経済研究
Vol. 72, No. 2, Apr. 2021

小特集：規範・制度・メカニズムデザイン

異時点間選択理論の新展開

武　岡　則　男*

異時点間選択において経済学では指数割引効用が標準モデルとして用いられてきた．その一方で，記述理論としての指数割引モデルに対しては，実験や実証を通して，多くの反例が提示されてきた．本稿では，共通時間差効果，金額効果，リスク回避度と異時点間代替性の分離性，株式プレミアム・パズルとリスクフリーレート・パズル，時間に関する非分離性，時間くじへの危険回避度など，指数割引モデルへの様々な反例に対して，どのような一般化が考えられてきたのかを概観する．特に金額効果(将来の大きな利得ほど割引されにくい性質)を説明するモデルとして，著者自身の研究である Noor and Takeoka (2020) の共感費用型割引効用について解説する．
JEL Classification Codes: D11, D81, D91

1. はじめに

時間割引要素，あるいは時間選好率は異時点間選択に影響する重要な選好要素である[1]．経済学の標準モデルでは，指数割引が用いられてきた．(Samuelson (1937), Koopmans (1972)) 割引要素が時間と独立した定数として与えられる単純さと，指数割引の持つ定常性とそこから導かれる時間整合性のため，指数割引効用は扱いやすい動学モデルと考えられている．一方で記述理論としての指数割引モデルに対しては多くの反例が提示されてきた．最も有名な反例は，共通時間差効果，あるいは異時点間の選好逆転と呼ばれる定常性に矛盾する選好パターンであろう．それに対して，非定常性を許容する双曲割引や準双曲割引が提案されてきた．(Loewenstein and Prelec (1992), Laibson (1997))

本稿では，指数割引モデルへの様々な反例に対して，どのようなモデルの一般化が考えられてきたのかを解説する．異時点間選択や時間選好率の研究についての網羅的サーベイは，すでに Loewenstein and Prelec (1992), Fredrick *et al.* (2002), Cohen *et al.* (2020) など優れた論文がある．本稿では共通時間差効果，金額効果，リスク回避度と異時点間代替性の分離性，株式プレミアム・パズルとリスクフリーレート・パズル，時間に関する非分離性という比較的古典的なトピックスに加え，時間くじへの危険回避度に関する最近の研究にしぼって異時点間選択の研究を概観する．特に金額効果を説明するモデルについて，著者自身の最近の研究を紹介したい．

異時点間選択の実験で観察される金額効果は，将来の大きな利得ほど割引されにくい傾向を示している．(Thaler (1981)) 例えば，同じ個人が1年後の60ドルは現在の15ドルの価値，1年後の4000ドルは現在の3000ドルの価値があると表明したとする．金額＝利得と単純に仮定すれば，この選好から導かれる現在と比較した1年後の利得の割引関数はそれぞれ15/60＝0.25と3000/4000＝0.75である．60ドルの割引関数に比べて4000ドルの割引関数ははるかに大きい．

Noor and Takeoka (2020) は，現在の自己による将来の自己への共感の割り振りという認知的最適化によって割引関数が決定されるモデルを考察している．このような仮説に基づくと，将来利得が大きいほど，現在の自己が将来の自

己に共感し，その立場に立って考えるインセンティブは強まると考えられる．このようなメカニズムによって，将来の大きな利得ほど割引されにくいという金額効果を解釈することができる．一方，将来の自己への共感は，現在の利己性を抑制する点で，心理的負担を伴う作業である．最適な割引関数は，高い共感を割り当てることで将来利得をより高く評価する側面と，それに伴う認知費用のトレードオフを解くことで得られる．この点で Noor and Takeoka(2020) は，多重自己モデル(Strotz(1955))に自制の要素を組み込む試みとみることもできる[2)]．

本稿の構成は次の通りである．第 2 節では，基本となる指数割引効用の定式化を説明する．以降は指数割引への様々な反例とそれを解決する一般化モデルを紹介していく．第 3 節では，共通時間差効果によって表現される非定常性，および現在バイアスについて説明し，非定常性を許容する一般的な割引効用，および双曲割引に触れる．定常性を満たさない割引効用には，動学的非整合性の問題が現れる．現在バイアスと動学的整合性を両立させるモデルとして，Gul and Pesendorfer(2004)について詳述する．割引効用モデルでは，リスク態度と異時点間代替への選好に意図しない相関が生まれることがわかっている．第 4 節では，割引効用モデルを一般化して，この二つの選好を分離できる Kreps and Porteus(1978)のモデルを説明し，関連の深い割引効用の反例である株式プレミアム・パズル(Mehra and Prescott(1985))とリスクフリーレート・パズル(Weil(1989))を紹介する．第 5 節では，Wakai(2008)に基づいて，時間に関する分離性に矛盾する選好パターンと整合的な再帰型モデルを解説する．現在消費からの効用を参照点として，それよりも将来効用が増加するか減少するかに応じて異なる割引率が適応される性質により，異時点間の効用変動を回避する傾向が現れることを見る．第 6 節では，指数割引に関する新しい反例として，時間くじに関するリスク態度の研究を行った DeJarnette *et al.*(2020)を紹介する．時間くじとは，利得は同じだが，それがもらえるタイミングのみが異なるくじのことをいう．指数割引効用を仮定すると，時間くじに対して必ずリスク志向的になるが，実験の結果とは必ずしも整合的ではない．第 7 節では，著者自身の研究紹介として Noor and Takeoka(2020)で提案された認知的最適化を伴う割引効用モデル(共感費用型割引効用)を説明する．最後に結論と展望を述べたい．

2. 指数割引効用

離散時間を仮定し，$t=0,1,\cdots,T+1$ とする．ただし，T は自然数，または ∞ とする．各期の消費集合を $C=[0,\bar{c}]\subset\mathbb{R}_+$ とする．また，Δ を C 上の単純くじの集合とし，その要素を $p,q,\cdots$ などと表記する．消費流列の集合を $X=\Delta^{T+1}$ と表記する．消費流列の集合 X の典型的な要素を $x=(x_0,x_1,\cdots,x_T)$ と表記する[3)]．選好関係として，X 上に $\succsim$ を仮定する．

消費流列上の選好について，最も標準的な効用関数は指数割引効用モデルである．(Koopmans(1972))

定義 1(指数割引効用)　$\succsim$ が指数割引効用による表現 (u,δ) を持つとは，連続で単調増加な *VNM* 関数 $u:C\to\mathbb{R}$ と，割引要素 $\delta\in(0,1)$ が存在して，選好が効用関数

$$U(x)=u(x_0)+\sum_{t\geq 1}\delta^t u(x_t)$$

によって表現されることをいう．ただし，$u(x_t)$ はくじ x_t の期待効用である．

指数割引効用の特徴は，t 期の割引要素が t に関わらず$\delta\in(0,1)$ で一定である点にある．選好レベルでは，指数割引効用は定常性と呼ばれる性質を含意する．つまり，T 期の消費がゼロである任意の消費流列 x,y と消費レベル $c\in C$ について，

$$x\succsim y\Longleftrightarrow cx\succsim cy$$

である．ただし，cx は消費流列 $(c, x_0, \cdots, x_{T-1}) \in X$ を表す[4)]．定常性は，消費を先送りしても選好順序が変化しない性質と解釈できる．

各期効用を表す u は，確定的消費流列 $X = C^{T+1}$ 上では異時点間の代替弾力性に関わっている．例えば，凹関数の u を考えれば，$U(x) = U(y)$ は，

$$\begin{aligned} U(\alpha x + (1-\alpha)y) &= u(\alpha x_0 + (1-\alpha)y_0) \\ &\quad + \sum \delta^t u(\alpha x_t + (1-\alpha)y_t) \\ &\geq \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y) \\ &= U(x) \end{aligned}$$

を導く．消費流列の凸結合をとることは，異時点間の消費のばらつきを平準化する操作であるから，u の凹性は時間を通じた消費平準化への選好度合いを表していることになる．

割引要素と異時点間代替弾力性の両方が個人の忍耐強さに関わっている点に注意する必要がある．例えば，$(u(x), \delta) = (x, 0.8)$ と $(v(x), \gamma) = (\sqrt{x}, 0.7)$ という二種類の指数割引効用の異時点間選択を考えてみる．割引要素だけをみると前者のほうが我慢強い選択をしそうであるが，u が線形であるので，利子率によっては，すべての資産を現在消費するという極端に現在重視な選択が行われる．一方，後者ではゼロ消費の限界効用が無限大であるから，すべての期で消費が正になるような将来も考慮した選択が行われることになる．

また，いま考えているような単一選好の静学モデルを拡張し，同一の (u, δ) からなる指数割引効用 U_t を各時点に仮定するような動学的モデルを考えれば，これらの効用関数族は再帰性を持つ．つまり，

$$U_t(x^t) = u(x_t) + \delta U_{t+1}(x^{t+1})$$

のように記述することができる．ただし $x^t = (x_t, \cdots, x_T)$ である．効用関数族が再帰性を持つことと，選好群が動学的整合性を満たすことは同値であるから，指数割引効用モデルでは，0 期の効用関数 U_0 に基づいて最適消費計画を求めさえすれば良いという意味で，最適解の特徴付けが容易である．

3. 定常性の矛盾

3.1　共通時間差効果と割引効用

記述モデルとしての指数割引効用に対しては，実証を通して多くの反例が報告されてきた．本節では，共通時間差効果に着目する．共通時間差効果(common difference effect) と呼ばれる反例は，定常性への矛盾を示すものである．二つの消費レベルを $c < \hat{c}$ と仮定しよう．τ 期に c を与え，それ以外の期に 0 を与えるような消費流列を c^τ と表記する．期間 s と時間差 t について，

$$c^0 > \hat{c}^s \text{ かつ } c^t < \hat{c}^{t+s}$$

のような選好パターンを共通時間差効果，または異時点間の選好逆転と呼ぶ．前者は早い時期の少ない消費 c と遠い時期の多い消費 $\hat{c}$ というトレードオフを比較した時に示される現在重視な選好である．一方で，同じ消費が t 期間だけ先送りされたのが後者の選択肢であるが，この時は遠い時期の多い消費の方が選択されることを示している．この選好逆転の原因は個人の現在バイアスと考えられている．特に動学的モデルにおいて，各期の選好の非定常性と不変性を考慮すると，動学的非整合性が現れる．多期間の選好間に動学的非整合性がある場合には，消費計画はその後に実行される保証はなく，0 期に最適消費計画を立てるだけでは不十分となる．このような理由で，経済学と心理学の両分野で研究者の関心を集めてきた．(Ainslie (1992) や Loewenstein and Prelec (1992) を参照)

共通時間差効果のような非定常性を許容するためには，指数割引よりも一般的な割引関数を持つ効用関数表現を考えば良い．

定義 2(割引効用)　$\succsim$ が割引効用による表現 (u, D) を持つとは，連続で単調増加な *VNM*

関数 $u: C \to \mathbb{R}$ と，t について減少的な割引関数 $D(t) \in [0,1]$ で $\sum_{t \geq 1} D(t) < \infty$ を満たすものが存在して，選好が効用関数

$$U(x) = u(x_0) + \sum_{t \geq 1} D(t) u(x_t)$$

によって表現されることをいう．

割引効用の下では，t 期の割引要素は $\frac{D(t+1)}{D(t)}$ となるため，指数割引と異なり，一般に t に依存する．よって，定常性を満たすとは限らない．

指数割引モデルは $D(t) = \delta^t$ の場合である．また，双曲割引は $D(t) = \frac{1}{1+t}$ によって与えられる．（Loewenstein and Prelec(1992)）その他，準双曲割引(β-δ モデル)も割引効用の特殊形である．（Laibson(1997) や O'Donoghue and Rabin(1999) を参照）

前述した通り，一般の割引効用と各時点の選好の不変性を仮定すると，その選好群は動学的整合性を満たさず，初期時点の消費計画が事後的に実行される保証はない．そのような個人の通時的消費行動を記述する方法の一つは，各時点の選好を同じ個人の別人格だと解釈し，消費流列の選択を個人内ゲームとして捉えることである．このようなモデル化を多重自己(multiple selves)モデルと呼ぶ．もし現在の自己が将来の自己の選好を正しく予想できる(洗練性と呼ばれる仮定)とすると，現在の自己は将来の自己の行動を織り込んだ上で，消費計画を選択するだろう．特に，将来自己の行動を制約するために，あえて自由度の少ない消費計画を選ぶ(コミットメントへの選好)が現れうるのが特徴である．このような個人内ゲームの部分ゲーム完全均衡として，個人の消費行動を記述することができる．

3.2 誘惑と自制の意思決定

定常性に矛盾する共通時間差効果と整合的であり，かつ動学的整合性を満たすような効用関数のモデルとして Gul and Pesendorfer(2004)(以降 GP)を紹介する．動学的整合性を満たす効用関数族は再帰的に記述することができ，動的計画法などの手法を用いて比較的容易に最適消費計画を導出することができるのが利点である．

3.2.1 動学的自制効用関数

GP モデルで現在バイアスのような非定常性と動学的整合性が両立可能なのは，消費流列の上の選好ではなく，消費流列の機会集合にまで選択肢の範囲を拡張し，その上の選好を考えるためである．C を各期の消費集合とし，コンパクト距離空間と仮定する．また任意のコンパクト距離空間 X に対して，$\Delta(X)$ を X 上のボレル確率測度の集合，$\mathcal{K}(X)$ を X のコンパクト部分集合の集合とする．$\Delta(X)$ の要素はくじ，$\mathcal{K}(X)$ の要素は機会集合と解釈する[5]．この環境では，次のような再帰性を満たすコンパクト距離空間 Z が存在する．

$$Z \simeq \mathcal{K}(\Delta(C \times Z)).$$

記号 $\simeq$ は二つの空間が位相同型であることを示している．選択肢 $z \in Z$ は，$C \times Z$ 上のくじからなる機会集合である．この機会集合からくじ μ を選び，そのリスクが解消するとその期の消費 c と来期の機会集合 $z' \in Z$ が決定される．後はこのプロセスを再帰的に適応すれば良い．例としては，$z \in Z$ は異時点間の予算制約と考えれば良い．この選択肢集合 Z 上の選好 $\succsim$ を仮定する．

GP は $\succsim$ の効用関数表現として以下のような動学的自制効用関数を提案し，その公理的基礎を与えている．$\Delta(C \times Z)$ 上の連続で線形な効用関数 U, V が存在して，$\succsim$ は

$$W(z) = \max_{\mu \in z} \left\{ U(\mu) - \left(\max_{\eta \in z} V(\eta) - V(\mu) \right) \right\} \tag{1}$$

によって表現される．さらに，U と V は次のような具体型で記述される．

$$U(\mu)=\int(u(c)+\delta W(z'))\mathrm{d}\mu(c,z'), \tag{2}$$

$$V(\mu)=\int v(c)\mathrm{d}\mu(c,z')=\int v(c)\mathrm{d}\mu^1. \tag{3}$$

ただし，μ^1 は μ の C への周辺分布である．

まず $\succsim$ の効用関数表現である(1)式を順を追って解釈していこう．はじめに，U は特定のくじにコミットメントしたときの効用を表現する．実際，$z=\{\mu\}$ としてみると，(1)式は，$W(\{\mu\})=U(\mu)$ となる．この U のことをコミットメント効用関数と呼ぶ．一方，V は誘惑効用と解釈される．この解釈を前提とすると，$\max_z V-V(\mu)$ という項は，z という機会集合から μ を選択するときの自制コストと解釈できる．まず，この項は非負であることに注意しよう．この個人が，機会集合の中の最も誘惑的な選択肢から影響を受けるとすると，V は誘惑を表す効用関数なので，$\max_z V$ を満たす選択をしたいという誘惑を持つ．誘惑を最大化する選択肢 μ^T を選ぶと，$\max_z V-V(\mu^T)=0$ となる．つまり，全く自制を行わない時には，この項はゼロとなる．一方，誘惑に逆らった自制的選択を行うということは，V の値の小さなものを選択することを意味し，従って，$\max_z V-V(\mu)$ という項は自制の程度によって大きくなっていく．以上の議論より，この項は自制コストと解釈できるのである．結局(1)式が述べていることは，機会集合 z が与えられた時，この個人は選択肢のコミットメント効用からその選択をする時に発生する自制コストを差し引いた純便益を最大化するように z からの選択を行い，その価値関数(又は間接効用関数)として，機会集合の評価が決まるということである．このように，GP モデルでは，誘惑を受ける状況で，どの程度自制を行うかを合理的に選択するような個人が表現されているのである．

さらに，(2)式は U の具体的な形状を指定している．U は今日の消費からの効用 $u(c)$ と来期以降の機会集合の割引効用 $\delta W(z')$ の期待値として与えられている．来期以降の機会集合の評価が再び W になっていることからわかる通り，このモデルは再帰性を持つ．一方，(3)式は誘惑効用の具体的形状を指定する．この関数の形状が個人が何から誘惑を受けるのかを決めることになる．(3)式からわかる通り，誘惑に影響するのは今期の消費のみであり，将来の機会集合は誘惑の観点から完全に無視される．よって，個人は現在の消費だけを気にするような近視眼的な誘惑を受けることになり，現在バイアスと整合的なモデルとなる．

3.2.2 共通時間差効果の説明

GP モデルは再帰型効用関数であるため，動学的整合性を満たす．その一方で，共通時間差効果を説明できることを以下の例で確認しよう．C を実数のコンパクト集合とする．参照レベルの消費として 0 をとると，毎期 0 を消費する消費流列は機会集合 $z_0=\{(0,\{(0,\{\cdots\})\})\}$ として表現できる．今日 100(または 120)を消費し，それ以降 0 の消費をする消費流列は $\{(100,z_0)\}$ (または $\{(120,z_0)\}$)のように表記する．次のように二種類の機会集合を定義しよう．

$$\{(100,z_0),(0,\{(120,z_0)\})\}, \tag{4}$$

$$\{(0,\{(100,z_0)\}),(0,\{(0,\{(120,z_0)\})\})\}. \tag{5}$$

機会集合(4)は，今日 100 を消費するか，明日 120 を消費するかという異時点間のトレードオフを含んでいる．一方，機会集合(5)は，機会集合(4)の選択肢を一期間だけ共通に先送りすることによって得られることに注意する．共通時間差効果は，機会集合(4)から $(100,z_0)$，機会集合(5)からは $(0,\{(0,\{(120,z_0)\})\})$ を選

ぶような選択パターンである．

この選択パターンを GP モデルを使って合理的に説明してみたい．機会集合(4)では，最大の誘惑は $v(100)$ で決まる一方，機会集合(5)では二つの選択肢でともに現在消費は 0 なので，誘惑レベルは $v(0)$ である．動学的自制効用関数を使って共通時間差効果を説明するには，

$$\begin{aligned}&u(100)-(v(100)-v(100))\\&\quad>\delta u(120)-(v(100)-v(0)),\\&\delta u(100)-(v(0)-v(0))\\&\quad<\delta^2 u(120)-(v(0)-v(0))\end{aligned}$$

が同時に成り立てば良い．ここでは，コミットメント効用と自制コストの差の最大化が常に行われており，自制選好自体は変化していない．つまり，動学的整合的モデルである．代わりに，機会集合に応じて誘惑の程度が変化しており，従って，自制コストが変化していると考える．不等式を整理すると，

$$\begin{aligned}&u(100)+v(100)>\delta u(120)+v(0),\\&u(100)<\delta u(120)\end{aligned}$$

が得られる．この不等式は

$$\begin{aligned}&\delta u(120)-u(100)>0\\&\quad>\delta u(120)-u(100)-(v(100)-v(0))\end{aligned}$$

のように書けるので，誘惑の効用差 $v(100)-v(0)$ が $\delta u(120)-u(100)$ よりも大きければ両立可能であることがわかる．

4. リスク態度と異時点間代替

2 節で説明された通り，割引効用モデルの $u:C\to\mathbb{R}$ は異時点間代替弾力性を表現するだけでなく，リスク態度も表現している．例えば，u が凹関数だとすると，異時点間選択について消費の平準化に選好を持つと同時に，くじについては危険回避的ということになる．しかし，本来この二つは独立した概念である．例えば，リスクについては中立的だが，消費の平準化について強い選好をもつ個人や，その逆に，リスクについては回避的だが，消費の平準化は気にしない個人も考えられるだろう．割引効用モデルでは，この二つに必ず特定の相関が生まれることになる．割引効用モデルを一般化し，リスク態度と異時点間代替性を分離することができるモデルを提示した研究に Kreps and Porteus (1978)やさらにその無限期間版として Epstein and Zin(1989)がある．本節では，Kreps and Porteus(1978)(以下 KP)のモデルを解説し，リスク態度や異時点間代替性と関連の深い割引効用のアノマリーである株式プレミアム・パズル(Mehra and Prescott(1985))とリスクフリーレート・パズル(Weil(1989))を紹介する．

4.1 Kreps-Porteus 型効用関数

KP モデルでは，異時点間のリスク解消のタイミングを区別することが重要になるため，選択肢集合として Δ^{T+1} ではなく，次のような帰納的方法で選択肢集合を構成する．まず各期の消費集合 C をコンパクト距離空間とする．$D_{T-1}=C\times\Delta(C)$ という定義から始めて，次に $D_{T-2}=C\times\Delta(D_{T-1})$ とする．順次，$D_t=C\times\Delta(D_{t-1}),\ t=1,2,\cdots,T-1$ とすることで，最終的に D_0 を得る．一般に D_t の要素を $d_t=(c_t, m_{t+1})$ と表記する．このような構成法により，リスクが時間を通じて徐々に解消してく状況，および異時点間リスクの期間を通じた相関を捉えることができる．選好群 $\succsim_t$ は各 D_t 上に定義される．

選好群 $\{\succsim_t\}_{t=0}^{T-1}$ を表現する Kreps-Porteus 型効用関数とは，次のような再帰性をもつ $\{U_t(d_t)\}_{t=0}^{T-1}$ である．

$$U_t(d_t)=W(c_t, v^{-1}(E_{m_{t+1}}[v(U_{t+1}(d_{t+1}))])). \tag{6}$$

または，$V_t=v(U_t)$ とすると，

$$V_t(d_t)=\widehat{W}(c_t, E_{m_{t+1}}[V_{t+1}(d_{t+1})]) \tag{7}$$

も同値な表現である．関数形(6)に基づいて，選択肢の評価方法を解説する．まず，v は将来効用の変動リスクに対する危険態度を表す VNM 関数である．また，$v^{-1}(E_{m_{t+1}}[v(U_{t+1}(d_{t+1}))])$ はそのリスク m_{t+1} の確実性等価を表す．一方，$W(c,z)$ は今日の消費 c と来期以降の確定した効用 z の間の異時点間代替性を捉える関数である．このように KP モデルでは，リスク態度 v と異時点間代替性 W を異なるパラメータを用いて表現することができる．

C を実数の区間とし，KP 型効用関数の W を $W(c,z)=u^{-1}(u(c)+\delta u(z))$ のように特定化すると，効用関数は

$$U_t(d_t)=u^{-1}(u(c_t)+\delta u(v^{-1}(E_{m_{t+1}}[v(U_{t+1}(d_{t+1}))])))$$

のように書ける．さらに，$u=v$ のとき，

$$\begin{aligned}U_t(d_t)&=u^{-1}(u(c_t)+\delta E_{m_{t+1}}[u(U_{t+1}(d_{t+1}))])\\&=u^{-1}\Big(u(c_t)+\delta E_{m_{t+1}}\sum_{\tau=t+1}^{T}\delta^{\tau-(t+1)}u(c_\tau)\Big)\end{aligned}$$

となり，指数割引効用と同値になることがわかる．

応用上よく使われる便利な (v,W) の特殊化は，v として $v(z)=z^\alpha, 0<\alpha<1$，のような CRRA 型の関数，$W$ として $W(c,z)=(c^\rho+\beta z^\rho)^{1/\rho}, 0<\rho<1$，のような CES 型関数を考えることである．この時 KP 型効用関数は

$$U_t(d_t)=\Big(c_t^\rho+\delta(E_{m_{t+1}}[U_{t+1}(d_{t+1})^\alpha])^{\frac{\rho}{\alpha}}\Big)^{\frac{1}{\rho}} \tag{8}$$

のように与えられる．この特定化では，$0<\alpha<1$ であるから，リスク回避的であり，小さな α ほどリスク回避度が大きくなる．また，$0<\rho<1$ であるから，消費の異時点間平準化への選好を持ち，ρ が小さいほど，その程度が大きい．最後に $\alpha=\rho$ の場合が指数割引効用に対応することに注意してほしい．

4.2　リスクの解消に対する態度

KP 型効用関数の特徴は，v と W の強度に応じて，異時点間リスク解消への態度について含意が得られる点にある．任意の d_{t+1}, d'_{t+1} と c_t, c_{t-1} と $\lambda\in[0,1]$ について，

$$\begin{aligned}m_{t+1}&=\lambda\circ d_{t+1}+(1-\lambda)\circ d'_{t+1},\\m_t&=\lambda\circ(c_t,d_{t+1})+(1-\lambda)\circ(c_t,d'_{t+1})\end{aligned}$$

と定義する．ただし，$\lambda\circ d_{t+1}+(1-\lambda)\circ d'_{t+1}$ は d_{t+1} が確率 λ，d'_{t+1} が確率 $1-\lambda$ で実現するくじである．ここで，二つの選択肢

$$\begin{aligned}d^L_{t-1}&=(c_{t-1},(c_t,m_{t+1})),\\d^E_{t-1}&=(c_{t-1},m_t)\end{aligned}$$

を比較する．$t+1$ 期に実現する可能性のある結果（d_{t+1} か d'_{t+1}）は同じであるが，d^E_{t-1} のほうが d^L_{t-1} よりもそのリスクが早く解消する．

$\{\succsim_t\}_{t=0}^{T-1}$ がリスクの早期解消への選好を持つとは，

$$d^E_{t-1}\succsim_{t-1}d^L_{t-1}$$

が成り立つことを言う．(7)のように表現される KP 型効用関数を用いると，リスクの早期解消への選好は，

$$\begin{aligned}&V_{t-1}(d^E_{t-1})\geq V_{t-1}(d^L_{t-1})\\\Longleftrightarrow\ &\widehat{W}_{t-1}(c_{t-1},\lambda\widehat{W}_t(c_t,V_{t+1}(d_{t+1}))\\&\quad+(1-\lambda)\widehat{W}_t(c_t,V_{t+1}(d'_{t+1})))\\&\geq\widehat{W}_{t-1}(c_{t-1},\widehat{W}_t(c_t,\lambda V_{t+1}(d_{t+1})\\&\quad+(1-\lambda)V_{t+1}(d'_{t+1})))\\\Longleftrightarrow\ &\lambda\widehat{W}_t(c_t,V_{t+1}(d_{t+1}))\\&\quad+(1-\lambda)\widehat{W}_t(c_t,V_{t+1}(d'_{t+1}))\\&\geq\widehat{W}_t(c_t,\lambda V_{t+1}(d_{t+1})\\&\quad+(1-\lambda)V_{t+1}(d'_{t+1}))\\\Longleftrightarrow\ &\widehat{W}_t(c_t,\cdot)\ \text{は凸関数}\end{aligned}$$

のような含意を持つことがわかる．同様の議論により，$\widehat{W}_t(c_t,\cdot)$ が凹関数の場合はリスクが遅く解消されるほうを好み，$\widehat{W}_t(c_t,\cdot)$ が線形関数の場合はリスク解消のタイミングについて無差別になることがわかる．

KP 型効用関数の (v,W) を CRRA 型と CES 型に特定化すれば，さらに条件を単純化できる．前述した通り，KP 型効用関数は(8)のように与えられる．ここで $V_t=U_t^\alpha$ とすると，同値な効用関数

$$V_t(d_t) = \left(c_t^\rho+\delta\left(E_{m_{t+1}}[V_{t+1}(d_{t+1})]\right)^{\frac{\rho}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\rho}}$$

が得られる．特に

$$\widehat{W}(c_t,z) = \left(c_t^\rho+\delta z^{\frac{\rho}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\rho}}$$

であることに注意する．z についての二階微分の符号を調べることで，$\widehat{W}(c_t,\cdot)$ が凸関数かどうかを容易に調べることができる．実際，

$$\frac{\partial^2\widehat{W}}{\partial z^2} = -\frac{\delta}{\alpha}c_t^\rho\left(c_t^\rho+\delta z^{\frac{\rho}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\rho}-2}z^{\frac{\rho}{\alpha}-2}(\alpha-\rho)$$

となるので，

$\alpha<\rho \Longleftrightarrow W(c_t,\cdot)$ は凸関数
　$\Longleftrightarrow$ リスクが早く解消することを好む
$\alpha>\rho \Longleftrightarrow W(c_t,\cdot)$ は凹関数
　$\Longleftrightarrow$ リスクが後で解消することを好む
$\alpha=\rho \Longleftrightarrow W(c_t,\cdot)$ は線形関数
　$\Longleftrightarrow$ リスク解消の時期について無差別

となる．前述の通り，指数割引効用モデルは $\alpha=\rho$ の場合に対応するので，リスク解消のタイミングについて必ず無差別になる．

4.3　株式プレミアム・パズル

Mehra and Prescott (1985) は，1980 年ごろから過去 90 年ほどに渡るアメリカの株式平均収益率，債券平均収益率，一人あたり消費の成長率の年次データを分析し，割引効用を用いた代表的個人モデルでは，標準的なリスク回避度や割引要素の範囲でデータを説明できないことを示した．以下では Kocherlakota (1996) に従って，その概要を説明する．

次のような指数割引効用関数の下で，安全資産である債券と危険資産である株式のポートフォリオ選択，および消費選択問題を考える．

$$E_t\left[\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{\tau-t}\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right].$$

ここで u はパラメータ $\sigma>0$ をもつ CRRA 型と仮定されている．e_t を初期保有，r_t^b を債券の収益率，r_t^s を株式の収益率，c_t を t 期の消費，z_t^b を t 期の債券保有量，z_t^s を t 期の株式保有量とする．異時点間予算制約は

$$c_t = e_t+z_t^b(1+r_t^b)+z_t^s(1+r_t^s)-z_{t+1}^b-z_{t+1}^s$$

のように与えられる．最適化の一階条件から，

$$\delta E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\sigma}(1+r_{t+1}^b)\right] = 1, \tag{9}$$

$$\delta E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\sigma}(1+r_{t+1}^s)\right] = 1$$

を得る．また，これらの方程式を組み合わせて，

$$E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\sigma}(r_{t+1}^s-r_{t+1}^b)\right] = 0 \tag{10}$$

を得る．(10)式に現れる $(r_{t+1}^s-r_{t+1}^b)$ の期待値が危険資産と安全資産の収益率の差を表す株式プレミアムである．

Mehra and Prescott (1985) の主要な結果は次の通りである．パラメータを $0<\sigma\leq 10$, $0<\delta<1$ の範囲で変化させ，債券の平均収益率が 4% 以下(つまり $E_t[r_{t+1}^b]\leq 0.04$)になるように仮定すると，株式プレミアムの上限は 0.35% となる(つまり $E_t[r_{t+1}^s-r_{t+1}^b]\leq 0.0035$)．一方

現実のデータでは，株式平均収益率は 7%（$E_t[r^s_{t+1}]\simeq 0.07$），また債券平均収益率は 1%（$E_t[r^b_{t+1}]\simeq 0.01$）であり，株式プレミアムは約 6% となる．モデルではこの差を説明できない．これが株式プレミアム・パズルである．

現実の株式プレミアムがこれほど大きいのは，理論に比べ，現実の人々の危険資産への需要が低く，そのため株式価格が低すぎるためと考えられる．よって，代表的個人のリスク回避度が十分大きいと仮定すれば，株式プレミアムは説明できるのではないだろうか？　実際に，$\sigma\simeq 18$ とすれば，$E_t[r^s_{t+1}-r^b_{t+1}]\simeq 0.06$ となりデータを説明できることがわかる．しかし，その他の実証研究などから現実的な危険回避度の範囲は概ね $\sigma\leq 10$ と考えるのが妥当であり，$\sigma\simeq 18$ と設定するのは，十分に満足できる株式プレミアム・パズルの解決策とは言えない．

Mehra and Prescott(1985) と同一の設定を用いて，Weil(1989) はリスクフリーレート・パズルと呼ばれるもう一つのパズルを提出した．やや強引ではあるが，例えば，$\sigma\simeq 18$ を仮定することで，前述の株式プレミアム・パズルを解決するとする．すでに説明した通り，割引効用関数の下では，強い危険回避度は消費平準化への強い選好を含意する．よって，代表的個人は異時点間で均一の消費を好み，はじめに貯蓄を行って後で消費が増えるような成長的な消費パスを嫌うはずである．一方で，年次データでは消費の成長率は年平均で約 1.8% であり，消費の平準化と反対に，貯蓄に強い選好を持っていることがわかる．しかも，この間の債券平均収益率(利子率)は $E_t[r^b_{t+1}]\simeq 0.01$ という低い水準になっており，貯蓄への強い選好と整合的でない．これがリスクフリーレート・パズルである．

ここで KP 型効用関数を用いれば，危険回避度と異時点間代替性の程度を分離できるため，リスク回避度が大きいことが直ちに消費の平準化への強い選好を意味しない．よって，リスクフリーレート・パズルを解決できる．しかし，株式プレミアム・パズルを説明するには大きな危険回避度が必要であるという前提は変化せず，株式プレミアム・パズルは依然としてパズルのままである．(詳細は Kocherlakota(1996) を参照すること[6)]．)

5. 時間分離性の矛盾

Loewenstein and Prelec(1993) では，時間に関する分離性に対する反例が示されている．抽象的に良い選択肢，悪い選択肢をそれぞれ G, B とすると，次のような選好パターンは時間を通じて良い選択肢と悪い選択肢を分散させるような行動として理解できる．

$$(G,B,B)\prec(B,G,B),\ \text{and},$$
$$(G,B,G)\succ(B,G,G).$$

前半の二つの選択肢の 3 期目の消費 B を共通に G に置き換えたものが，後半の二つの選択肢に該当することに注意してほしい．指数割引効用や，より一般的な割引効用では時間に関して加法分離的であるため，同一期の共通の消費は選択肢を比較する際にキャンセルされるため選好に影響しないが，この例はそれに反している．

Wakai(2008) では分離性を必ずしも満たさない次のような効用関数モデルを提案している．効用関数の要素として，毎期の消費の評価関数 u と割引要素の区間 $[\underline{\delta}_{t+1},\bar{\delta}_{t+1}]\subset[0,1], t\geq 0$, を任意にとった時，消費流列の上の再帰的効用関数 U_t は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}U_t(x^t)&=\min_{\delta_{t+1}\in[\underline{\delta}_{t+1},\bar{\delta}_{t+1}]}[(1-\delta_{t+1})u(x_t)\\&\qquad+\delta_{t+1}U_{t+1}(x^{t+1})]\\&=\min_{\delta_{t+1}\in[\underline{\delta}_{t+1},\bar{\delta}_{t+1}]}[u(x_t)+\delta_{t+1}(U_{t+1}(x^{t+1})\\&\qquad-u(x_t))].\end{aligned}$$

一番目の等式のように，割引要素 δ_{t+1} は現在の消費からの効用 $u(x_t)$ と来期以降の効用 $U_{t+1}(x^{t+1})$ の加重和の係数であり，t 期の効用はこの加重和を割引要素の範囲で最小化するこ

とによって得られる．また，二番目の等式のように変形することにより，どのような δ_{t+1} がこの最小値を達成するのかを理解することができる．現在消費からの効用 $u(x_t)$ を参照点として，来期以降の効用が増加するなら，つまり $U_{t+1}(x^{t+1})-u(x_t)>0$ ならば，下限の割引要素 $\underline{\delta}_{t+1}$（つまり最大の割引率）が適応される．反対に，$U_{t+1}(x^{t+1})-u(x_t)<0$ ならば，上限の割引要素 $\bar{\delta}_{t+1}$（つまり最少の割引率）が適応される．時間を通じて効用が増加する局面ではそれをなるべく割引き，逆に効用が減少する局面ではその損失をなるべく大きく評価する訳であるから，相対的に異時点間の消費の変動をなるべく小さくすることに強い選好をもつようなモデルとなっている．このため，上で述べたような，時間を通じて良い選択肢と悪い選択肢をなるべく分散させるような選択パターンと整合的になる．

6. 時間くじへのリスク態度

DeJarnette *et al.*(2020) は，一般の消費流列ではなく，特定の1期間にだけ消費が行われるような単純な選択肢とその上のくじを考え，いつ消費を行うかというタイミングについてのリスク態度に関する研究を行っている．

6.1 指数割引効用の下での不可能性

消費空間として $C=[w,b]\subset\mathbb{R}_+$ と仮定する．また，消費時点を $t\in T\subset\mathbb{R}_+$ と表記する．選択肢として時点消費 (c,t) を考える．これは t 期に c という消費をおこなうという選択肢である．また，時点消費の上のくじ $p\in\Delta(C\times T)$ も可能な選択肢とする．選好 $\succsim$ は $\Delta(C\times T)$ 上に仮定される．

時間くじとは，消費は一定で，時点のみ異なる時点消費上のくじのことである．消費 c を伴う任意の時間くじ p に対して，

$$\bar{t}=\sum tp(c,t)$$

を c が得られる平均時間と呼ぶ．消費に関するくじへの危険態度の自然な対応概念として，時間くじについての危険態度を次のように定義できる．$\succsim$ が時間くじについてリスク回避的とは，消費 c を伴う任意の時間くじ p に対して，

$$(c,\bar{t})\succsim p$$

が成り立つことである．同様に，$\succsim$ が時間くじについてリスク志向的とは，結果 c を伴う任意の時間くじ p に対して，

$$p\succsim(c,\bar{t})$$

が成り立つことである．

では，$\succsim$ の効用関数表現として指数割引効用を仮定すると，時間くじに対してどのような危険態度を導くことになるだろうか？この設定での指数割引効用は，ある $u:C\to\mathbb{R}$ と $\delta\in[0,1]$ が存在して，

$$U(p)=E_p[\delta^t u(c)]$$

のように表現できる効用関数である．特に，c が得られる時間くじ p の効用は，$U(p)=u(c)\sum\delta^t p(x,t)$ と書ける．δ^t は t について凸関数であるため，

$$\begin{aligned}U(p)&=u(c)\sum\delta^t p(c,t)>\delta^{\bar{t}}u(c)\\&=U((c,\bar{t}))\end{aligned}$$

となり，時間くじについて必ずリスク志向的になる．しかし，時間くじに対してリスク回避的な選好も十分に考えられる．実際，DeJarnette *et al.*(2020)による実験によると，多くの被験者は時間くじに対してリスク回避的な選択パターンを示したことが報告されている．リスク回避を含め，時間くじに対する柔軟なリスク態度を取り込むためには，指数割引期待効用よりも一般的なモデルを考える必要がある．

6.2 一般的な割引効用の下での不可能性

DeJarnette *et al.*(2020)では，指数割引効用よりも一般的な効用関数表現を提示した上で，くじへの忍耐強さに関わる自然と思われる公理を追加すると，依然として時間くじについて制約的な危険回避度しか許容できないという不可能性定理を示している．

時点消費のくじ上の選好 $\succsim$ に対して，完備性と推移性以外に次の公理を仮定する．

公理 1(帰結単調性) 任意の t について，$c>c' \Longrightarrow (c,t)\succ(c',t)$．

公理 2(現在志向性) 任意の c について，$t<s \Longrightarrow (c,t)\succ(c,s)$．

公理 3(非将来志向性) 任意の $c,c'\in C$，$t,s\in T$ と $\tau>0$ について，$t<s$, $(c,t)\sim(c',s)\Longrightarrow(c,t+\tau)\precsim(c',s+\tau)$．

公理 4(独立性) 任意のくじ p,q,r と $\lambda\in[0,1]$ について，$p\succsim q\Longleftrightarrow\lambda p+(1-\lambda)r\succsim\lambda q+(1-\lambda)r$.

公理 5(連続性) 任意のくじ p について，$\{q\in\Delta(C\times T)|p\succsim q\}$ と $\{q\in\Delta(C\times T)|q\succsim p\}$ は閉集合である．

公理 1 と公理 2 は消費と時間についての選好の自然な単調性である．公理 3 の前提条件は，消費量は少ないが早く消費できる選択肢 (c,t) と消費量は多いが消費できる時期がより遠い選択肢 (c',s) がちょうど無差別になっている時は，それがさらに τ だけ共通に先送りされた場合は，より我慢強い選択が行われることを仮定している．定常性公理は選択肢の共通の先送りは選好を変化させないことを要求するので，公理 3 は定常性公理よりも弱い公理である．特に公理 3 は 3 節で解説した現在バイアスとも整合的であることに注意する．公理 4 と 5 はくじについて期待効用公理が成り立つことを要求するものである．

期待効用定理を前提にすれば，以上の公理の下で $\succsim$ は次の効用関数表現を持つことが容易にわかる．

$$U(p)=E_p[u(c,t)]. \tag{11}$$

ただし，u は連続，c について単調増加，t について単調減少，また $u(c,t)=u(c',s)$ かつ $t<s\Longrightarrow u(c,t+\tau)\leq u(c',s+\tau)$ を満たす．指数割引効用 $u(c,t)=\delta^t v(c)$ と違い，t の影響は指数割引とは限らないし，$D(t)v(c)$ のように c と t が分離されているとも限らない．そのため，時間くじに対してリスク回避を含め，柔軟なリスク態度を許容することができる．

ここでさらに次のような公理を仮定する．

公理 6(確率的現在志向性) 任意の $t_1<t_2, c_1>c_2$ について，

$$\frac{1}{2}\circ(c_1,t_1)+\frac{1}{2}\circ(c_2,t_2) \succsim \frac{1}{2}\circ(c_2,t_1)+\frac{1}{2}\circ(c_1,t_2).$$

ただし，$\frac{1}{2}\circ(c,t)+\frac{1}{2}\circ(c',s)$ は (c,t) と (c',s) が等確率で得られるくじを表す．(11)の効用関数を前提とした場合，確率的現在志向性は，

$$u(c_1,t_2)-u(c_1,t_1)\leq u(c_2,t_2)-u(c_2,t_1) \tag{12}$$

を意味する．マイナスと掛けると，

$$-(u(c_1,t_2)-u(c_1,t_1)) \geq -(u(c_2,t_2)-u(c_2,t_1))$$

である．この条件は，利得の受け取りが遅れることの損失は，利得の大きさに比例することを述べている．例えば，$u(c,t)=D(t)v(c)$ のような割引効用の場合であれば，

$$-v(c_1)(D(t_2)-D(t_1)) \geq -v(c_2)(D(t_2)-D(t_1))$$

となり，v が増加関数，D が減少関数ならば必ず成り立つ．

De Jarnette *et al.*(2020)は次のような結果を示している．

定理 1　$\succsim$ が(11)で表現されるとする．$\succsim$ が確率的現在志向性を満たすなら，$\succsim$ は時間くじについてリスク志向的である．

この定理は確率的現在志向性を自然な仮定として受け入れるならば，時間くじについて柔軟なリスク態度を許容できないと述べている．以下では定理を例証するために，連続時間と u の微分可能性を仮定してみよう．すると，(11)の前提となる公理はそれぞれ以下を意味する．

- 帰結単調性と現在志向性：
$$\frac{\partial u}{\partial c} > 0 > \frac{\partial u}{\partial t}.$$
c について u は増加関数，t について u は減少関数であることから従う．

- 非将来志向性：時間と消費の限界代替率が t の減少関数である．すなわち，
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial c}}\right] \leq 0.$$
(t, c) 平面に VNM 関数 $u(t, c)$ の無差別曲線を描いてみると分かりやすい．公理の条件を満たす (c, t) と (c', s) を取る．この 2 点が無差別とすると，$t<s$ かつ $c<c'$ であるから，無差別曲線はこの 2 点を通る右上がりの曲線になる．$\frac{\Delta c}{\Delta t}=\frac{c'-c}{s-t}$ は(限界)代替率に対応する．ここで (c, t) と (c', s) を t-方向へ τ だけ平行移動させる．公理の要求により，$(c, t+\tau)$ を通る無差別曲線は $(c', s+\tau)$ かその下を通る．よって，$(c, t+\tau)\sim(\tilde{c}, s+\tau)$ を満たす $\tilde{c}$ は $\tilde{c}\leq c'$ である．代替率は $\frac{\Delta c}{\Delta t}=\frac{\tilde{c}-c}{(s+\tau)-(t+\tau)}\leq\frac{c'-c}{s-t}$ となり，この平行移動により(限界)代替率は減少する．

- 確率的現在志向性：
$$\frac{\partial^2 u}{\partial c \partial t} \leq 0.$$
(12)は，時間についての効用差($\frac{\partial u}{\partial t}$ に対応する)が，消費について減少関数であるという条件なので，上の性質が従う．

以上の条件を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial c}}\right] \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial c}-\frac{\partial^2 u}{\partial c \partial t}\frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

より，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\geq 0$ が導かれる．$u(c, t)$ は t について凸関数であるということなので，時間くじについてリスク志向的であることが導かれる．

7. 消費独立な割引関数の矛盾

7.1　金額効果

金額効果(magnitude effect)は Thaler(1981)によって示された例であり，将来の大きな利得ほど割引されにくく，より我慢強い選択になりやすいことを示している．次のような例を考えると分かりやすい．ある個人が 1 年後の 60 ドルと現在の 15 ドルが無差別と表明したとする．この選好から導かれる現在と比較した 1 年後の金額の割引関数は 15/60＝0.25 である．ところが，同じ個人が 1 年後の 4000 ドルと現在の 3000 ドルが無差別と表明したとする．この選好から導かれる 1 年後の金額の割引関数は 3000/4000＝0.75 であり，60 ドルの割引関数に比べて 4000 ドルの割引関数ははるかに大きいことがわかる．また，各期効用がほぼ線形の場合には，これらは利得の割引関数と見なすことができる．これに対して，指数割引を含め，どのような割引効用においても，各時点の利得の割引関数 $D(t)$ は時間だけに依存する定数であり，金額効果から示唆されるような利得ごとに

異なる割引関数は許容されない[7]．

7.1.1　u の曲率による説明

金額効果を説明する理論として，Loewenstein and Prelec (1992) は双曲割引要素と参照点付き価値関数を提案している．上で述べた通り，Thaler (1981) の議論は効用関数の線形性（つまり，金額＝利得）であることを前提としており，効用関数の曲率，あるいは限界効用逓減型の各期効用（価値関数）を用いれば，金額効果は説明可能としている．より具体的に見るために，割引効用を仮定する．x を被験者の想定している実験利得を除いた消費流列（背景消費）とする．t 期に金額 m をもらうことが，0 期の金額に換算して $\phi_x(m,t)$ をもらうことに対応するとしよう．割引効用の下ではこの無差別関係は，$u(x_0+\phi_x(m,t))-u(x_0)=D(t)[u(x_t+m)-u(x_t)]$ を意味する．ここから，金額に関する割引要素は

$$\frac{\phi_x(m,t)}{m}=\frac{u^{-1}(D(t)[u(x_t+m)-u(x_t)]+u(x_0))-x_0}{m}$$

のように導かれる．u が凹関数の場合には，m についてこの割引要素が増加的になり得るため，金額効果と整合的であり得る．

Noor (2011) は曲率だけに頼った議論では金額効果を十分に説明できないことを示すため，次のような測定定理（calibration theorem）を導いている．Noor[(2011), Proposition A.1]によると，割引効用と凹関数の u を仮定すると，

$$u(x_0)+D(t)u(x_t+m) \geq u(x_0-\varepsilon)+D(t)u\left(x_t+m+\frac{m}{\phi_x(m,t)}\varepsilon\right)$$

が任意の $x,t,m,\varepsilon\in[0,x_0]$ で成り立つ．Thaler (1981) のように $\phi_x(\$60,t)=\$10$ とする．この時の金額に関する割引要素は $\frac{\phi_x(60,t)}{60}=0.25$ である．上の不等式より，この個人は，0 期の消費を $\$\varepsilon$ だけ減らして t 期の消費を $\frac{m}{\phi_x(m,t)}\times\$\varepsilon=\$4\varepsilon$ にする投資機会をかならず拒否することが含意される．例えば，十分な背景消費の下では，0 期に $3000 を支払って t 期に $12000 を得る投資機会を選択しないという結論は，妥当とは思えない．

7.1.2　リスクと時間の交換可能性による説明

リスクと時間による遅れには共通点がある．時間による遅れは利得が得られないかもしれないという主観的リスクとも解釈できるからだ．この解釈に基づくと，共通時間差効果や現在バイアスは，リスクの文脈で知られるアレの反例や確実性効果として再解釈できる．(Prelec and Loewenstein (1991)) また，Keren and Roelofsma (1995) は，共通時間差効果の確実な利得に共通のリスクを導入すると，選好逆転が消える傾向を見いだしている．このことから，現在の確実な利得に働く確実性効果（現在バイアス）は，時間の先送りとリスクの導入のどちらによっても解消できることを示しており，時間の遅れとリスクの共通性を示唆している[8]．

Baucells and Heukamp (2012) は時間の遅れは主観的プロセスを通して確率に変換されるという仮説のもとに次のような効用関数を提案している．

$$V(c,p,t)=w(pe^{-r_c t})v(c).$$

ただし，(c,p,t) は t 期に c という利得が確率 p で当たるくじである．上の効用関数で，w は確率ウェイト関数，v は価値関数，r_c は時間と確率の変換パラメータを表す．ここで，r_c が金額 c に依存しているため，金額効果と整合的なモデルになる．実際，$p=1$ とすると，t 期に金額 c が得られる選択肢は，$w(e^{-r_c t})v(c)$ と評価される．このうち，$w(e^{-r_c t})$ は金額に依存した割引要素と見なすことができる．

一方，リスクと時間の交換可能性については，対立的な実験結果も存在する．Öncüler(2000), Anderson and Stafford(2009)), Sun and Li (2010)の実験では，リスクを導入した方がより現在重視な選択が取られやすいことが報告されている．

7.1.3 先送りの固定費用による説明

Benhabib *et al.*(2010)では現在から将来に利得が先送りされる際に固定費用がかかるという仮定を導入して，金額効果を説明している．彼らのモデルでは，割引関数は $t \geq 1$ について

$$D_y(t) = e^{-rt} - \frac{b}{y}$$

のように与えられる．y は t 期の利得とする．e^{-rt} の部分は指数割引であり，b は先送りの固定費用である．つまり，y をいう利得を t 期にもらう場合の割引効用は，$D_y(t)y = e^{-rt}y - b$ で与えられる．b は定数であるから，大きな利得であるほど，利得 1 単位あたりの固定費用が減少するために金額効果を説明できる．

Sun and Potters(2016)では，固定費用による金額効果の説明の妥当性を確認するために，将来の利得を現在の利得の価値で測るのではなく，将来の利得を近い将来の利得で測る実験を行っている．もし先送りの固定費用が金額効果の原因ならば，将来の利得を近い将来の利得で測った場合は，金額効果は現れないはずである．Sun and Potters(2016)によると，この代替的な設定のもとでも金額効果が検出されており，固定費用による金額効果の説明には否定的な結果となっている．

7.2 将来の自己への共感としての金額効果

Noor and Takeoka(2020)では将来の自己への最適な共感の割り当てをキーワードにして，金額効果のモデルを提示している．60 ドルのように少額の将来利得が個人の関心をあまり引かず，従って，小さな割引関数で評価されるのに対して，4000 ドルのような大きな金額に個人がより関心を持ち，我慢強く振る舞うのは，何らかのインセンティブの働きのように思われる．では金額効果の背後にあるのは，どのような人間の認知的・心理的プロセスなのであろうか？

異時点間選択モデルでしばしば仮定されるように，将来の自己は現在の自己とは異なる自己であると仮想的に考えてみよう．この想定に基づけば，個人とは，現在の自己 (Self 0)，1 期先の将来の自己 (Self 1), …, t 期先の将来の自己 (Self t)… という異時点間の自己の連鎖に他ならない[9]．すると，将来の利得に関心を払う能力とは，Self 0 の Self t の厚生に対する共感と見なすことができる．この仮説によると，将来のことを一切考慮しない近視眼的行動とは，Self 0 の利己性であり，反対に，将来のことを考えたより我慢強い振る舞いは，将来の自己への利他性と解釈できる．将来の自己への利他性という観点から時間選好率や忍耐強さを解釈する文献に，Saez-Marti and Weibull(2005), Galperti and Strulovici(2017)がある．

将来利得が大きいほど，Self 0 にとって将来の自己に共感し，その立場に立って考えるインセンティブは強くなるはずであり，このような認知プロセスが金額効果を生み出す源泉になっているのではないかと仮説を立てることができる．他方で，将来の自己への共感は，Self 0 の利己性を抑制しなければならないという点で，禁欲的で心理的負荷のかかる認知プロセスと考えられる．Noor and Takeoka(2020)では，このようなプロセスを経て時間選好率が形成される理論の実証的含意について研究を行っている[10]．以下具体的な効用関数とその含意の一部を紹介しよう．

7.3 共感費用型割引効用関数

T は有限の自然数とする．効用関数表現を定義するために，次のような構成要素 (u, $\{\varphi_t\}_{t=1}^{T}$) を考える．

(i) $u : \Delta \to \mathbb{R}_+$ を期待効用とする．またそ

の VNM 関数 $u: C \to \mathbb{R}_+$ は連続，単調増加，$u(0)=0$ を満たすと仮定する．

(ii)　すべての $t \geq 1$ について，割引要素の下限と上限を表すパラメータ $0 \leq \underline{d}_t \leq \bar{d}_t \leq 1$ が存在する．また，費用関数 $\varphi_t: [0,1] \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ が存在し，その限界費用関数 $\varphi_t': [0,1] \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ は左連続で，$[0, \underline{d}_t]$ 上でゼロ，$(\underline{d}_t, \bar{d}_t]$ 上で厳密に増加，$(\bar{d}_t, 1]$ 上で ∞ の値を取るものとする．さらに，すべての t で $\varphi_t' \leq \varphi_{t+1}'$ が成り立つ．

条件(i)は各期効用が期待効用と仮定しており，標準的である．条件(ii)は割引要素を選ぶ上での費用関数の条件である．φ_t は Self t に共感を割り当てる費用と解釈される．また，より多くの共感の割り当ては，大きい割引要素 $D(t) \in [0,1]$ に対応すると解釈する．

費用関数は限界費用関数の積分を取ることで得られる．

$$\varphi_t(D(t)) = \int_0^{D(t)} \varphi_t'(\delta)\mathrm{d}\delta.$$

限界費用の条件より，φ_t は $[0, \underline{d}_t]$ 上ではゼロ，$(\underline{d}_t, \bar{d}_t]$ 上では単調増加凸関数，$(\bar{d}_t, 1]$ 上では無限大を取ることになる．よって，$\underline{d}_t$ は初期保有としての割引率，$\bar{d}_t$ は割引率の上限と解釈できる．

以上を構成要素として，次の効用関数を定義する．

定義 3(共感費用型割引効用)　$\succsim$ が共感費用型割引効用関数表現(*Costly Empathy Representation*) $(u, \{\varphi_t\})$ を持つとは，上記(*i*), (*ii*)を満たす $(u, \{\varphi_t\})$ が存在して，選好が効用関数

$$U(x) = u(x_0) + \sum_{t \geq 1} D_x(t) u(x_t), \quad (13)$$

ただし，

$$D_x = \arg\max_{D \in [0,1]^T} \left\{ \sum_{t \geq 1} D(t) u(x_t) - \varphi_t(D(t)) \right\},$$

によって表現されることをいう．

任意の割引関数 D について，その割引効用 $\sum_{t \geq 1} D(t) u(x_t)$ とその費用 $\sum_{t \geq 1} \varphi_t(D(t))$ はともに時間について加法的であるため，認知的最適化は各 t 毎に解くことができる．つまり，最適な割引関数 D_x の t 要素 $D_x(t)$ は t 期の利得のみに依存する．任意の t について，$D_x(t)$ は

$$D_x(t) = \arg\max_{D(t) \in [0,1]} \{ D(t) u(x_t) - \varphi_t(D(t)) \} \quad (14)$$

の解である．さらに，φ_t は $[\underline{d}_t, \bar{d}_t]$ 上で厳密な凸関数であるため，認知的最適化の解は一意に存在する．

上記の認知的最適化問題の一階条件から直ちに導かれる通り，$u(x_t)$ が大きくなるほど，最適な $D_{u(x_t)}$ も大きくなる．これは金額効果と整合的な結論である．

7.3.1　特殊形

$\underline{d}_t = \bar{d}_t = d_t$ と仮定すれば，対応する費用関数 φ_t は $[0, d_t]$ 上でゼロ，$(d_t, 1]$ 上で無限大になる．よって最適な割引要素は常に

$$D_{u(x_t)}(t) = d_t$$

となる．これは割引効用モデルに他ならない．

費用関数を以下のようなべき関数に特定化することができる．

定義 4(同次的共感費用型割引効用)　共感費用型割引効用関数のうち，費用関数 φ_t が

$$\varphi_t(d) = \begin{cases} a_t d^m & \text{if } d \in [0, \bar{d}_t], \\ \infty & \text{if } d \in (\bar{d}_t, 1], \end{cases}$$

ただし，(*i*) $m > 1$, (*ii*) $a_t > 0$ は t について増加的，(*iii*) $0 < \bar{d}_t \leq 1$ は t について減少的，のよう

に与えられるものを，同次的共感費用型割引効用と呼ぶ．

最適化問題(14)は一階条件を使って簡単に解くことができる．$r=u(x_t)$ とすると，最適割引関数は，

$$D_r(t)=\begin{cases}\gamma_t r^{\frac{1}{m-1}} & \text{if } r\leq \bar{r}_t\\ \bar{d}_t & \text{if } r>\bar{r}_t\end{cases} \qquad (15)$$

のようになる．ただし，$\gamma_t=(ma_t)^{-\frac{1}{m-1}}>0$，$\bar{r}_t=ma_t\bar{d}_t^{m-1}>0$ である．この割引関数を割引効用(13)に代入すれば，共感費用型割引効用の誘導形が得られる．特に，すべての t で $u(x_t)>\bar{r}_t$ を満たすような各期利得の大きい消費流列については，

$$U(x)=u(x_0)+\sum_{t\geq 1}\bar{d}_t u(x_t)$$

のように割引関数の上限に対応した割引効用になる．逆に，すべての t で $u(x_t)\leq\bar{r}_t$ を満たすような各期利得の小さい消費流列については，

$$U(x)=u(x_0)+\sum_{t\geq 1}\gamma_t u(x_t)^{\frac{m}{m-1}}$$

が効用関数になる．各期効用が凸変換されていることに注意する．

7.3.2　金額効果と共通時間差効果

同次的共感費用型割引効用の最適割引関数(15)をみるとわかる通り，割引要素が指数型ではないので，共感費用型割引効用は定常性を満たさない．そのため共通時間差効果を説明できる余地がある．

例として，(15)をさらに特殊化し，割引要素の係数を準双曲割引のようにすると以下を得る．

$$D_c(t)=\begin{cases}\beta\delta^t u(c)^{\frac{1}{m-1}} & \text{if } c\leq c^*,\\ \beta\delta^t u(c^*)^{\frac{1}{m-1}} & \text{if } c>c^*.\end{cases}$$

c^* までの消費レベルでは $D_c(t)$ は増加するが，c^* を超えると一定になることに注意する．この関数形を用いて，共通時間差効果を説明できることを見てみる．簡単化のために3期間とすると，典型的な選好逆転のパターンは

$$(c,0,0)\succ(0,c+d,0),\ \text{かつ}$$
$$(0,c,0)\prec(0,0,c+d)$$

である．もし c が十分大きい場合は，割引要素は消費レベルと独立した定数である．$\beta u(c^*)^{\frac{1}{m-1}}<1$ であれば，通常の準双曲割引と同様に選好逆転を説明できる．一方，c が十分小さい場合には，金額効果が追加的な説明要因となり得る．効用関数より，選好逆転は $u(c)>\beta\delta u(c+d)^{\frac{m}{m-1}}$ と $u(c)^{\frac{m}{m-1}}<\delta u(c+d)^{\frac{m}{m-1}}$ が同時に成り立つことを要求する．ここでもし $u(c+d)$ が1より小さければ，$u(c+d)^{\frac{m}{m-1}}$ は $u(c+d)$ よりも小さくなる．よって，$\beta=1$ の場合でも，金額効果によって選好逆転が起こりうる．

8. 結語と展望

本稿では，指数割引効用に対する様々な反例と，それに対してどのようなモデルの一般化がなされてきたのかを見てきた．前節までで詳しく述べた通り，(1) 双曲割引効用や動学的自制効用を用いることで，共通時間差効果を説明できること，(2) KP型効用関数を採用することで，リスク回避度と異時点間代替性の分離が可能となり，リスクフリーレート・パズルを回避できること，(3) Wakai (2008) のモデルを使うことで，時間に関する分離性に矛盾する選好パターンや異時点間の利得変動を回避する選好パターンを説明できること，(4) 時間くじに対する柔軟なリスク態度を表現するには指数割引効用の一般化が必要であるが，他の妥当な公理との整合性を取ることが困難なこと，そして，(5) Noor and Takeoka (2020) の認知的最適化による割引関数決定モデルを採用することで，共通時間差効果や金額効果などを説明できるこ

とを見た．

以上から，指数割引効用の反例それぞれに対して，実験や実証の選択パターンを説明できるような一般化が行われてきたことがわかる．一方で，上記のモデルでは，観察される選択パターンを説明できる柔軟性と同時に，取り扱いのし易さ・応用可能性とのバランスを取ることも重視されている．一般的に言えば，モデルの一般性と取り扱いやすさはトレードオフの関係にある．指数割引効用への反例は多岐にわたるため，そのすべての反例を同時に説明できるような一般的統一理論を構想することは現実的ではないだろう．一般的なモデルになるほど，同定すべき選好パラメーターの数は増加するし，そもそも応用上取り扱い易い効用関数の特殊形を考えること自体が難しい．人間のどのようなバイアスに着目するかに応じて，適切なモデル選択が必要である．

その一方で，Noor and Takeoka (2020) で示された通り，これまで個別の事例として見られてきた共通時間差効果や金額効果を認知的最適化という同一のメカニズムから説明できることも明らかになった．モデルの取り扱い易さを担保した上で，このような統一的モデルの追求は今後もなされていくべきだろう．

最後に，今後の展望として，認知的最適化理論の枠組みを割引関数の決定以外にも拡張する可能性について触れておきたい．行動経済学の主要分野を見渡すと，リスク下の選択，異時点間選択，利他的選好，限定合理性などのテーマを挙げることができる．行動経済学では，リスク選択についてはプロスペクト理論，異時点間選択については双曲割引，利他性については不平等回避モデル (Fehr and Schmidt (1999))，限定合理性については美人投票モデル (Nagel (1995)) や思考費用 (Ergin and Sarver (2010)) など，それぞれの分野のアノマリーに対して個別的なモデルが提示される傾向にある．

これらの異なるテーマの関係についての研究のうち，リスク・不確実性と異時点間選択の関連は，7.1.2 節で述べたような時間の遅れとリスクの交換可能仮説など，すでに多くの研究蓄積がある．また，異時点間選択と利他性の関連については，すでに説明した通り，将来の自己への利他性という観点から割引要素や忍耐強さを捉えることができる．Noor and Takeoka (2020) もこの流れに位置づけることができる．また，選好パラメータを費用付き最適化問題の解として解釈するというアイデアは，限定合理性との共通点でもある．リスク，異時点間選択，利他性，限定合理性などの諸仮説やモデルが相互にどう関係しているかに関しての知見はまだ少ない．認知的最適化をキーワードとして，異なるテーマ間の相互依存関係を理解できるかどうかを今後の研究課題としたい．

（一橋大学大学院経済学研究科・経済学部）

注

＊ 本論文執筆に当たって，関西学院大学の池田新介先生と一橋大学の祝迫得夫先生から論文改訂に繋がる丁寧なご助言をいただきました．また，一橋大学経済研究所定例研究会での発表時には参加者より多くの有益なコメントをいただきました．記して感謝申し上げます．なお，論文中に含まれる誤りはすべて著者の責任です．

1） 時間割引関数を $D(t)$ とすると，t 期の時間割引要素は $\dfrac{D(t+1)}{D(t)}$，t 期の時間選好率 (時間割引率) ρ_t は帰納的に $D(t)=\prod_{\tau=0}^{t-1}\left(\dfrac{1}{1+\rho_t}\right)$ で与えられる．

2） 多重自己モデルでは誘惑に対する自制行動を説明できないことが知られている．誘惑と自制の意思決定の代表的研究に Gul and Pesendorfer (2004) がある．3.2 節を参照すること．

3） $T=\infty$ の時は，$x=(x_0, x_1, \cdots)$ である．

4） $T=\infty$ の時は，$cx=(c, x_0, x_1, \cdots)$ である．

5） 適切な距離を導入することで，$\varDelta(X)$ と $\mathcal{K}(X)$ もコンパクト距離空間になることが知られている．

6） このパズルがいまだに残存する問題であることは Mehra and Prescott (2003) や Fernandez *et al.* (2020) を参照すること．また，日本の資産市場のデータを用いて KP 型効用関数モデルの実証を行った研究に齊藤 (2007) 第 2 章 2.2 節及び Nakano and Saito (1998) がある．

7） 金額効果のサーベイは，Fredrick *et al.* (2002) を参照すること．より近年の実験研究については，Sun and Potters (2016), Hardisty *et al.* (2013), Ericson and Noor (2016) がある．

8） Halevy (2008) は，時間割引を主観的な生存確率の観点から公理的に説明している．

9) このようなモデルを多重自己(multiple selves)モデルと呼ぶ．Strotz(1955)や Laibson(1997)を参照すること．

10) 費用を伴う主観的最適化のその他の例として，期待の最適化を扱った Brunnermeier and Parker (2005)，最適情報取得のモデルである Ellis(2018)，思考費用の公理化を行った Ergin and Sarver(2010)を挙げておく．

参 考 文 献

齊藤誠(2007)『資産価格とマクロ経済』，日本経済新聞出版社．

Ainslie, G. (1992) *Picoeconomics*, Cambridge University Press.

Anderson, L., and S. Stafford (2009) "Individual Decision-making Experiments with Risk and Intertemporal Choice," *Journal Risk and Uncertainty*, Vol. 38, Issue 1, pp. 51–72.

Baucells, M., and F. Heukamp (2012) "Probability and Time Trade-Off," *Management Science*, Vol. 58, No. 4, pp. 831–842.

Benhabib, J., A. Bisin, and A. Schotter (2010) "Present-bias, Quasi-hyperbolic Discounting and Fixed Costs," *Games and Economic Behavior*, Vol. 69, No. 2, pp. 205–223.

Brunnermeier, M., and J. Parker (2005) "Optimal Expectations," *American Economic Review*, Vol. 95, No. 4, pp. 1092–1118.

Cohen, J., K. M. Ericson, D. Laibson, and J. M. White (2020) "Measuring Time Preferences," *Journal of Economic Literature*, Vol. 58, No. 2, pp. 299–347.

DeJarnette, P., D. Dillenberger, D. Gottlieb, and P. Ortoleva (2020) "Time Lotteries and Stochastic Impatience," *Econometrica*, Vol. 88, No. 2 pp. 619–656.

Ellis, A. (2018) "Foundations for Optimal Inattention," *Journal of Economic Theory*, Vol. 173, pp. 56–94.

Epstein, L. G., and S. E. Zin (1989) "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework," *Econometrica*, Vol. 57, No. 4, pp. 937–969.

Ergin, H., and T. Sarver (2010) "A Unique Costly Contemplation Representation," *Econometrica*, Vol. 78, No. 4, pp. 1285–1339.

Ericson, K., and J. Noor (2016) "Delay Functions as the Foundations of Time Preference: Testing for Separable Discounted Utility," mimeo.

Fehr, E., and K. M. Schmidt (1999) "A Theory of Fairness, Competition and Cooperation," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 114, No. 3, pp. 817–868.

Fernandez, P., E. de Apellaniz, and J. F. Acin (2020) "Survey: Market Risk Premium and Risk-Free Rate Used for 81 Countries in 2020," IESE Business School Working Paper No. WP-1244-E.

Fredrick, S., G. Loewenstein, and T. O'Donoghue (2002) "Time Discounting and Time Preference: A Critical Review," *Journal of Economic Literature*, Vol. 40, No. 2, pp. 351–401.

Galperti, S., and B. Strulovici (2017) "A Theory of Intergenerational Altruism," *Econometrica*, Vol. 85, No. 4, pp. 1175–1218.

Gul, F., and W. Pesendorfer (2004) "Self-Control and Theory of Consumption," *Econometrica*, Vol. 72, No. 1, pp. 119–158.

Halevy, Y. (2008) "Strotz Meets Allais: Diminishing Impatience and the Certainty Effect," *American Economic Review*, Vol. 98, No. 3, pp. 1145–1162.

Hardisty D., K. Appelt, and E. Weber (2013) "Good or Bad, We Want it Now: Fixed-cost Present Bias for Gains and Losses Explains Magnitude Asymmetries in Intertemporal Choice," Journal of Behavioral Decision Making, Vol. 26, No. 4, pp. 348–361.

Keren, G., and P. Roelofsma (1995) "Immediacy and Certainty in Intertemporal Choice," *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, Vol. 63, No. 3, pp. 287–297.

Kocherlakota, N. R. (1996) "The Equity Premium: It's Still a Puzzle," *Journal of Economic Literature*, Vol. 34, No. 1, pp. 42–71.

Koopmans, T. C. (1972) "Representation of Preference Orderings over Time," in C.B. McGuire and R. Radner, editors, *Decision and Organization: A Volume in Honor of Jacob Marschak*. Amsterdam: North-Holland.

Kreps, D., and Porteus (1978) "Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory," *Econometrica*, Vol. 46, No. 1, pp. 185–200.

Laibson, D. (1997) "Golden Eggs and Hyperbolic Discounting," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 112, No. 2, pp. 443–477.

Loewenstein, G., and D. Prelec (1992) "Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 107, No. 2, pp. 573–598.

Loewenstein, G., and D. Prelec (1993) "Preferences for Sequences of Outcomes," *Psychological Review*, Vol. 100, No. 1, pp. 91–108.

Mehra, R., and E. C. Prescott (1985) "The Equity Premium: A Puzzle," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, No. 2, pp. 145–161.

Mehra, R., and E. C. Prescott (2003) "The Equity Premium in Retrospect," NBER Working Paper 9525.

Nagel, R. (1995) "Unraveling in Guessing Games: An Experimental Study," *American Economic Review*, Vol. 85, No. 1, pp. 1313–1326.

Nakano, K., and M. Saito (1998) "Asset Pricing in Japan: A Communication," *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 12, No. 2, pp. 151–166.

Noor, J. (2011) "Intertemporal Choice and the Magnitude Effect," *Games and Economic Behavior*, Vol. 72, No. 1, pp. 255–270.

Noor, J., and N. Takeoka (2020) "Optimal Discounting," Working paper.

O'Donoghue, T., and M. Rabin (1999) "Doing it Now or Later," *American Economic Review*, Vol. 89, No. 1, pp. 103–124.

Öncülar, A. (2000) "Intertemporal Choice under Uncertainty: A Behavioral Perspective," INSEAD Working Paper.

Prelec, D., and G. Loewenstein (1991) "Decision Making over Time and under Uncertainty: A Common Approach," *Management Science*, Vol. 37, No. 7, pp. 770–786.

Saez-Marti, M., and J. Weibull (2005) "Discounting and Altruism to Future Decision-Makers," *Journal of Economic Theory*, Vol. 122, No. 2, pp. 254–266.

Samuelson, P. A. (1937) "A Note on Measurement of Utility," *Review of Economic Studies*, Vol. 4, No. 2, pp. 155–161.

Strotz, R. (1955) "Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization," *Review of Economic Studies*, Vol. 23, No. 3, pp. 165–180.

Sun, Y., and S. Li (2010) "The Effect of Risk on Intertemporal Choice," *Journal of Risk Research*, Vol. 13, No. 6, pp. 805–820.

Sun, C., and J. Potters (2016) "Magnitude Effect in Intertemporal Allocation Tasks," mimeo.

Thaler, R. (1981) "Some Empirical Evidence on Dynamic Inconsistency," *Economic Letters*, Vol. 8, No. 3, pp. 201–207.

Wakai, K. (2008) "A Model of Utility Smoothing," *Econometrica*, Vol. 76, No. 1, pp. 137–153.

Weil, P. (1989) "The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 24, pp. 401–421.