg, D., G. Lanzani, and P. Strack (2021) "Limit Points of Endogenous Misspecified Learning," forthcoming in *Econometrica*.

Fudenberg, D., G. Romanyuk, and P. Strack (2017) "Active Learning with a Misspecified Prior," *Theorectical Economics*, Vol. 12, pp. 1155–1189.

He, K. (2019) "Mislearning from Censored Data: The Gambler's Fallacy in Optimal-Stopping Problems," Working Paper.

Heidhues, P., B. Koszegi, and P. Strack (2018) "Unrealistic Expectations and Misguided Learning," *Econometrica*, Vol. 86, Issue 4, pp. 1159–1214.

Heidhues, P., B. Koszegi, and P. Strack (2020) "Convergence in Models of Misspecified Learning," forthcoming in *Theoretical Economics*.

Molavi, P. (2020) "Macroeconomics with Learning and Misspecification: A General Theory and Applications," Working paper.

Nyarko, Y. (1991) "Learning in Mis-Specified Models and the Possibility of Cycles," *Journal of Economic Theory*, Vol. 55, Issue 2, pp. 416–427.

White, H. (1982) "Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models," *Econometrica*, Vol. 50, No. 1, pp. 1–25.