経済研究
Vol. 66, No. 2, Apr. 2015

【調　　査】

小特集：マクロ経済変動と安定化政策

景気循環の計量分析

── サーベイと日本の景気動向指数への応用 ──

石原庸博・渡部敏明

本稿では景気循環の計量分析に用いられる時系列モデルの発展についてサーベイを行う．前半では，まず，マルコフ・スイッチング(MS)モデルとそのマルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC)を用いたベイズ推定について解説する．次に，MS モデルの拡張や MS モデル以外の景気循環の計量モデルについてサーベイする．後半では MS モデルの誤差項の分布を裾の厚い t 分布にしたモデルや分散を可変にし確率的ボラティリティ(SV)モデルによって定式化したモデル，さらに構造変化を加えたモデルについて説明し，日本の景気動向指数に応用する．
JEL Classification Codes: C11, C22, C51, C52, E32

1. はじめに

本稿では景気循環の計量分析に用いられる時系列モデルの発展についてサーベイを行う．景気循環の計量分析でよく用いられるモデルは，Hamilton (1989)によって提案されたマルコフ・スイッチング(MS)モデルである．このモデルは，景気を表す変数の平均成長率が景気後退期と拡張期で異なる値を取り，景気後退期と拡張期はマルコフ過程に従って転換すると仮定する．このモデルを用いると，各期が景気後退期(拡張期)である確率を計算できるので，それを使って景気の転換点を推定できる．そこで，まず MS モデルについて解説する．

MS モデルのパラメータは最尤推定できるが，近年，マルコフ連鎖モンテカルロ法(Markov chain Monte Carlo；以下，MCMC)を用いてベイズ推定する研究が増えている．MCMC とは，ある分布からサンプリングする時に，通常のランダム・サンプリングとは異なり，1 回前にサンプリングされた値に依存させて次の値をサンプリングする方法の総称で，代表的なものに Gibbs sampler と Metropolis-Hastings(MH)アルゴリズムがある．MS モデルの最尤推定ではパラメータの最尤推定値を真の値として各期が景気後退期(拡張期)である確率を計算する．それに対して，MCMC を用いたベイズ推定ではパラメータと景気後退期か拡張期かを表すダミー変数を MCMC を用いて同時事後分布からサンプリングするので，パラメータの不確実性を考慮して景気後退期(拡張期)である確率を計算できる．また，本稿では，MS モデルの誤差項の分散を可変にし確率的ボラティリティ(stochastic volatility；以下，SV)モデルによって定式化したモデルを推定するが，このモデルは尤度の計算が難しいので，最尤推定が難しい．そうしたモデルでも MCMC を用いればベイズ推定できる[1)]．そこで，本稿では，MS モデルの推定法として，MCMC を用いたベイズ推定法について解説する．

Chib(1998)は MS モデルに制約を加えることで構造変化のモデルとして利用することを提案している．景気循環を構造変化として捉えれば，このモデルを用いることもできる．そこで本稿では MS モデルの拡張を循環型・構造変化型含めてサーベイを行う．特に循環や構造変化の推移確率が別の経済変数や景気の継続時間(duration)に依存する場合や平均値と状態変数に内生変数がある場合について解説し，近年注目されている状態数が潜在的に無限個ある MS モデルについても紹介する．MS モデルの拡張はこれだけに留まらない．例えば，Kim and Eo (2013)は景気拡張期と後退期それぞれの平均成長率がランダム・ウオークや誤差修正モデルに従って変動するモデルに拡張している．さらに，景気転換点そのものをパラメータとするモデル，ランダム水準シフト・モデル，平滑推移モデル等，MS モデル以外の景気循環のモデルも提案されている．そこで，そうしたモデルについてもサーベイする．

本稿ではさらに，MCMC を用いて MS モデルを日本の景気動向指数に応用する．日本の景気動向指数には，内閣府経済社会総合研究所(Economic and Social Research Institute；以下，ESRI)の計算している Composite Index(CI)の一致指数を用いる．通常用いられる最も簡単な MS モデルでは，景気循環を分析するには不適切ないくつかの強い仮定が置かれる．一つは，誤差項が分散一定の正規分布に従うとする仮定である．Watanabe(2014)は，2008 年の

リーマン・ショックに端を発する金融危機や2011年の東日本大震災のような大きなショックを含む標本期間でESRIのCI一致指数に通常のMSモデルを当てはめると，金融危機と東日本大震災の時期だけが景気後退期であり，それ以外の時期はすべて景気拡張期であると推定されることを示している．また，誤差項の分布を裾の厚いスチューデントのt分布にするか，分散を可変にしSVモデルで定式化すると，ESRIの公表している景気基準日付に近い景気転換点の推定値が得られることも示している．もう一つは，景気を表す変数の平均成長率は景気後退期と拡張期で異なる値をとるものの，それぞれの値は一定であるとの仮定である．景気拡張期および後退期の平均成長率も時期によって異なる可能性がある．例えば，アメリカでは1980年代半ば以降，景気変動の振幅が小さくなったことが知られており，これはGreat Moderationと呼ばれる．Kim and Nelson(1999a)はGreat Moderationが起きた時期を推定するために，Chib(1998)の構造変化のモデルを応用することにより，景気後退期および拡張期の平均成長率に1回の構造変化を加えたモデルに拡張している．渡部(2009)はそれをさらに複数の構造変化点があるモデルに拡張している．本稿ではまずWatanabe(2014)の標本期間1985年1月-2013年11月をさらに2014年8月まで更新してMSモデルの誤差項の分散と分布を拡張したモデルを推定し，Watanabe(2014)と同じ結果が得られることを確認する．その上で，さらに構造変化を加えたモデルを推定する．

本稿の構成は以下の通りである．まず，続く第2節で最も簡単なMSモデルとそのMCMCを用いたベイズ推定法について解説する．次に，第3節で構造変化のMSモデルと，MSモデルの拡張やその他の景気循環のモデルについてサーベイする．第4節で誤差項の分散と分布を拡張したモデルと構造変化を考慮したMSモデルを日本の景気動向指数に応用する．最後に第5節で本稿のまとめを行うと共に，今後の課題を述べる．

2. マルコフ・スイッチング・モデルのベイズ分析

2.1 マルコフ・スイッチング・モデル

まず最初に，通常用いられる最も簡単なMSモデルについて説明する．y_tをCIやGDP等，景気を表す変数の変化率とし，S_tをt期が景気拡張期であれば1，景気後退期であれば0となるダミー変数とすると，最も簡単なMSモデルは以下の式で表される．

モデル1：

$$y_t = \mu_t + \phi(y_{t-1} - \mu_{t-1}) + e_t,\ \ e_t \sim \text{i.i.d.}\,\mathrm{N}(0, \sigma^2) \tag{1}$$

$$\mu_t = \mu^{(0)}(1 - S_t) + \mu^{(1)} S_t,\ \ \mu^{(0)} < \mu^{(1)} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \pi(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) &= p_{11} \\ \pi(S_t = 0 | S_{t-1} = 1) &= 1 - p_{11} \\ \pi(S_t = 0 | S_{t-1} = 0) &= p_{00} \\ \pi(S_t = 1 | S_{t-1} = 0) &= 1 - p_{00} \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，μ_tはy_tの平均で，(2)式から，t期が景気拡張期(S_t=1)であれば$\mu_t = \mu^{(1)}$，景気後退期(S_t=0)であれば$\mu_t = \mu^{(0)}$となる．景気後退期より拡張期の方がμ_tが高くなければならないので，(2)式で$\mu^{(0)} < \mu^{(1)}$との制約を置いている．この制約を置かないと，S_t=0とS_t=1のどちらが景気拡張期(後退期)を表すか識別できないので，注意が必要である．(1)式のe_tは誤差項を表し，$e_t \sim \text{i.i.d.}\,\mathrm{N}(0, \sigma^2)$は，平均0，分散$\sigma^2$の独立な正規分布に従うことを表している．この仮定は第4.2節で拡張する．MSモデルでは，S_tはマルコフ過程に従うと仮定する．そこで，S_tの推移確率は，(3)式のように，1期前の状態S_{t-1}のみに依存する．(本稿では，以下，確率関数および確率密度関数をすべて$\pi(\cdot)$で表す．)

(1)式でラグ次数を2以上に拡張することや，μ_tだけでなくϕやσ^2も景気後退期と拡張期で値が転換するモデルに拡張することも容易であるが，ここでは簡単化のため，ラグ次数は1，ϕやσ^2の値は景気拡張期と後退期で変わらないものとして説明を行う．ただし，第4.4節ではμ_tとσ^2が共に転換するモデルも推定している[2)]．(1)式は以下のように定式化することもできる．

$$y_t = \mu_t + \phi y_{t-1} + e_t,\ \ e_t \sim \text{i.i.d.}\,\mathrm{N}(0, \sigma^2) \tag{1'}$$

ϕが0から大きく乖離する場合は，どちらの定式化を使うかで結果に差が出る可能性があるが，ϕが0に近い場合は，それほど差はない．本稿の第4節の日本の景気循環への応用では(1)式を用いるが，そこではϕの推定値が0からそれほど乖離しないので，(1′)式を用いても結果に差はないものと思われる．

2.2 MCMCを用いたベイズ推定

以下，標本(データ)を$\tilde{y}_T = [y_1, \cdots, y_T]'$，推定する未知パラメータ・ベクトルを$\tilde{\theta}$で表す．上記の(1)-(3)式から成るモデル1では，$\tilde{\theta} = [\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \phi, \sigma^2, p_{00}, p_{11}]'$である．以下，$\tilde{\mu} = [\mu^{(0)}, \mu^{(1)}]'$, $\tilde{p} = [p_{00}, p_{11}]'$と表す．ベイズ推定法では，まず未知パラメータ$\tilde{\theta}$にデータを観測する前の分布である事前分布$\pi(\tilde{\theta})$を設定する．それをベイズの定理

$$\pi(\tilde{\theta} | \tilde{y}_T) = \frac{\pi(\tilde{\theta})\pi(\tilde{y}_T | \tilde{\theta})}{\pi(\tilde{y}_T)} \tag{4}$$

によってデータ$\tilde{y}_T$を観測した後の事後分布$p(\tilde{\theta} | \tilde{y}_T)$に更新し，得られた事後分布に基づいてパラメータの値を推定する．しかし，多くのモデルでは事後分布を解析的に求めるのが難しいため，MCMCを用いてパラメータ$\tilde{\theta}$を事後分布からサンプリングし，サンプリングされた値を用いて推定を行う．MCMCとは，通常のランダム・サンプリン

グと異なり，1回前にサンプリングされた値に依存させて次の値をサンプリングする方法の総称であり，代表的なものに Gibbs sampler と Metropolis-Hastings(MH)アルゴリズムがある．ベイズ推定や MCMC について詳しくは，小西・越智・大森(2008)，中妻(2007)，和合(2005)等を参照されたい．

モデル1を MCMC を用いてベイズ推定する場合には，パラメータと潜在変数である $\tilde{S}_T=[S_1,\cdots,S_T]'$ を以下の全条件付き事後分布(full conditional posterior distribution)から繰り返しサンプリングする．

$$\pi(\tilde{\mu}|\phi,\sigma^2,\tilde{p},\tilde{S}_T,\tilde{y}_T) \tag{5}$$

$$\pi(\phi|\tilde{\mu},\sigma^2,\tilde{p},\tilde{S}_T,\tilde{y}_T) \tag{6}$$

$$\pi(\sigma^2|\tilde{\mu},\phi,\tilde{p},\tilde{S}_T,\tilde{y}_T) \tag{7}$$

$$\pi(\tilde{S}_T|\tilde{\theta},\tilde{y}_T) \tag{8}$$

$$\pi(\tilde{p}|\tilde{\mu},\phi,\sigma^2,\tilde{S}_T,\tilde{y}_T) \tag{9}$$

パラメータと潜在変数に初期値を設定し，そこからスタートして，直近にサンプリングされた値(まだサンプリングしていない場合には初期値)を条件として上記のサンプリングを繰り返すと，同時事後分布

$$\pi(\tilde{\mu},\phi,\sigma^2,\tilde{p},\tilde{S}_T|\tilde{y}_T) \tag{10}$$

からサンプリングした確率変数に収束する．そこで，最初の何回かのサンプルはまだ事後分布に収束していないので捨て(この最初の捨てるサンプルのことを burn-in と呼ぶ)，その後のサンプルを使ってパラメータの推定を行えばよい．このように全条件付き分布からのサンプリングを繰り返すことにより，同時分布からサンプリングするのが Gibbs sampler である．各パラメータの事前分布，全条件付き事後分布，またそこからのサンプリング法については，補論 A を参照されたい．

この方法では，潜在変数 $\tilde{S}_T$ も事後分布からサンプリングするので，burn-in 以降にサンプリングされた $\tilde{S}_T$ を使って各期が景気後退期(拡張期)である事後確率を推定できる．具体的には，t 期が景気後退期である事後確率は burn-in 以降のサンプル数に対するその中で $S_t=0$ であるサンプル数の比率として推定できる．

2.3 収束判定

各パラメータの burn-in 以降の M 個のサンプルが得られたら，それらが事後分布からのサンプルに収束しているかどうかを確認する必要がある．本稿の第4節の実証分析では，Geweke(1992)によって提案された収束診断(Convergence Diagnostic；以下，CD)統計量を用いて収束判定を行っている．あるパラメータ θ の CD 統計量は，そのパラメータの burn-in 以降の M 個のサンプルの中の最初から M_A 個のサンプルの平均 $\bar{\theta}_A$ と最後から M_B 個のサンプルの平均 $\bar{\theta}_B$ を使って以下のように計算される．

$$\mathrm{CD}=\frac{\bar{\theta}_A-\bar{\theta}_B}{\sqrt{\{\mathrm{SE}(\bar{\theta}_A)\}^2+\{\mathrm{SE}(\bar{\theta}_B)\}^2}} \tag{11}$$

ここで，$\mathrm{SE}(\bar{\theta}_A),\mathrm{SE}(\bar{\theta}_B)$ はそれぞれ $\bar{\theta}_A,\bar{\theta}_B$ の標準誤差である．これは，最初から M_A 個のサンプルと最後から M_B 個のサンプルの平均の差の検定統計量であり，θ の burn-in 以降の M 個のサンプルが事後分布からのサンプルに収束していれば，平均に差はないので[3]，CD 統計量は漸近的に標準正規分布に従う．第4節の分析では，Geweke(1992)に従い，$M_A=0.1M, M_B=0.5M$ としている[4]．また，MCMC によるサンプルには自己相関が生じるので，そうした自己相関を考慮して $\mathrm{SE}(\bar{\theta}_A),\mathrm{SE}(\bar{\theta}_B)$ を計算する必要がある．本稿では，Parzen の window を使ってそれらを計算している．Parzen の window については，渡部(2009)や藤原・渡部(2011)を参照されたい．

2.4 事後分析

すべてのパラメータで，burn-in 以降の M 個のサンプルが事後分布からのサンプルに収束していると判定されたら，それらを事後分布からサンプリングされたものと見なして事後分析を行う．各パラメータの平均，標準偏差はそのパラメータの M 個のサンプルの標本平均，標本標準偏差として推定できる．また，信用区間も簡単に求められる[5]．例えば，95% 信用区間は，M 個のサンプルを大きさの順に並べ替え，上2.5%，下2.5% の値として求められる．既に述べたように，MCMC によってサンプリングされた値には自己相関があるので，標本平均の標準誤差の計算には注意が必要である．本稿では Parzen の window を使って標準誤差を計算している．

2.5 非効率因子

MCMC によるサンプリングがランダム・サンプリングと比べてどれぐらい非効率であるかを示す指標に非効率因子(inefficiency factor)がある．MCMC でサンプリングしたあるパラメータの値の k 次の自己相関係数を ρ_k とすると，サンプリングした M 個の値の標本平均の分散は $\sigma^2(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k)/M$ となる．ここで，σ^2 は，そのパラメータの事後分布の分散を表す．それに対して，ランダム・サンプリングでは，自己相関はないので，標本平均の分散は σ^2/M となる．そこで，それらの比率 $1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k$ は MCMC のランダム・サンプリングに対する非効率性を表し，その推定値

$$\mathrm{IF}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\rho}_k \tag{12}$$

を非効率因子と呼ぶ[6]．ここで，$\hat{\rho}_k$ は k 次の標本自己相関である．例えば，非効率因子が10の場合，MCMC でランダム・サンプリングと同じ標準誤差の推定値を得るためには，ランダム・サンプリングの10倍の回数のサンプリングを行う必要があることを意味する．

2.6 事後オッズ比によるモデル選択法

ベイズ統計学では通常，事後オッズ比を用いてモデル選択を行う．モデル M_1 と M_2 の間の選択を行う場合，データ $\tilde{y}_T$ が与えられた下でのそれぞれのモデルが正しい確率の比率 $\pi(M_1|\tilde{y}_T)/\pi(M_2|\tilde{y}_T)$ を事後オッズ比と呼ぶ．これが1よりも大きければ M_1 を選択し，1よりも小さければ M_2 を選択する．

事後オッズ比は次のように表すことができる．

$$\frac{\pi(M_1|\tilde{y}_T)}{\pi(M_2|\tilde{y}_T)}=\frac{\pi(M_1)}{\pi(M_2)}\cdot\frac{\pi(\tilde{y}_T|M_1)}{\pi(\tilde{y}_T|M_2)} \tag{13}$$

ここで，右辺第1項 $\pi(M_1)/\pi(M_2)$ は事前オッズ比と呼ばれ，データを観測する前のそれぞれのモデルが正しい確率の比率である．また，右辺第2項 $\pi(\tilde{y}_T|M_1)/\pi(\tilde{y}_T|M_2)$ はベイズ・ファクターと呼ばれる．どちらのモデルが正しいか事前情報がない場合には，事前オッズ比は1に設定される．そうすると，事後オッズ比はベイズ・ファクターと等しくなり，ベイズ・ファクターの分子，分母を計算すれば事後オッズ比が求まることになる．

ベイズ・ファクターの分子，分母はそれぞれのモデルの周辺尤度(marginal likelihood)と呼ばれる．本稿では，Geweke(1999)の修正調和平均(modified harmonic mean)によって周辺尤度を計算している．この方法について詳しくは，渡部(2009)や藤原・渡部(2011)を参照されたい．周辺尤度の計算方法には他にも Chib(1995)の方法がある．この方法について詳しくは，大森・渡部(2012)を参照されたい．

3. マルコフ・スイッチング・モデルの拡張やその他の景気循環モデルのサーベイ

前節に挙げた単純な MS モデルでは2つの強い仮定を置いている．1つ目は状態変数 S_t が0と1の2つの状態を循環的に変動する点である．2つ目は推移確率が一定である点である．本節では，以下，これらの仮定についての研究のサーベイを行う．

3.1 構造変化型の推移確率を持つマルコフ・スイッチング・モデル

Chib(1998)は MS モデルを応用し，同じ状態には戻らない構造変化のモデルに拡張している．ここでは複数の構造変化点を付加したモデルについて説明する．まず，各期においてその期までに何回構造変化が起きているか表すために，変数 D_t を導入する．以下，y_t のデータ数を T，構造変化点の数を n とする．さらに，構造変化点を $(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ で表し，これらは $1<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n\leq T$ を満たすものとする．そうすると，D_t は以下のように定義される．

$$D_t=\begin{cases} 0, & 1\leq t<\tau_1 \\ 1, & \tau_1\leq t<\tau_2 \\ \vdots & \\ i, & \tau_i\leq t<\tau_{i+1} \\ \vdots & \\ n-1, & \tau_{n-1}\leq t<\tau_n \\ n, & \tau_n\leq t\leq T \end{cases} \tag{14}$$

ただし，$D_1=0, D_T=n$.

(14)式の示す通り，最初の構造変化が生じるまでは $D_t=0$ であり，最初の構造変化が生じた後には $D_t=1$ となる．同様に，構造変化が起きるたびに D_t の値は1つずつ大きくなり，最後の n 個目の構造変化の後は $D_t=n$ である．構造変化点の数が n になるように，D_1 と D_T はそれぞれ0と n に固定する．この D_t の値に依存して，パラメータ μ_t が以下のように変化するものとする．

$$\mu_t=\begin{cases} \mu^{(0)}, & D_t=0 \\ \mu^{(1)}, & D_t=1 \\ \vdots & \\ \mu^{(i)}, & D_t=i \\ \vdots & \\ \mu^{(n-1)}, & D_t=n-1 \\ \mu^{(n)}, & D_t=n \end{cases} \tag{15}$$

ここでは，μ_t だけに構造変化があるものとするが，他のパラメータについても同様に構造変化を考えることができる．

Chib(1998)は D_t がマルコフ過程に従うものと仮定している．ただし，通常のマルコフ過程ではなく，現行の値に留まるか，あるいは1増えるかどちらかで，値が減ったり，一度に2以上増えることはないものとする．すなわち

$$\pi(D_t=j|D_{t-1}=i) =\begin{cases} q_{ii} & j=i, \\ 1-q_{ii} & j=i+1, \quad ,i=0,1,\cdots,n-1 \\ 0 & j\neq i,i+1, \end{cases} \tag{16}$$

$$\pi(D_t=n|D_{t-1}=n)=1 \tag{17}$$

とする．例えば，q_{00} は，$t-1$ 期まで1度も構造変化が生じていない時に t 期も構造変化が生じない確率を表しており，q_{11} は，$t-1$ 期までに1回構造変化が生じている時に t 期に構造変化が生じない確率を表している．この推移確率は，(3)式の S_t の推移確率と異なり，各状態の推移が非可逆的であり，一度次の状態に推移したら元に戻らないことを示している．

こうした構造変化型のモデルでは，潜在変数 $\tilde{D}_T=[D_2,\cdots,D_{T-1}]'$ やその推移確率 q_{ii} $(i=0,\cdots,n-1)$ をサンプリングする．このサンプリング法については，Chib(1998)を参照されたい．

3.2 推移確率のその他の拡張

Hamlton(1991)とChib(1998)のモデルはそれぞれ再帰的(recurrent：元の場所に戻る性質)であるかどうかの違いがあるが，どちらもマルコフ過程により推移確率を定式化している．これらのモデルはより景気変動・景気循環の実態に合うように様々な拡張がなされてきた．ここではそうしたいくつかの拡張に関して紹介する．

3.2.1 変動推移確率モデル

推移確率 $p_{ii}(i=0,1)$ を説明変数ベクトル $\boldsymbol{x}_t$ に依存させ，

$$\pi(S_t=i|S_{t-1}=i, X_{t-1}=\boldsymbol{x}_t)=p_{ii}(\boldsymbol{x}_t)$$
$$\pi(S_t=j|S_{t-1}=i, X_{t-1}=\boldsymbol{x}_t)=1-p_{ii}(\boldsymbol{x}_t) \quad (18)$$

とすることにより，推移確率が時点 t に依存するモデルに拡張することができる．確率 $p_{ii}(\boldsymbol{x}_t)$ のモデルとしてGoldfeld and Quandt(1973), Filardo(1994), Filardo and Gordon(1998), Kim and Nelson(1998)はプロビット型，Durland and McCurdy(1994), Layton and Smith(2007)はロジット型の連結関数を考えた．MCMCを用いたベイズ分析では，推定・解釈の容易さのためにプロビット型を仮定し，以下のような潜在変数を用いた表現を使うことが多い．

$$\pi(S_t=1)=\pi(S_t^*\geq 0)$$
$$S_t^*=\gamma_0+\gamma_1 S_{t-1}+\gamma_2' X_{t-1}+\gamma_3' S_{t-1}X_{t-1}+u_t$$
$$u_t\sim \text{i.i.d.}\,\mathrm{N}(0,1)$$

説明変数 X_{t-1} としては現在の景気の継続時間，過去の値 y_{t-1}，先行指数の過去の値等が用いられる．状態遷移の確率過程 S_t は説明変数 X_{t-1} を条件づけたときには $\pi(S_t|X_{t-1},\tilde{S}_{t-1})=\pi(S_t|X_{t-1},S_{t-1})$ と S_{t-2} 以前とは独立になりマルコフ性を持つ．しかしながら X_{t-1} として景気の継続時間などの内生変数を用いた場合に，一般に $\pi(S_t|\tilde{S}_{t-1})\neq\pi(S_t|S_{t-1})$ となり X_{t-1} を条件付けないときにはマルコフ過程にはならないことに注意が必要である．

3.2.2 推移確率と内生性

また，S_t がショック e_t に対して外生性の仮定 $E[e_t|S_t,S_{t-1}]=E[e_t]=0$ を満たさない場合には $\mu^{(0)},\mu^{(1)}$ に内生性バイアスが生じる可能性についてKim *et al.*(2008)が議論をしている．彼らは S_{t-1}, X_{t-1} が外生変数で S_t と e_t の間の相関を処理するための操作変数として用いることができるならば，内生性の原因は e_t と u_t の相関だけになるため

$$\begin{pmatrix} e_t \\ u_t \end{pmatrix}\sim \text{i.i.d.}\,\mathrm{N}\left(\mathbf{0},\begin{pmatrix}\sigma_t^2 & \rho\sigma_t \\ \rho\sigma_t & 1\end{pmatrix}\right) \quad (19)$$

とすることで $\mu^{(0)},\mu^{(1)}$ の内生性バイアスを除去することができるとしている．Chib and Dueker(2004)では潜在変数を

$$S_t^*=\gamma_0+\gamma_1 S_{t-1}^*+\gamma_2' X_{t-1}+u_t$$

としており，同様の誤差項の仮定を置いてMCMCで推定を行っている．Chib and Dueker(2004)では景気循環に応用しており，ρ は95%信用区間にゼロを含んでいるが正の値に推定されている．これは y_t が平均値 μ_t よりも高い(低い)場合には好景気(不景気)になりやすいことを示している．

3.2.3 推移確率と継続時間

転換点を $\tau_1,\cdots,\tau_n$ としたときに景気の継続時間 $d_t=t-\tau_i$(τ_i は直近の景気の転換点)は変動推移確率モデルにおける重要な説明変数の一つである．継続時間分析としてみた場合，MSモデルの条件付き推移確率は，ハザード率の離散時間版とみなすことができる．ここではその継続時間のモデルであるハザード関数のモデルを使った分析についてまとめる．医学分野で生存解析として研究が始まった継続時間のモデルが景気に応用されたのはDiebold and Rudebusch(1990)が始まりである．彼らは観測された好況不況の時期から継続時間を計算し，指数分布型，2次関数型の2つの連続時間ハザード関数を当てはめ，景気のハザード関数が一定でない(＝推移確率が継続時間に依存する)ことを示した．この結果から，景気の継続時間のどのような依存性があるかどうかが注目されてきた．Sichel(1991)も観測された好況不況に継続時間分析でよく使われるパラメトリックモデルであるワイブル分布を仮定して分析を行った．Diebold *et al.*(1993)では対数ハザード関数が2次関数になる拡張した指数分布モデルでの分析を行った．これらの結果では好況(不況)が長くなればなるほど不況(好況)へのハザード確率(スイッチングの確率)が高まるという正の継続時間依存性を示した．Castro(2010)は比例ハザードモデルを用いて，各国の景気の継続時間のハザード関数がOECDの公表するCIの先行指数や，原油価格，アメリカ合衆国の景気等にも依存することを示している．

これらは好況・不況が観測されたとみなして分析をした研究であるが，景気の変動が観測できない場合への拡張として変動推移確率モデルに景気の継続時間を導入するという研究が盛んになった．前述の(18)のモデル化におけるプロビット・ロジット型の関数は継続時間分析のハザード関数の一つとしても捉えることができる．変動推移確率モデルに，継続時間分析で使われるワイブル分布を導入した研究にIiboshi(2007)がある．特に好況から不況へと不況から好況への推移確率の非対称性を継続時間モデルを用いて示している．以上の継続時間分析のモデルは，すべて時間を連続としてとらえるモデルであるが，離散時間の継続時間分析のモデルとして逐次プロビット(sequential probit)モデルを用いてセミパラメトリックにベイズ分析を行った研究にOmori(2003)がある．

3.2.4 推移確率モデルの今後の課題と展望

以上の様に推移確率モデルは様々な拡張がなされているが，それほど景気を予測する経済変数との関係が明らかになっているわけではない．近年，景気循環の理論として動学的確率一般化均衡(dynamic stochastic general equilibrium; DSGE)モデル等が研究されているが(例えば藤原・渡部(2011)のサーベイを参照されたい)，そうした理論に基づく経済変数の選択とそれらが予測にどれだけ寄与するかを評価していく必要があると思われる．

3.2.5 無限状態隠れマルコフモデル(ノンパラメトリックベイズアプローチ)

構造変化を表すMSモデルにおいて，近年ベイズ統計分析ではノンパラメトリックベイズと呼ばれる無限次元のパラメータを含む統計モデルの研究が盛んにおこなわれている．ノンパラメトリックベイズにおいて代表的なモデルはFerguson(1973)により提案されたディリクレ過程(Dirichlet process)による混合分布モデルである．ディリクレ過程事前分布はMCMCを用いても推定のための計算が困難なものであったが，Sethuraman(1994)のstick-breaking表現に基づく比較的容易な推定法の開発が進み，より柔軟なモデル化が可能になっている．

隠れマルコフモデル(＝MSモデル)のディリクレ過程を用いたノンパラメトリックモデル化については，Beal *et al.*(2001), Teh *et al.*(2006), Fox *et al.*(2011), Yau *et al.*(2011)らによって隠れマルコフの状態数を$D_t=1,2,3\cdots$と無限次元にする拡張が提案されており，遺伝学や音声分析の分野で応用されている．提案されたモデルは無限状態隠れマルコフモデル(infinite hidden Markov model; iHMM)と呼ばれ，経済分析としてはインフレーションの分析の構造変化モデルとしてJochmann(2015), Song(2013)が応用している．他にも隠れマルコフの構造を用いずに，第3.3.2節で紹介するランダム水準シフト(random level shift)モデルにおいてシフトの正規性の仮定を緩めたディリクレ過程混合分布を用いた研究に古澄(2005)がある．

定式化に関してはいくつかの準備が必要となる．まず一般のディリクレ過程事前分布とそのstick-breaking表現について説明する．確率分布Gがディリクレ過程に従うとは，基底測度のパラメータG_0の台である空間の任意の分割$B_1,\cdots,B_m$に対して確率ベクトル$[G(B_1),\cdots,G(B_m)]$がパラメータ$[\alpha G_0(B_1),\cdots,\alpha G_0(B_m)]$のディリクレ分布に従うことであり，このとき$G\sim DP(\alpha,G_0)$と書く．$\alpha>0$を精度パラメータという．事前平均$E[G]=G_0$である．

簡単な例として実数上の確率分布Gを考える．任意の分割$B_1=(t_0,t_1],B_2=(t_1,t_2],\cdots,(t_{m-1},t_m),t_0=-\infty,t_m=\infty$上で確率分布$G$がディリクレ過程に従って生成される場合，特に$G\sim DP(1,\mathrm{N}(0,1))$の場合を挙げる．ここで基底測度$G_0(B_j)=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)dx$である．確率分布$G$は領域$B_1,\cdots,B_m$にそれぞれに確率を$[G(B_1),\cdots,G(B_m)]$と合計1となるように割り振る．確率変数ベクトル$[G(B_1),\cdots,G(B_m)]$を生成する仕組みはパラメータ$[G_0(B_1),\cdots,G_0(B_m)]$を持つディリクレ分布であり，これにより$E[G(B_j)]=G_0(B_j)$と領域上の確率の値の期待値が基底測度で評価した値と等しくなるような確率分布Gが生成される．

Sethuraman(1994)はディリクレ過程が以下の無限個の要素の混合分布で表現できることを証明した．

$$G\sim\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\delta_{\theta_k} \tag{20}$$

$$\beta_k=v_k\prod_{l=1}^{k-1}(1-v_l),\ \ v_k|\alpha\sim\mathcal{B}(1,\alpha),\ \ k=1,2,\cdots \tag{21}$$

$$\theta_k|G_0\sim G_0,\ \ k=1,2,\cdots \tag{22}$$

ここで(21)式を指して確率β_kがstick-breaking過程に従うといい，$\beta_k\sim SBP(\alpha)$と書く．

iHMMはディリクレ過程を階層的に用いて以下の様に定式化される．

$$y_t|\theta^{(D_t)}\sim\pi(y_t|\theta_{D_t}),\ \ t=1,\cdots T \tag{23}$$

$$D_t|Q,D_{t-1}=i\sim Mult(\boldsymbol{q}_i),\ \ t=1,\cdots,T,\ \ D_0=1 \tag{24}$$

$$\boldsymbol{q}_k|\boldsymbol{q}_0\sim DP(c,\boldsymbol{q}_0),\ \ k=1,2,\cdots, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{q}_0\sim SBP(\alpha) \tag{26}$$

$$\theta^{(k)}|\lambda,G_0\sim G_0(\lambda),\ \ k=1,2,\cdots, \tag{27}$$

$$\lambda\sim\mathcal{G} \tag{28}$$

ここで$Q=(\boldsymbol{q}_1',\boldsymbol{q}_2',\cdots)',\boldsymbol{q}_i=(q_{i1},q_{i2},q_{i3},\cdots)$であり，$Mult(\boldsymbol{p})$は確率ベクトル$\boldsymbol{p}$をパラメータとして持つ多項分布である．このモデルは3.1節で議論したChib(1998)の推移確率行列Qを無限次元にして，非対角要素もゼロではないと仮定しているモデルである．その際に，Qの各行の事前分布としてディリクレ過程を用いている．

(23)式は状態変数D_tを条件付けた時にy_tが従う分布を意味する．通常は$\theta^{(k)}=(\mu^{(k)},\sigma^{(k)2}),k=1,2,\cdots$として$y_t|D_t=k\sim\mathrm{N}(\mu^{(k)},\sigma^{(k)2})$とすることが多い．特にJochmann(2015), Song(2013)はAR(p)モデルを考え，$\theta^{(k)}=(\mu^{(k)},\phi_1^{(k)},\cdots,\phi_p^{(k)},\sigma^{(k)2})$, $k=1,2,\cdots$として$y_t|D_t=k,y_{t-p},\cdots,y_{t-p}\sim\mathrm{N}(\mu^{(k)}+\sum_{i=1}^{p}\phi_i^{(k)}y_{t-k},\sigma^{(k)2})$としている．分布(24)は$D_t$の推移確率である．$t-1$時点で状態$D_{t-1}=i$にいる場合に次の時点にどの状態に行くかを定める多項分布となっている．事前分布(27)は$\theta^{(k)}$の事前分布であり，各状態におけるパラメータはλというハイパーパラメータによって定まっており，(28)はその事前分布である．

ここまでは通常の MS モデルと大きく変わらない．違いは無限次元となっている Q の事前分布である．各 $\boldsymbol{q}_i\,(i=1,\cdots)$ は推移行列の i 行目であり，無限次元のベクトルで確率測度である．各 $\boldsymbol{q}_i$ は(25)式の様にディリクレ過程に従っている．その平均は，ディリクレ過程の性質から基底測度である $\boldsymbol{q}_0$ になる．iHMM モデルでは，$\boldsymbol{q}_0$ の特定化による誤りを避けるため，さらに(26)式で階層的に $\boldsymbol{q}_0$ にディリクレ過程事前分布を置き，それを stick-breaking 過程で表現している．Fox *et al.*(2011), Jochmann(2015), Song(2013)では状態が長く続くことをモデル化するために，(25)に依存性を高める(対角要素 q_{ii} の平均を大きくする)ための拡張を行っており，例えば

$$\boldsymbol{q}_k|\boldsymbol{q}_0 \sim DP\left(c+\rho,\ \frac{c\boldsymbol{q}_0+\rho\delta_k}{c+\rho}\right),\ \ k=1,2,\cdots \quad (29)$$

$$\boldsymbol{q}_k|\boldsymbol{q}_0 \sim DP\,(c,\,(1-\rho)\boldsymbol{q}_0+\rho\delta_k),\ \ k=1,2,\cdots \quad (30)$$

等のモデルが提案されており，粘着的 iHMM(Sticky iHMM)と呼ばれている．ただし δ_k は k 番目が 1 で他が 0 の無限次元確率ベクトルであり，$0<\rho<1$ は測度の持続性を表す重みづけパラメータである．

無限次元の多項分布等を含んでいるため，iHMM の推定は困難であるが，MCMC を用いた推定法が提案されている．推定方法の詳細に関してはここでは省略する．上記の各論文を参照されたい．ノンパラメトリックな分析を行うため，通常のモデルよりもデータを多く必要とする可能性はあるが，予測も比較的行いやすく，状態数・変化点の個数の選択も必要がない．また近年は，ディリクレ過程を離れ，stick-breaking 表現を用いて説明変数に依存するノンパラメトリックベイズ分析(例えば Dunson and Park(2008) の kernel stick breaking 過程，Rodriguez and Dunson(2011) の probit stick breaking 過程等)が盛んにおこなわれており，(25)式の分布を変動確率モデルの様に継続時間やその他の経済変数を導入して拡張することも今後の重要な研究対象になると考えられる．

3.3 その他の景気循環・構造変化モデル

本節では Hamilton(1989) や Chib(1998) の MS モデルの代わりに景気変動モデルとして用いることのできる循環・構造変化のモデルを紹介する．これまで紹介したモデルはすべて推移確率の定式化に関するモデルであった．ここでは別の定式化として推移(変化)の時点(transition point, break point)を中心とした分析についてまとめる．勿論 MS モデルからでも転換時点の確率分布は計算することができるように推移確率，転換時点のモデルは相互に書き換えを行うことができ等価なものである．しかし，転換点の事前分布が問題を起こす場合があるという技術的問題点を回避できること，転換点に事前分布を置くという別の定式化をすることでマルコフ性の仮定を弱められる可能性があることなどの利点もある．

他にも，転換点において景気の水準がランダムにシフトするランダム水準シフト(random level shift)モデル，景気変動が転換点の周辺で急激ではなく滑らかに変化する平滑推移(smooth transition)モデルの研究や，それらのモデルと MS モデルと組み合わせたモデルについてもここで紹介する．

3.3.1 転換(変化)点のモデル

転換(変化)点の分析は時系列の検定の分野では膨大な研究があるが，転換点のモデルを用いた景気循環の統計分析あまり行われていない．それは景気循環や構造変化のモデル化が将来の構造変化を予測することに目的があるからであり，そのためには将来の変化点を予測するよりも推移確率や継続時間をモデル化したほうが扱いやすいためであろう．どちらかといえば，これまでの研究では転換点 τ 自体をパラメータとして推定を行うのは技術的な要請という側面が強く，動機としては推移確率一定のモデルにおいて，(1)推移確率 q_{ii} を明示的にモデル化しなくてもよい点と(2)推移確率のモデルから得られる転換点の事前分布が不自然なものになる場合があるためという理由がある．(1)の様に推移確率を明示しない統計分析は，変化点の検出の問題として統計学の古くからある問題であり，様々な推定手法の応用先として議論されてきた．例えば変化点検出に Green(1995) は reversible jump MCMC を，Liang and Wong(2000) は進化モンテカルロ法を提案しているが，その際には変化点をパラメータとして発生させている．これらの研究では事前分布は無情報なものが使われている．一方で，(2)が注目されたのは Koop and Potter(2009) のディスカッションペーパー版が発表された 2004 年頃である．彼らは Chib(1998) らの構造変化モデルではデータの中に n 回構造変化があるという仮定が問題を引き起こすという点を指摘した．例として構造変化点が 1 つの場合，しばしば使われるベータ事前分布から転換点を計算すると最後の $T-1$ 時点に転換点の事前確率が集中することを示している(Koop and Potter(2007) を参照されたい)．彼らは同様の問題は転換点の事前分布に一様分布等，他の事前分布を用いても起こることを示しているが，$T-1$ 時点以降も構造変化が起こり得ると仮定する場合には問題を避けることができるとしている．彼らは変化点の事前分布として

$$\pi(\tau_1,\cdots,\tau_n)=\pi(\tau_1)\prod_{i=1}^{n}\pi(\tau_i|\tau_{i-1}),\ \ \tau_i>\tau_{i-1} \quad (31)$$

とマルコフ性を仮定している．ここで $\tau_i>T-1$ となってもよいとする．具体的な事前分布として，継続時間 $d_i=\tau_i-\tau_{i-1}, \tau_0=0$ として，Koop and Potter (2009) は一様分布を，Koop and Potter(2007) は d_i-1 が強度 λ_i のポアソン分布に従うとした．ポア

ソン分布の場合 $\tilde{d}_i=1,\cdots,T-i$ を状態 i の t 時点間での継続時間としたときに推移確率が

$$\pi(D_t=i+1|D_{t-1}=i,\tilde{d}_i)=\frac{\exp(-\lambda_i)\lambda_i^{\tilde{d}_i-1}}{(\tilde{d}_i-1)!\left(1-\sum_{j=0}^{\tilde{d}_i-2}\frac{\exp(-\lambda_i)\lambda_i^j}{J!}\right)} \quad (32)$$

となることが示されている．Bauwens *et al.*(2014)はポアソン分布を一般化した負の二項分布を提案している．

今のところ，事前分布に積極的に説明変数を導入して，転換点自体を予測するといった研究は見られない．また，継続時間の形で τ_i の事前分布をマルコフ性を持つように仮定する必要も，取扱いの簡便さ以上の理由はない．今後は τ_i をモデル化する際に説明変数を導入し，Koop and Potter(2007)が指摘した標本範囲外の構造変化点を予測するようなモデル化とその精度の評価が重要になると考えられる．

3.3.2 ランダム水準シフトモデル

ランダム水準シフト(random level shift)モデルはChernoff and Zacks(1964), Yao(1984)の先行研究を受け，店舗販売額のデータ分析のためにChen and Tiao(1990)により提案された構造変化のモデルである．同様のモデルは長期記憶モデルと構造変化モデルの検定モデルの文脈では平均＋誤差(mean-plus-noise)モデルの名で知られている(例えばDiebold and Inoue(2001)やInoue(2012)等)．Engle and Smith(1999)は同様のモデルを拡張した枠組みを確率的永続的変化(stochastic permanent break, STOPBREAK)モデルの名前で提案している．ベイズ推定法やMSモデルも含むような一般化等の包括的な議論をMcCulloch and Tsay(1993), Gerlach *et al.*(2000), Giordani *et al.*(2007), Giordani and Kohn(2008)らが行っている．MSモデルとの違いはランダム水準シフトモデルでは μ_t を以下のようにモデル化する点である．

$$\begin{aligned}&\mu_t=\mu_{t-1}+J_tu_t,\ \ t=2,\cdots,n, \quad (33)\\&\mu_1=\mu\\&J_t\sim Bin(1,\pi)\\&u_t\sim \mathrm{N}(0,\sigma_u^2)\end{aligned}$$

ここで $Bin(n,\pi)$ は試行回数 n 回，成功確率 π の二項分布である．構造変化が起こると $J_t=1$ となり u_t が加わるため平均 μ_t がシフトする．このモデルはChib(1998)のモデルと同様に同じ平均値には戻ることがない構造変化のモデルと考えることができる．ベイジアン・頻度論問わず，構造変化発生確率である π は小さい値であると仮定される．実際 $\pi=1$ とした場合，(33)式は通常のランダムウォークとなる．ベイズ分析では π の事前分布を平均が小さくなるように設定することが多い(例えばベータ事前分布 $\mathcal{B}(\alpha_0,\beta_0)$ で β_0 をサンプル数 T や $T/2$ 等とし，ジャンプの回数の平均値がデータの中で1回か2回になるようにする)．例えば $\alpha_0=1,\beta_0=100$ で発生確率の事前平均を $E[\pi]=0.0099, V[\pi]=0.009$ とおいた場合でも月次データで1年間に少なくとも1度構造変化が発生する確率は11.3%となるため，事前分布をそのように調整することにある程度の妥当性はあるものの，構造変化の起きる頻度を事前分布で定めてしまうことには問題があり，本来は事前分布をそのように設定しなくとも事後分布の π が小さくなるモデルの研究をしていくことが今後の課題となると思われる．

3.3.3 ランダム水準シフトとマルコフ・スイッチング・モデルを組合わせたモデル

MSモデルのマルコフ連鎖による分布の混合という簡便さと，ランダム水準シフトモデルの柔軟な状態数の変化の両方を取り入れる研究が近年なされている．ここではそのうちの2つを紹介する．

3.3.4 Geweke and Jiang(2011)のモデル

Geweke and Jiang(2011)は以下のような構造変化モデルを提案している．

$$D_t=D_{t-1}+J_t \quad (34)$$

$$=1+\sum_{s=1}^{t}J_t \quad (35)$$

$$J_t\sim Bin(1,\pi) \quad (36)$$

とし，

$$y_t\sim N(\mu^{(D_t)},\sigma^{(D_t)2}) \quad (37)$$

というモデルの推定を行っている．これは構造変化モデルの構造パラメータ D_t をランダムシフトを用いて定式化したものと見なせる．このモデルは変化回数を事前に決める必要がなく，状態が元に戻るという制約もかかっていないが，実証分析を見る限り，やはり π に強い事前分布を置く必要がある．

3.3.5 Kim and Eo(2013)のモデル

Kim and Eo(2013)は好況と不況の2状態をあらわす平均水準がランダム水準シフトすると仮定し，さらに長期平均の期待値がゼロになるような制約を置くことで新たなスイッチングモデルを提案している．彼らは転換点を表す潜在変数

$$D_{ijt}=\begin{cases}1, & \text{if } S_t=j \text{ and } S_{t-1}=i,\ \ i\neq j\\0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad (38)$$

を導入し，MSモデルの μ_t に

$$\mu_t=(1-S_t)\mu_t^{(0)}+S_t\mu_t^{(1)} \quad (39)$$

$$\mu_t^{(0)}=\mu_{t-1}^{(0)}+D_{10t}u_t^{(0)},\ \ u_t^{(0)}\sim \mathrm{N}(0,\sigma_{u0}^2) \quad (40)$$

$$\mu_t^{(1)}=\mu_{t-1}^{(1)}+D_{01t}u_t^{(1)},\ \ u_t^{(1)}\sim \mathrm{N}(0,\sigma_{u1}^2) \quad (41)$$

と二つの平均にランダム水準シフトモデルを仮定した．ただし $\mu_t^{(0)}<\mu_t^{(1)}$ である．さらに上の μ_t は長期(無条件)平均(long-run mean, unconditional mean)がないので，長期平均が存在するように

$$E[\pi_0\mu_t^{(0)}+\pi_1\mu_t^{(1)}]=0 \quad (42)$$

を導入して

$$\mu_t = \mu + (1-S_t)\mu_t^{(0)} + S_t\mu_t^{(1)} \tag{43}$$

$$\mu_t^{(0)} = \mu_{t-1}^{(0)} + \theta_0(\pi_0\mu_{t-1}^{(0)} + \pi_1\mu_{t-1}^{(1)}) + D_{10t}u_t^{(0)},$$
$$u_t^{(0)} \sim \mathrm{N}(0, \sigma_{u0}^2) \tag{44}$$

$$\mu_t^{(1)} = \mu_{t-1}^{(1)} + \theta_1(\pi_0\mu_{t-1}^{(0)} + \pi_1\mu_{t-1}^{(1)}) + D_{01t}u_t^{(1)},$$
$$u_t^{(1)} \sim \mathrm{N}(0, \sigma_{u1}^2) \tag{45}$$

$$\mu_t^{(0)} < 0,\ \ \mu_t^{(1)} > 0 \tag{46}$$

という共和分関係を満たすようなモデルを提案した．ただし $\pi_i = \dfrac{1-p_{1-i,1-i}}{2-p_{00}-p_{11}}$ である．誤差修正モデルによる表現から定常性の条件

$$-1 < 1 + \theta_0\pi_0 + \theta_1\pi_1 < 1 \tag{47}$$

を導出している．彼らはMCMCを用いて推定を行っているが，$\mu_t^{(0)}, \mu_t^{(1)}$ に不等式制約があるにもかかわらず通常のカルマンフィルタを用いていることや，p_{ii} のサンプリングに π_i の入った状態方程式を使用していない等の近似的なサンプリング方法を行っているため，データによっては計算精度が悪くなる可能性がある．今後は厳密かつ効率的なサンプリングの開発が重要になると思われる．

3.3.6 平滑推移モデル

平滑推移モデルは構造変化が滑らかに起こることを仮定したモデルである．もともとは様々な非線形時系列モデルを含んだ一般形であるState-Dependent Model(Priestley(1980), Haggan *et al.*(1984))の特殊ケースとしてChan and Tong(1986), Teräsvirta(1994)らによって提案され，Teräsvirta and Anderson(1992)によって景気循環に応用された．例として，1次の平滑推移自己回帰(smooth transition autoregressive; STAR)モデルは以下の様に定式化される．

$$y_t = \phi^{(1)\prime}x_t + (\phi^{(2)} - \phi^{(1)})'x_t G(w_t\,;\gamma, c) + e_t \tag{48}$$

ここで，$x_t = (1, y_{t-1})', \phi^{(i)} = (\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)})', w_t$ は係数の構造変化を説明するパラメータであり，$w_t = t$ (時間トレンド)や $w_t = y_{t-d}$ (ラグ観測データ)，より一般に $w_t = h(x_t, \alpha)$ と説明変数の関数とすることもできる．$G(w_t\,;\gamma, c)$ は構造変化の形状を表す既知の関数であり，代表的なものとして

$$G(w_t\,;\gamma, c) = (1+\exp(-\gamma(w_t - c)))^{-1}$$

とするlogistic STAR(LSTAR)モデルや

$$G(w_t\,;\gamma, c) = 1-\exp(-\gamma(w_t - c)^2)$$

とするExponential STAR(ESTAR)モデルがある．ここで c は変化の中心であり，$\gamma > 0$ は変化の速さを意味するパラメータである．LSTARモデルは0と1の間の単調増加な関数となっており，ある状態から別の状態へと単調に推移する変動を表現できる．一方でESTARモデルは0と1の間の値をとり，c で最小値をとる凸関数となっているため，一度変化した状態がまた元に戻るといった変動を表現することができる．

変化点 c が数多くある場合にはLSTARを使って

$$G(w_t\,;\gamma, c) = \left(1+\exp\left(-\gamma\prod_{j=1}^{n}(w_t - c_j)\right)\right)^{-1},$$
$$c_1 < c_2 < \cdots < c_n \tag{49}$$

とする．このモデルはMSモデルの様にある一点の前後で完全に切り替わってしまうのではなく，その間を滑らかに繋いでいる．また，γ の値によっては急激に変わることも緩やかに変わることも可能である．循環ではなく構造変化を想定して状態数を3以上にする場合には $G_i(w_t\,;\gamma, c)\ (i=1, \cdots, n-1)$ と複数の推移関数を用いることで

$$y_t = \phi^{(1)\prime}x_t + (\phi^{(2)} - \phi^{(1)})'x_t G_1(w_t\,;\gamma_1, c) + \cdots +$$
$$(\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)})'x_t G_{n-1}(w_t\,;\gamma_{n-1}, c) + e_t \tag{50}$$

の様に定式化することができる．モデルの利点としては構造変化がいつでも急激に起こるという制約がないことである．また予測に関しては w_t の取り方にもよるが，比較的行いやすい．一方でMSモデル同様，状態数，転換点の数の選択等を行わなければならないという欠点がある．Reversible jump MCMCによりそれらを選択する研究をLopes and Salazar(2006)が行っている．STARモデルについてより詳しくはvan Dijk *et al.*(2002)やその参考文献を参照されたい．

ランダム水準シフトモデルにおいて変動を平滑推移化した研究がEngle and Smith(1999)によってなされている．彼らはSTOPBREAKモデルでジャンプの発生確率を

$$\pi_t = \frac{e_t^2}{\gamma + e_t^2},\ \ \gamma > 0$$

の様に変更したモデルを提案している．

4. 日本の景気循環への応用

4.1 データ

本節では，第2節で説明したMSモデル(モデル1)とそれを拡張したモデルを日本の景気循環に応用する．日本の景気を表す変数として用いたのは，ESRIが11個の景気一致系列を使って作成しているCI一致指数である[7]．CIを自然対数化して1階の階差をとり，さらに100倍することにより%表示にしたものを y_t として用いた．y_t の標本期間は1985年2月から2014年8月までであり，データ数は355である．

CIは各系列から外れ値を処理した上で計算されるが，外れ値を処理して計算されたCIは景気の実態を表していないとの批判があるので，最近では外れ値を処理しないで計算されたCIも公表されている．図1に両者のCIをプロットしている．影の部分はESRIが公表している景気基準日付に基づく景気後退期である．ただし，最後の景気の山と谷はそれぞれ2012年4月と2012年11月になっているが，これらは暫定的に設定された日付である．図2は両

図 1. CI

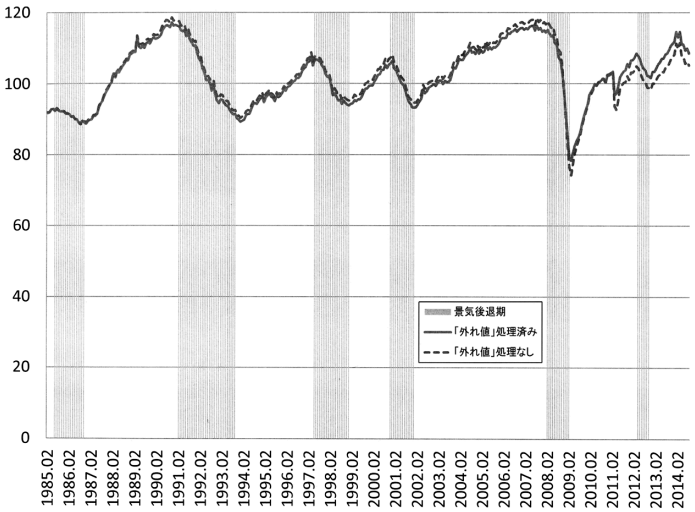


図 2. CI の変化率(%)

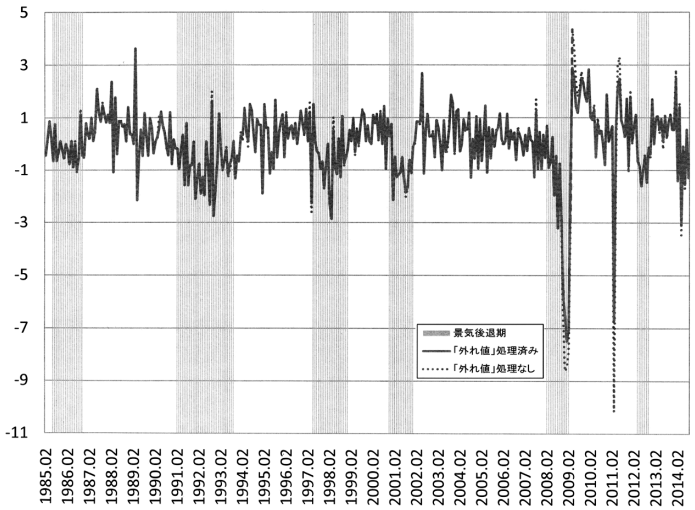


表 1. CI の変化率(%)の基本統計量

平均	標準偏差	歪度	尖度	JB	LB(10) y_t	LB(10) y_t^2
外れ値処理あり						
0.0462 (0.0707)	1.3328	−1.8571 (0.1300)	11.1527 (0.2600)	1187.21	39.86	27.21
外れ値処理なし						
0.0369 (0.0811)	1.5281	−2.3622 (0.1300)	15.6460 (0.2600)	2695.67	24.10	34.93

注) サンプル期間は 1985 年 2 月-2014 年 8 月．サンプル数は 355．括弧内の数値は標準誤差．JB は正規性の検定のための Jarque-Bera 統計量．LB(10)は 10 次までの自己相関係数がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box 統計量で，Diebold(1988)の方法により分散不均一性を調整している．

者の CI の変化率(%)をプロットしている．この図から，外れ値処理なしの CI の変化率の方が変動が大きいことを見て取れる．表 1 に両者の CI 変化率の基本統計量を計算している．外れ値処理なしの CI 変化率の方が標準偏差，歪度の絶対値，尖度が大きくなっており，このことからも外れ値処理なし CI の変化率の方が変動が大きいことを確認できる．いずれの CI 変化率も平均は 0 から有意に乖離していない．また，Jarque-Bera (JB)統計量から，いずれの CI 変化率でも正規性は棄却される．尖度は 3 を有意に上回るので，正規分布より裾の厚い分布に従っていることがわかる．歪度は有意な負の値を示しており，分布の左裾が厚いことがわかる．ただし，分布の非対称性については今後の課題とし，本稿では考えない．LB(10)は 10 次までの自己相関係数がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung-Box 統計量で，Diebold(1988)の方法により分散不均一性を調整している．ここでは，CI 変化率 (y_t) とその 2 乗 (y_t^2) の LB(10)統計量を計算しているが，どちらも有意水準 1% で帰無仮説は棄却される．ただし，(1)式の ϕ が 0 であっても，平均 μ_t が MS モデルに従っているのであれば，y_t に自己相関が生じる．また，y_t^2 に自己相関があるということは，誤差項の分散に自己相関があることを意味する．

4.2　モデル

Watanabe(2014)，渡部(2009)では CI の変化率を分析する際に MS モデルの拡張を行っている．Watanabe(2014)は，SV モデルと t 分布を用いて誤差項 e_t が分散一定の正規分布に従うという仮定を緩めている．渡部(2009)は，構造変化の MS モデルを用いて景気後退期の平均成長率 $\mu^{(0)}$ と景気拡張期の平均成長率 $\mu^{(1)}$ がそれぞれ一定でなくなるよう拡張している．これらの拡張により，MS モデルの CI 変化率への当てはまりがよくなることが示されている．そこで本稿の分析においてもこれらの拡張を行う．

4.2.1　誤差項の拡張

Watanabe(2014)は，2008 年のリーマン・ショックに端を発する金融危機や 2011 年の東日本大震災のような大きなショックを含む標本期間で日本の CI に通常の MS モデルを当てはめると，そうした大きなショックがあった時期だけを景気後退

期と判断し，それ以外の時期をすべて景気拡張期と判断するとの結果を示している．そこで，そうした大きなショックを捉えるために，(1)式の誤差項 e_t について拡張を行っている．具体的には，e_t が裾の厚いスチューデントの t 分布に従うモデルや e_t の分散が SV モデルに従って変動するモデルに拡張している．

e_t が分散一定の自由度 ν のスチューデント t 分布に従う場合，$\nu>2$ であれば分散が有限になるので，e_t は以下のように表される．

モデル 2：

$$e_t = \sigma\varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. standardized } t(\nu),\quad \nu > 2 \tag{52}$$

ここで，“standardized $t(\nu)$” は分散を 1 に基準化した自由度 ν のスチューデント t 分布を表す．

e_t の分布が正規分布で，分散が SV モデルに従って変動する場合，e_t は以下のように表される．

モデル 3：

$$\begin{aligned} e_t &= \sigma_t\varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. N}(0,1) \\ \ln(\sigma_t^2) &= \omega+\phi\{\ln(\sigma_{t-1}^2)-\omega\}+\eta_t \\ \eta_t &\sim \text{i.i.d. N}(0,\sigma_\eta^2) \end{aligned} \tag{53}$$

以上の 2 つを組み合わせたモデルでは，e_t は以下のように表される．

モデル 4：

$$\begin{aligned} e_t &= \sigma_t\varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. standardized } t(\nu),\ \ \nu > 2 \\ \ln(\sigma_t^2) &= \omega+\phi\{\ln(\sigma_{t-1}^2)-\omega\}+\eta_t \\ \eta_t &\sim \text{i.i.d. N}(0,\sigma_\eta^2) \end{aligned} \tag{54}$$

モデル 2 と 4 では，ε_t は以下のように表せる．

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{\lambda_t}z_t,\ \ (\nu-2)/\lambda_t \sim \chi^2(\nu), \\ z_t &\sim \text{N}(0,1). \end{aligned} \tag{55}$$

そこで，Watanabe(2001)，渡部(2005)に従い，自由度 ν と潜在変数 $\tilde{\lambda}_T=(\lambda_1,\cdots,\lambda_T)$ を他のパラメータや潜在変数 $\tilde{S}_T$ と共にサンプリングする．また，$h_t=\ln(\sigma_t^2)$ とすると，モデル 3 と 4 では潜在変数 $\tilde{h}_T=(h_1,\cdots,h_T)$ とパラメータ $(\omega,\phi,\sigma_\eta^2)$ もサンプリングする．$\tilde{h}_T$ のサンプリングには，Watanabe and Omori(2004)の block sampler を用いた．

4.3 構造変化を加えたマルコフ・スイッチング・モデル

Kim and Nelson(1999a)は Chib(1998)の方法を応用することにより，景気後退期と拡張期の平均成長率に構造変化があるモデルに拡張している．Kim and Nelson(1999a)は構造変化点の数を 1 と仮定しているが，渡部(2009)は複数の構造変化点があるモデルに拡張している．ここでは，渡部(2009)に従い，複数の構造変化点を付加したモデルについて説明する．以下では，簡単化のため，構造変化によって値が変化するのは景気後退期と拡張期の平均成長率 $\mu^{(0)},\mu^{(1)}$ だけであるとして説明する．$\mu^{(0)},\mu^{(1)}$ の値が構造変化により変化するので，それらに添え字 t を付けることにより，(2)式を以下のように書き換える．

$$\mu_t = \mu_t^{(0)}(1-S_t)+\mu_t^{(1)}S_t,\ \mu_t^{(0)} < \mu_t^{(1)} \tag{2'}$$

次に，各期においてその期までに何回構造変化が起きているか表すために，(14)式で定義される D_t を用いる．D_t は景気が拡張期か後退期かを表すダミー変数 S_t と独立であると仮定する．この D_t の値に依存して，景気後退期と拡張期の平均成長率がそれぞれ以下のように変化するものとする．

$$\mu_t^{(0)} = \begin{cases} \mu^{(00)}, & D_t = 0 \\ \mu^{(01)}, & D_t = 1 \\ \vdots & \\ \mu^{(0i)}, & D_t = i \\ \vdots & \\ \mu^{(0,n-1)}, & D_t = n-1 \\ \mu^{(0n)}, & D_t = n \end{cases},$$

$$\mu_t^{(1)} = \begin{cases} \mu^{(10)}, & D_t = 0 \\ \mu^{(11)}, & D_t = 1 \\ \vdots & \\ \mu^{(1i)}, & D_t = i \\ \vdots & \\ \mu^{(1,n-1)}, & D_t = n-1 \\ \mu^{(1n)}, & D_t = n \end{cases} \tag{56}$$

ここで，識別のため $\mu^{(0i)}<\mu^{(1i)}\ (i=0,\cdots,n)$ とする．この構造変化を加えた MS モデルの MCMC を用いた推定法に関しては Kim and Nelson(1999a)や渡部(2009)を参照されたい．

4.4 単純な MS モデルの推定結果

まず最初に(1)-(3)式から成る最も簡単なモデル 1 の推定を行う．このモデルのパラメータ $(\tilde{\mu},\phi,\sigma^2,\tilde{p})$ には以下の事前分布を設定した．

$$\tilde{\mu} \sim N\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{I}[\mu^{(0)} < \mu^{(1)}]$$

$$\frac{\phi+1}{2} \sim Beta(1,1),\ \ \sigma^2 \sim IG(6,4)$$

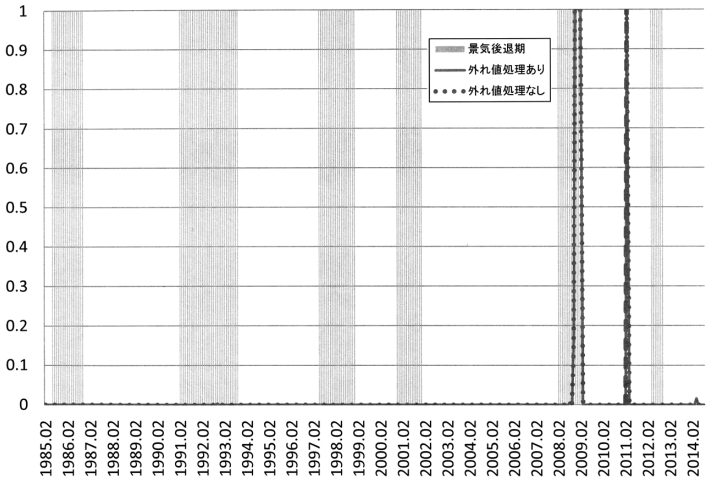
$$p_{00} \sim Beta(9,1),\ \ p_{11} \sim Beta(9,1)$$

p_{00} と p_{11} はこの事前分布の下では平均 0.9，分散 0.0101 になるが，事前分布を(0,1)の一様分布にしても MCMC は問題なく収束し，推定結果もあまり変わらなかった．また，burn-in は 5,000 回とし，その後の 10,000 回のサンプルを事後分布からサンプリングされたものと見なして推定に用いた．

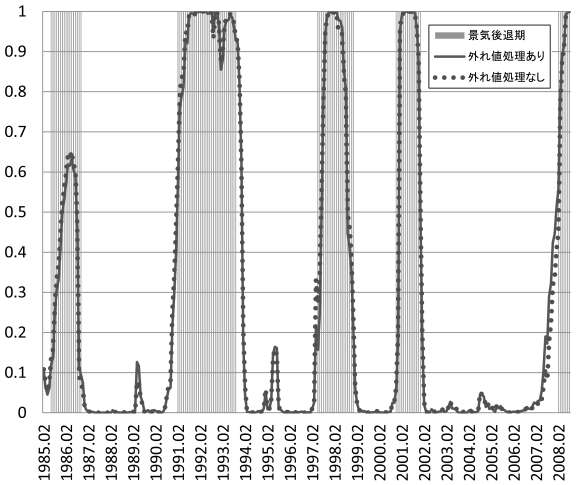
図 3 はこのモデルから推定された各期が景気後退期である事後確率を描いたものである．(a)は 1985 年 2 月から 2014 年 8 月までのすべての標本を使った場合の事後確率である．景気後退期である事後確率は金融危機と東日本大震災の時期だけ 1 に近い値

図 3. 景気後退確率(モデル 1)

(a)1985/02-2014/08



(b)1985/02-2008/08



にジャンプしており，それ以外の期ではほぼ 0 になっている．このことから，金融危機と東日本大震災の時期の CI の低下が大きいため，誤差項を分散一定の正規分布に従うとするモデル 1 ではそれらの時期だけを景気後退期，それ以外をすべて景気拡張期と見なしてしまうことがわかる．(b)は金融危機前の 1985 年 2 月から 2008 年 8 月までの標本を使った場合の事後確率である．金融危機と東日本大震災の時期を除いた標本では，景気後退期である事後確率は ESRI の景気基準日付に基づく景気後退期とほぼ整合的な値になっている．

表 2 はモデル 1 のパラメータの推定結果をまとめたものである．(a)は 1985 年 2 月から 2014 年 8 月までのすべての標本を使った場合の推定結果である．CD 統計量の値によると，burn-in 以降の 10,000 回のサンプルが事後分布に収束しているという帰無仮説は受容される．また，非効率因子の値は小さく，サンプリングが効率的に行われていることがわかる．このモデルでは金融危機と東日本大震災の時期だけを景気後退期と見なすので，それらの時期の CI の急激な低下を反映して，景気後退期の平均成長率 $\mu^{(0)}$ の事後平均が，外れ値処理ありの CI で −6.2990，外れ値処理なしの CI で −7.8561 と極端に低い値になっている．また，景気後退期は金融危機と東日本大震災の時期だけであり，継続時間が短いので，推移確率 p_{00} の事後平均が，外れ値処理ありの CI で 0.7964，外れ値処理なしの CI で 0.7974 と低い値になっている．(b)は金融危機前の 1985 年 2 月から 2008 年 8 月までの標本を使った場合の推定結果である．外れ値処理ありの結果は Watanabe(2014)の Table 2 から抜粋した．金融危機と東日本大震災の時期を除くと，景気後退期である事後確率は ESRI の景気基準日付に基づく景気後退期とほぼ整合的な値になるので，$\mu^{(0)}$ の事後平均は，外れ値処理ありの CI で −0.7964，外れ値処理なしの CI で −0.7807 とそれほど低い値にはなっていない．また，推移確率 p_{00} の事後平均は，外れ値処理ありの CI で 0.9286，外れ値処理なしの CI で 0.9360 に上昇している．

モデル 1 では，景気の平均成長率 μ_t の値だけが S_t の値によって変化すると仮定しているが，他のパラメータも S_t の値によって変化するモデルに拡張することは可能である．ここでは，誤差項 e_t の分散も S_t の値によって変化する以下のモデルの推定も行った．

$$e_t = \sigma_t \varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}\,\mathrm{N}(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = v\{(1-S_t)+hS_t\},\ \ h>0$$

このモデルでは，$S_t=0$ であれば $\sigma_t^2=v$, $S_t=1$ であれば $\sigma_t^2=hv$ になる．v と h の事前分布は以下のように設定した．

$$v \sim IG(6,4),\ \ h \sim IG(6,4)$$

他のパラメータについては，モデル 1 と同じ事前分布を設定した．結果はモデル 1 と変わらないので省略するが，1985 年 2 月から 2014 年 8 月までのすべての標本を使った場合は，やはり景気後退期である事後確率は金融危機と東日本大震災の時期だけ 1 に近い値にジャンプし，それ以外の期ではほぼ 0 になった．このことから，金融危機や東日本大震災のような大きなショックがある標本では，平均だけでなく誤差項の分散を S_t に依存させても，やはり景気転換点をうまく識別できないことがわかる．ただし，このモデルでは y_t の平均 μ_t と誤差項 e_t の分散 σ_t^2

表 2.　モデル 1 の推定結果（分散一定の正規分布）

(a) 標本期間：1985/02–2014/08

	平均	標準誤差	標準偏差	95% 信用区間	CD	IF
	外れ値処理あり					
$\mu^{(0)}$	−6.2990	0.0061	0.5593	[−7.3458, −5.1358]	−0.21	1.42
$\mu^{(1)}$	0.1460	0.0007	0.0679	[0.0112, 0.2795]	−1.41	1.00
ϕ	0.1720	0.0006	0.0529	[0.0695, 0.2754]	0.92	1.07
σ^2	1.0982	0.0009	0.0826	[0.9488, 1.2718]	−0.41	1.04
p_{00}	0.7964	0.0011	0.0996	[0.5685, 0.94929]	0.79	1.00
p_{11}	0.9917	0.0000	0.0048	[0.9799, 0.9982]	−0.07	1.04
	外れ値処理なし					
$\mu^{(0)}$	−7.8561	0.0084	0.5978	[−9.0094, −6.6442]	0.92	1.41
$\mu^{(1)}$	0.1576	0.0008	0.0712	[0.0177, 0.2965]	0.76	1.00
ϕ	0.1418	0.0004	0.0541	[0.0390, 0.2478]	−1.21	1.11
σ^2	1.3058	0.0009	0.0991	[1.1268, 1.5104]	0.87	1.00
p_{00}	0.7974	0.0012	0.1011	[0.5652, 0.9525]	1.44	1.00
p_{11}	0.9917	0.0000	0.0048	[0.9801, 0.9983]	0.54	1.00

注）CD は Geweke (1992) によって提案された収束診断 (convergence diagnostic) 統計量，IF は非効率因子 (inefficiency factor) を表す．

(b) 標本期間：1985/02–2008/08

	平均	標準誤差	標準偏差	95% 信用区間	CD	IF
	外れ値処理あり					
$\mu^{(0)}$	−0.7964	0.0021	0.1219	[−1.0472, −0.5720]	0.44	2.23
$\mu^{(1)}$	0.3798	0.0013	0.0614	[0.2626, 0.5000]	0.07	2.78
ϕ	−0.2185	0.0005	0.0634	[−0.3422, −0.0930]	−0.03	1.27
σ^2	0.6809	0.0007	0.0621	[0.5678, 0.8104]	0.10	1.25
p_{00}	0.9286	0.0005	0.0335	[0.8507, 0.9783]	0.50	1.95
p_{11}	0.9678	0.0002	0.0145	[0.9333, 0.9895]	−0.78	3.50
	外れ値処理なし					
$\mu^{(0)}$	−0.7807	0.0023	0.1179	[−1.0196, −0.5563]	−0.62	2.54
$\mu^{(1)}$	0.3850	0.0011	0.0603	[0.2685, 0.5042]	−0.10	3.03
ϕ	−0.2409	0.0007	0.0619	[−0.3624, −0.1180]	−0.64	1.80
σ^2	0.7091	0.0007	0.0637	[0.5942, 0.8421]	−0.94	1.34
p_{00}	0.9360	0.0004	0.0322	[0.8585, 0.9822]	0.16	1.24
p_{11}	0.9653	0.0002	0.0147	[0.9307, 0.9877]	−0.13	1.46

表 3.　モデル 2–4 の推定結果（誤差項の拡張）

(a) モデル 2（分散一定の t 分布）

	平均	標準誤差	標準偏差	95% 信用区間	CD	IF
	外れ値処理あり					
$\mu^{(0)}$	−0.6965	0.0022	0.1073	[−0.9134, −0.4877]	0.68	7.19
$\mu^{(1)}$	0.5335	0.0011	0.0600	[0.4156, 0.6526]	−0.22	4.64
ϕ	−0.0343	0.0009	0.0525	[−0.1403, 0.0680]	0.52	3.74
σ^2	1.3860	0.0013	0.1172	[1.1777, 1.6445]	0.44	1.07
p_{00}	0.9252	0.0005	0.0289	[0.8567, 0.9704]	0.04	3.99
p_{11}	0.9582	0.0003	0.0158	[0.9218, 0.9832]	0.97	3.90
ν	3.0669	0.0132	0.2730	[2.6816, 3.6552]	−0.93	29.35
	外れ値処理なし					
$\mu^{(0)}$	−0.7079	0.0046	0.1333	[−0.9969, −0.4665]	1.45	9.12
$\mu^{(1)}$	0.5184	0.0020	0.0718	[0.3751, 0.6594]	−0.36	6.97
ϕ	0.0148	0.0020	0.0707	[−0.1295, 0.1409]	1.96	7.36
σ^2	1.8991	0.0025	0.1670	[1.6067, 2.2580]	−0.37	2.27
p_{00}	0.9248	0.0004	0.0291	[0.8576, 0.9709]	0.39	2.27
p_{11}	0.9604	0.0003	0.0155	[0.9246, 0.9846]	0.79	2.81
ν	2.7842	0.0083	0.1653	[2.5206, 3.1637]	1.40	23.53

の値が同じ S_t によって転換すると仮定しており，μ_t と σ_t^2 の値がそれぞれ独立に転換するモデルにすると結果が変わる可能性がある．これについては今後の研究課題としたい．

4.5　拡張した MS モデルの推定結果

まず，誤差項の仮定を変えた 3 つのモデルの推定を行う．誤差項の分布を分散一定の t 分布にしたモデル 2 では，自由度 ν も推定する．その事前分布は以下のように設定した．

$$\nu \sim Gamma(1, 0.1)\boldsymbol{I}[\nu > 2]$$

他のパラメータの事前分布はモデル 1 と同じにした．誤差項の分布が正規分布で分散を確率的ボラティリティ変動モデルに従うとしたモデル 3 では，新たなパラメータは $(\omega, \phi, \sigma_\eta^2)$ である．それらのパラメータの事前分布は以下のように設定した．

$$\omega \sim N(0, 10),\ \frac{\phi+1}{2} \sim Beta(2, 1),$$
$$\sigma_\eta^2 \sim IG(6, 4)$$

他のパラメータはモデル 1 と同じにした．最後に，誤差項の分散が SV モデルに従い，さらに分布が t 分布に従うモデル 4 では，ν はモデル 2，$(\omega, \phi, \sigma_\eta^2)$ はモデル 3，その他のパラメータはモデル 1 と同じ事前分布を設定した．モデル 1 同様，最初の 5,000 回を burn-in として捨て，その後の 10,000 回のサンプルを使って推定を行った．

ここでは，全標本を使った場合の推定結果だけを表 3 にまとめている．CD 統計量の値によると，burn-in 以降の 10,000 回のサンプルが事後分布に収束しているという帰無仮説はすべてのモデルのすべてのパラメータにおいて有意水準 1% で受容される．非効率因子はモデル 1 より高くなっている．表 2(a) の全標本を使った場合のモデル 1 と比べて，$\mu^{(0)}$ と p_{00} の事後平均は上昇し，表 2(b) の金融危機の前の標本を使った場合のモデル 1 のそれらの事後平均に近くなっている．モデル 4 の外れ値処理なし以外は，ϕ の 95% 信用区間が 0 を含んでいるので，y_t の自己相関は主に平均 μ_t の値の転換から生じていることがわかる．誤差項の分布を分散一定の t 分布にしたモデル 2 の ν の事後平均は，外れ値処理ありの CI で 3.0669，外れ値処理なしの CI

表 3. モデル 2–4 の推定結果（誤差項の拡張）

(b) モデル 3（SV＋正規分布）

	平均	標準誤差	標準偏差	95% 信用区間	CD	IF
	外れ値処理あり					
$\mu^{(0)}$	−0.6087	0.0039	0.1203	[−0.8580, −0.3841]	0.74	11.53
$\mu^{(1)}$	0.4826	0.0015	0.0553	[0.3758, 0.5917]	0.85	7.44
ϕ	−0.1288	0.0014	0.0676	[−0.2598, 0.0040]	1.78	5.16
p_{00}	0.9255	0.0004	0.0289	[0.8591, 0.9706]	1.78	2.23
p_{11}	0.9589	0.0002	0.0160	[0.9217, 0.9843]	1.49	3.19
ω	−0.0138	0.0022	0.2137	[−0.4434, 0.4049]	0.96	1.15
ψ	0.8294	0.0021	0.0525	[0.7154, 0.9194]	0.20	21.86
σ_η^2	0.3870	0.0065	0.1029	[0.2271, 0.6250]	−1.48	47.57
	外れ値処理なし					
$\mu^{(0)}$	−0.6015	0.0055	0.1320	[−0.8781, −0.3545]	1.83	15.66
$\mu^{(1)}$	0.4718	0.0020	0.0572	[0.3570, 0.5841]	0.05	10.22
ϕ	−0.1378	0.0025	0.0701	[−0.2728, 0.0024]	−0.67	7.66
p_{00}	0.9246	0.0005	0.0300	[0.8543, 0.9707]	2.13	2.22
p_{11}	0.9594	0.0003	0.0160	[0.9224, 0.9849]	0.55	4.37
ω	−0.0092	0.0033	0.2431	[−0.4823, 0.4682]	−0.23	1.91
ψ	0.8404	0.0028	0.0519	[0.7230, 0.9289]	−0.55	34.81
σ_η^2	0.4093	0.0086	0.1228	[0.2365, 0.7056]	0.82	63.67

(c) モデル 4（SV＋t 分布）

	平均	標準誤差	標準偏差	95% 信用区間	CD	IF
	外れ値処理あり					
$\mu^{(0)}$	−0.6197	0.0041	0.1076	[−0.8443, −0.4196]	1.89	11.05
$\mu^{(1)}$	0.4936	0.0009	0.0529	[0.3915, 0.5977]	0.48	5.04
ϕ	−0.1269	0.0010	0.0656	[−0.2554, 0.0016]	−1.20	4.14
p_{00}	0.9256	0.0005	0.0285	[0.8614, 0.9701]	0.34	2.08
p_{11}	0.9580	0.0004	0.0157	[0.9226, 0.9832]	0.37	3.65
ω	−0.3648	0.0057	0.2042	[−0.7564, 0.0359]	0.28	8.82
ψ	0.7858	0.0042	0.0692	[0.6272, 0.9011]	−0.13	39.25
σ_η^2	0.4090	0.0092	0.1210	[0.2218, 0.6961]	0.32	59.34
ν	21.1656	1.4662	11.1964	[6.5670, 48.4661]	0.47	101.79
	外れ値処理なし					
$\mu^{(0)}$	−0.6095	0.0044	0.1247	[−0.8676, −0.3779]	−1.92	10.74
$\mu^{(1)}$	0.4813	0.0014	0.0542	[0.3739, 0.5866]	−2.22	6.92
ϕ	−0.1412	0.0015	0.0674	[−0.2716, −0.0061]	0.24	4.69
p_{00}	0.9232	0.0004	0.0295	[0.8546, 0.9707]	1.34	2.66
p_{11}	0.9581	0.0003	0.0161	[0.9215, 0.9834]	2.11	4.61
ω	−0.2380	0.0073	0.2382	[−0.7082, 0.2287]	1.56	7.14
ψ	0.8271	0.0033	0.0560	[0.7013, 0.9193]	1.73	32.29
σ_η^2	0.3989	0.0089	0.1157	[0.2143, 0.6719]	−1.86	52.72
ν	20.3429	1.3333	11.1682	[6.7997, 49.3275]	−0.51	102.38

で 2.7842 と低いが，さらに分散を可変にし SV モデルで定式化したモデル 4 では，外れ値処理ありの CI で 21.1656，外れ値処理なしの CI で 20.3429 と高い．これは，モデル 4 では，y_t の分布の裾の厚さを誤差項の分散の変動によっても捉えられるからである．分散を可変にしたモデル 3 で分散の自己相関を表す ψ の事後平均は，外れ値処理ありの CI で 0.8294，外れ値処理なしの CI で 0.8404 で，いずれも 95% 信用区間に 0 が含まれていないので，分散に正の自己相関があることがわかる[8]．モデル 4 でも同様である．

モデル比較のために，Geweke (1999) によって提案された修正調和平均によってモデル 1–4 の周辺尤度を計算した．表 4 にその対数値と標準誤差が示されている．周辺尤度は誤差項の分散が SV モデルに従い，さらに分布が t 分布に従うモデル 4 で最も高くなっており，この結果からモデル 4 が最も当てはまりが良いことがわかる．

図 4 にモデル 2–4 の各モデルによって計算された景気後退期の事後確率を示している．周辺尤度ではモデル 4 が選ばれたが，景気後退期の事後確率はモデル 2–4 でほとんど差はなく，すべて ESRI の景気基準日付に基づく景気後退期とほぼ対応している．また，外れ値を処理した CI を使った場合と外れ値を処理していない CI を使った場合もほとんど差がない．

表 4 で，誤差項の分散が SV モデルに従い，分布が t 分布に従うモデル 4 の周辺尤度が最も高くなっているので，このモデルにさらに構造変化を加えて推定する．新たなパラメータ $\tilde{\mu}_i=[\mu^{(0i)}, \mu^{(1i)}]'$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ と q_{jj} $(j=0, 1, \cdots, n-1)$ の事前分布は以下のように設定した．

$$\tilde{\mu}_i \sim N\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\right) \boldsymbol{I}[\mu^{(0)} < \mu^{(1)}],$$
$$i = 0, 1, \cdots, n$$
$$q_{jj} \sim Beta(9, 0.1),$$
$$j = 0, 1, \cdots, n-1$$

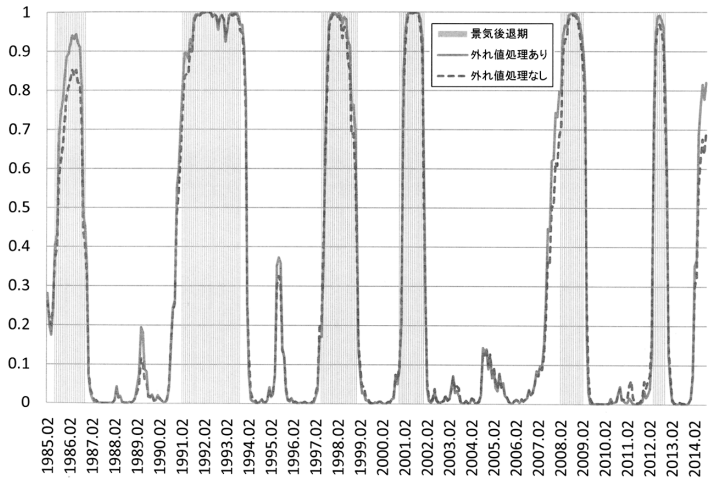
ここでも，burn-in を 5,000 回とし，その後の 10,000 回のサンプルを事後分布からサンプリングされたものと見なして推定に用いた．

表 4. 誤差項の拡張と対数周辺尤度

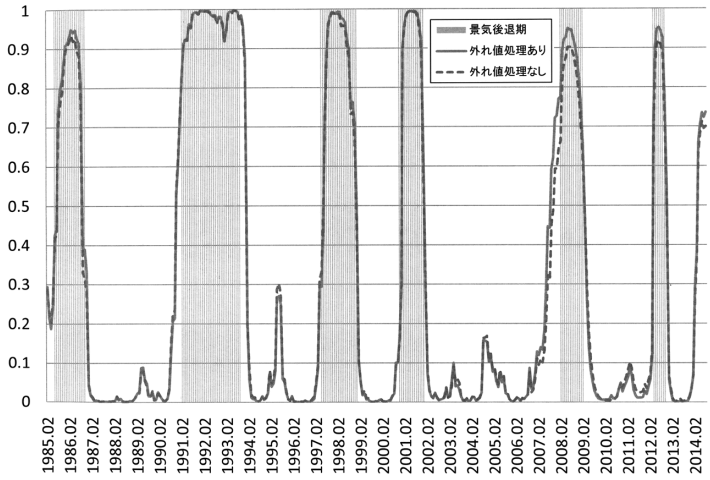
	モデル 1 分散一定の正規分布	モデル 2 分散一定の t 分布	モデル 3 SV＋正規分布	モデル 4 SV＋t 分布
	外れ値処理あり			
対数周辺尤度	−532.229	−483.030	−475.518	−471.489
標準誤差	0.036	0.655	0.618	0.894
	外れ値処理なし			
対数周辺尤度	−564.216	−505.003	−491.477	−489.504
標準誤差	0.026	0.640	0.656	0.946

注） 周辺尤度は Geweke (1999) の修正調和平均を用いて計算した．標準誤差はデルタ法を用いて計算した．

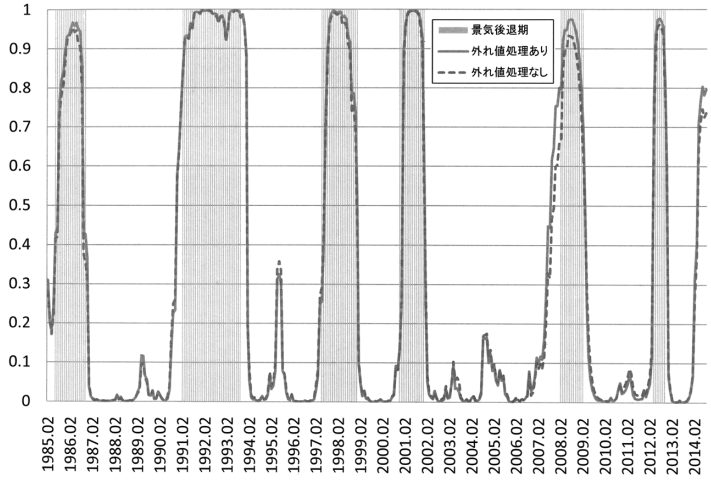
図 4. 景気後退確率
モデル 2(分散一定の t 分布)



モデル 3(SV＋正規分布)



モデル 4(SV＋t 分布)



構造変化点の数 n を 0〜4 とした場合の対数周辺尤度と標準誤差が表 5 に計算されている．それによると構造変化点が 2 つのモデルの対数周辺尤度が最も高くなっている．以下，モデル 4 に 2 つの構造変化点を加えたモデルをモデル 5 と呼ぶ．

図 5 に，構造変化点 2 つのモデル 5 から推定された各構造変化点の事後分布を描いている．これらは，$\tilde{D}_T$ の burn-in 以降の 10,000 回のサンプルそれぞれで，$D_{t-1}<D_t$ となっている t が 2 箇所あるので，それらを抽出して，それぞれのヒストグラムを描いたものである．外れ値処理ありの CI と外れ値処理なしの CI 用いた場合で，構造変化点の事後分布の形状は異なるが，いずれも第一構造変化点の事後分布のピークはリーマンショック後の 2008 年 11 月であり，第二構造変化点の事後分布のピークは 2010 年 2 月である．金融危機による CI の落ち込みは 2008 年 11 月の前から観測されるが，CI の成長率は 2008 年 10 月が外れ値処理ありで −2.854%，外れ値処理なしで−3.555% なのに対して，11 月がぞれぞれ−5.761% と−6.695%，12 月が −6.549% と −8.609% と，2008 年 11 月から大きく低下している．また，金融危機からの急回復により，2009 年 4 月から CI の成長率は大幅なプラスの値に転じており，それが落ち着いてきたのが 2010 年 2 月からである．2010 年 1 月の CI 成長率が，外れ値処理ありで 2.832%，外れ値処理なしで 4.346% なのに対して，2 月がぞれぞれ 1.029% と 1.035%，3 月が 0.917% と 1.025% であった．第一構造変化点の事後分布のピークが 2008 年 11 月，第二構造変化点の事後分布のピークが 2010 年 2 月という結果は，これらの事実と整合的である．

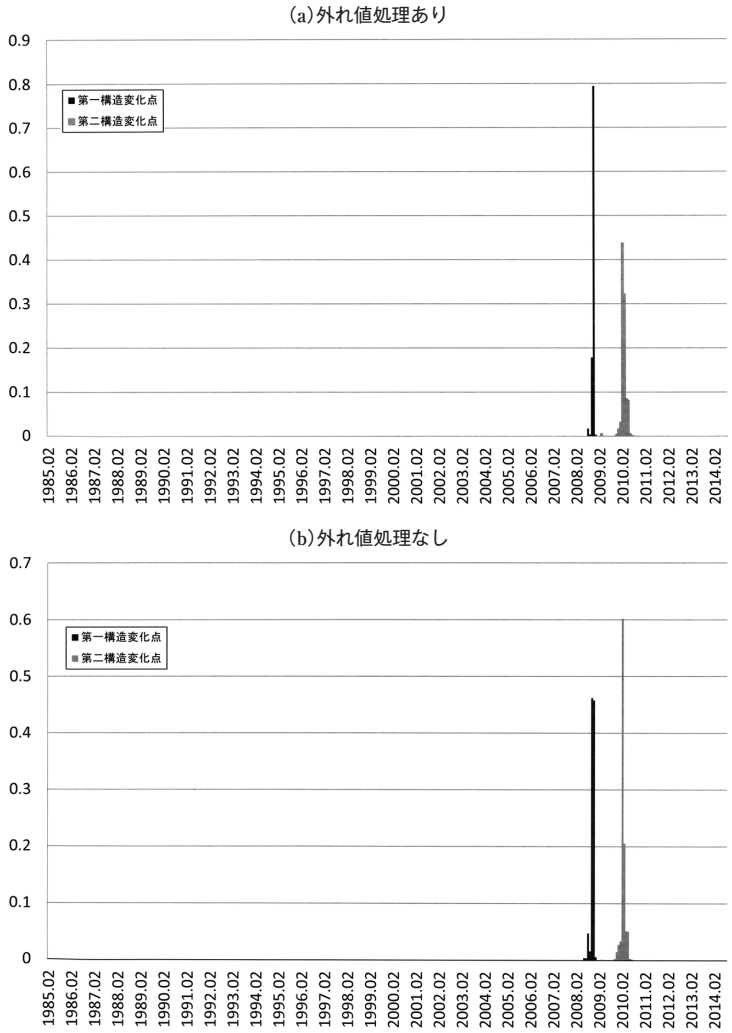
表 6 は，構造変化点 2 つのモデル 5 のパラメータの推定結果である．$\mu^{(00)}$ と $\mu^{(01)}$ の事後平均，$\mu^{(10)}$ と $\mu^{(11)}$ の事後平均を比較すると，第一構造変化点では，景気後退期期の平均成長率は低下し，拡張期の平均成長率

表 5. 構造変化点の数と対数周辺尤度

構造変化点の数	0	1	2	3	4
	外れ値処理あり				
対数周辺尤度	−471.489	−468.150	−460.634	−473.747	−476.933
標準誤差	0.894	0.616	0.961	0.948	0.960
	外れ値処理なし				
対数周辺尤度	−489.504	−506.944	−474.802	−488.446	−495.391
標準誤差	0.946	0.640	0.952	0.960	0.799

注）周辺尤度は Geweke(1999) の修正調和平均を用いて計算した．標準誤差はデルタ法を用いて計算した．

図 5. 構造変化点のヒストグラム（モデル 5）



は上昇していることがわかる．また，$\mu^{(01)}$ と $\mu^{(02)}$ の事後平均，$\mu^{(11)}$ と $\mu^{(12)}$ の事後平均を比較すると，第二構造変化点では，景気後退期の平均成長率は上昇，拡張期の平均成長率は低下していることがわかる．以上の結果から，この構造変化は金融危機とそこからの回復期の景気変動の不安定化を捉えていることがわかる．$\mu^{(01)}$ と $\mu^{(02)}$ は標準誤差と標準偏差が大きいが，これは第一構造変化点と第二構造変化点の間の景気後退期の期間と第二構造変化点以降の景気後退期の期間が短く，$\mu^{(01)}$ と $\mu^{(02)}$ の推定に用いることのできるサンプル数が少ないためであると考えられる．

金融危機からの回復後に景気の平均成長率が金融危機前の水準に戻っているかどうかは興味深い．そこで，さらに，モデル 5 において，$\mu^{(00)}=\mu^{(02)}$，$\mu^{(10)}=\mu^{(12)}$ と制約を置いたモデル 6 を推定する．表 7 にそうした制約を置かないモデル 5 と制約を置いたモデル 6 の対数周辺尤度の値が示されている．外れ値の処理にかかわらず，制約を置いたモデル 6 の方が周辺尤度が高くなっている．この結果から，金融危機からの回復後の景気の平均成長率は金融危機前の水準に戻っていることがわかる．図 6 にはモデル 6 から推定された 2 つの構造変化点の事後分布を描いている．図 5 と多少の形状の違いはあるものの，第一構造変化点と第二構造変化点の事後分布のピークはそれぞれ，やはり 2008 年 11 月と 2010 年 2 月である．モデル 6 のパラメータの推定結果は表 8 示されている．

最後に，構造変化を考慮するのとしないのとで，景気転換点の推定値がどのように影響を受けるかを分析する．図 7 にそれぞれモデル 5 と 6 によって推定した各期が景気後退期である事後確率を描いているが，構造変化を考慮していない図 3 とあまり変わりない．また，表 9 に，モデル 2–6 から推定された景気転換点と内閣府の景気基準日付を記しているが，それも誤差項の分布を裾の厚いスチューデントの t 分布にするか分散を SV モデルによって可変にするかや，構造変化を加えるかどうか，外れ値を処理した CI を使うか処理していない CI を使うかによる違いはほとんど見られない．

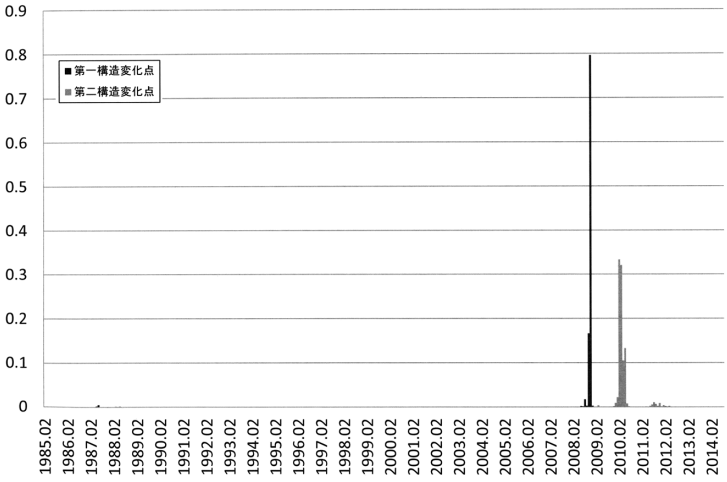
5. まとめと今後の課題

本稿では景気循環の分析に用いられる計量モデルについて，MS モデルとそれを拡張したモデルを中

表 6. モデル 5 の推定結果（SV＋t 分布＋2 回の構造変化）

	平均	標準誤差	標準偏差	95% 信用区間	CD	IF
	外れ値処理あり					
$\mu^{(00)}$	−0.6619	0.0032	0.1115	[−0.8989, −0.4503]	0.63	9.05
$\mu^{(01)}$	−6.1417	0.0244	0.7939	[−7.2719, −3.8675]	0.48	6.95
$\mu^{(02)}$	−1.1902	0.1303	1.4194	[−6.4637, −0.4174]	1.58	92.76
$\mu^{(10)}$	0.4245	0.0011	0.0547	[0.3129, 0.5298]	0.37	6.72
$\mu^{(11)}$	1.9230	0.0087	0.3608	[1.4786, 2.3621]	1.64	4.44
$\mu^{(12)}$	0.6608	0.0044	0.1296	[0.3958, 0.8821]	1.59	12.48
ϕ	−0.2225	0.0020	0.0689	[−0.3509, −0.0825]	−0.78	11.81
p_{00}	0.9241	0.0004	0.0293	[0.8565, 0.9700]	−0.70	1.55
p_{11}	0.9588	0.0003	0.0152	[0.9243, 0.9827]	−0.78	2.47
q_{00}	0.9963	0.0000	0.0035	[0.9867, 0.9999]	0.11	1.73
q_{11}	0.9556	0.0005	0.0405	[0.8511, 0.9982]	−0.30	1.14
ω	−0.5011	0.0058	0.1373	[−0.7638, −0.2243]	−0.29	22.72
ψ	0.5010	0.0090	0.1830	[0.0791, 0.7858]	0.90	23.98
σ_η^2	0.4607	0.0109	0.1534	[0.2294, 0.8062]	−0.04	46.24
ν	18.9234	0.8931	11.0180	[6.1289, 46.6374]	−0.72	36.90
	外れ値処理なし					
$\mu^{(00)}$	−0.6306	0.0062	0.1307	[−0.9118, −0.3893]	1.01	28.05
$\mu^{(01)}$	−6.2067	0.0422	1.3111	[−8.2031, −3.2160]	0.14	5.11
$\mu^{(02)}$	−0.9835	0.0251	1.1954	[−3.3200, −0.2531]	1.95	2.52
$\mu^{(10)}$	0.4244	0.0015	0.0577	[0.31023, 0.5368]	1.17	6.73
$\mu^{(11)}$	2.2722	0.0046	0.2974	[1.7990, 2.7528]	−0.06	1.45
$\mu^{(12)}$	0.6787	0.0027	0.1634	[0.3808, 0.9194]	0.18	1.36
ϕ	−0.2145	0.0014	0.0703	[−0.3470, −0.0733]	0.63	3.97
p_{00}	0.9258	0.0004	0.0288	[0.8582, 0.9713]	0.49	1.31
p_{11}	0.9591	0.0003	0.0156	[0.9224, 0.9833]	−1.31	2.27
q_{00}	0.9962	0.0000	0.0036	[0.9865, 0.9999]	0.76	1.01
q_{11}	0.9562	0.0005	0.0405	[0.8473, 0.9984]	1.40	1.12
ω	−0.3832	0.0085	0.1621	[−0.6953, −0.0601]	−1.76	26.61
ψ	0.6537	0.0043	0.1058	[0.4145, 0.8292]	−0.76	6.51
σ_η^2	0.4801	0.0093	0.1488	[0.2446, 0.8324]	1.37	16.80
ν	18.7356	1.4426	11.1973	[5.6303, 48.0200]	1.86	185.62

図 6. 構造変化点のヒストグラム（モデル 6）
(a)外れ値処理あり



心に解説を行った．また，1985 年 2 月-2014 年 8 月の日本の CI 一致指数の変化率を用いて MS モデルとそれを拡張したモデルを推定し以下のことを明らかにした．

(1) この標本期間には 2008 年のリーマンショックに端を発する金融危機と 2011 年の東日本大震災という 2 つの大きなショックがあり，それによって CI が大きく低下しているので，誤差項の分布を分散一定の正規分布にした通常の MS モデルを使うと，それら 2 つの時期だけ景気後退期，それ以外の時期をすべて景気拡張期と判断してしまう．

(2) 誤差項の分布を裾の厚い t 分布にするか，あるいは分散を可変にしその変動を SV モデルによって定式化すると，ESRI の景気基準日付に近い景気の転換点の推定値が得られる．ただし，これらの拡張したモデルでは，2014 年 4 月を景気の山として推定しているが，ESRI の景気基準日付ではまだ山との判断はなされていない．

(3) 周辺尤度に基づくベイズ統計学のモデル比較によると，誤差項の分布を t 分布にし，かつ分散の変動を SV モデルによって定式化したモデルが最も当てはまりが良い．

(4) 誤差項の分布を t 分布にし，かつ分散の変動を SV モデルによって定式化したモデルにおいて，景気後退期・拡張期の CI の平均成長率に 2 回の構造変化を加えると，周辺尤度の値がさらに高まり，構造変化点はリーマンショック後の 2008 年 11 月と 2010 年 2 月であると推定された．第一構造変化点と第二構造変化点の間は景気の振幅が大きくなっているので，この構造変化は金融危機とそこからの

表 7. モデル 5 と 6 の対数周辺尤度

	モデル 5	モデル 6
	外れ値処理あり	
対数周辺尤度	−460.634	−450.021
標準誤差	0.961	0.831
	外れ値処理なし	
対数周辺尤度	−474.802	−471.567
標準誤差	0.952	0.639

注）周辺尤度は Geweke(1999) の修正調和平均を用いて計算した．標準誤差はデルタ法を用いて計算した．

図 6. 構造変化点のヒストグラム(モデル 6)
(b)外れ値処理なし

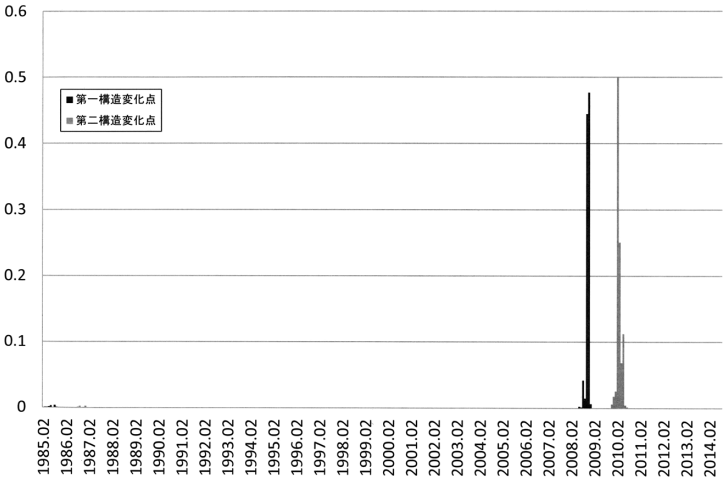


表 8. モデル6の推定結果(SV＋t分布＋2回の構造変化 ($\mu^{(00)}=\mu^{(02)}, \mu^{(10)}=\mu^{(12)}$)

	平均	標準誤差	標準偏差	95% 信用区間	CD	IF
	外れ値処理あり					
$\mu^{(00)}$	−0.6794	0.0028	0.1189	[−0.8783, −0.4921]	0.08	1.73
$\mu^{(01)}$	−6.1420	0.0602	0.9085	[−7.2627, −3.3158]	−1.09	41.00
$\mu^{(10)}$	0.4725	0.0013	0.0532	[0.3667, 0.5689]	0.14	2.66
$\mu^{(11)}$	1.8577	0.0345	0.4264	[1.0470, 2.3477]	1.61	63.09
ϕ	−0.2146	0.0023	0.0716	[−0.3424, −0.0785]	−1.52	7.89
p_{00}	0.9192	0.0006	0.0296	[0.8530, 0.9661]	0.76	5.32
p_{11}	0.9596	0.0003	0.0151	[0.9250, 0.9833]	0.79	4.05
q_{00}	0.9960	0.0002	0.0056	[0.9854, 0.9999]	0.74	21.92
q_{11}	0.9576	0.0009	0.0398	[0.8543, 0.9987]	−0.29	5.66
ω	−0.4671	0.0090	0.1474	[−0.7391, −0.1597]	−2.22	48.56
ψ	0.4598	0.0122	0.1876	[−0.0100, 0.7437]	−0.90	49.68
σ_η^2	0.4591	0.0110	0.1512	[0.2288, 0.8263]	1.64	29.13
ν	14.5388	1.1033	8.9985	[4.8529, 37.3307]	0.55	155.52
	外れ値処理なし					
$\mu^{(00)}$	−0.6476	0.0035	0.1126	[−0.8796, −0.4359]	−0.90	5.85
$\mu^{(01)}$	−6.2409	0.0689	1.3307	[−8.2537, −3.1648]	0.01	31.46
$\mu^{(10)}$	0.4702	0.0011	0.0530	[0.3643, 0.5725]	0.11	2.01
$\mu^{(11)}$	2.2234	0.0240	0.3581	[1.7024, 2.7370]	−0.88	38.07
ϕ	−0.2076	0.0014	0.0676	[−0.3362, −0.0765]	−0.14	4.98
p_{00}	0.9203	0.0005	0.0293	[0.8540, 0.9676]	−0.82	5.17
p_{11}	0.9606	0.0002	0.0151	[0.9262, 0.9843]	0.04	1.74
q_{00}	0.9955	0.0007	0.0106	[0.9852, 0.9999]	0.16	38.39
q_{11}	0.9562	0.0003	0.0398	[0.8501, 0.9984]	−0.62	1.17
ω	−0.3795	0.0073	0.1579	[−0.6850, −0.0566]	−1.00	21.85
ψ	0.6435	0.0072	0.1126	[0.3870, 0.8265]	−1.23	18.66
σ_η^2	0.4818	0.0098	0.1466	[0.2486, 0.8163]	1.44	10.94
ν	20.4421	1.0976	11.5319	[5.6568, 50.7056]	1.02	101.19

回復期における景気変動の不安定化によるものである.

(5) 景気後退確率やそれに基づく景気転換点の推定値は，誤差項の分布を t 分布にするか分散の変動を SV モデルによって定式化するか，外れ値を処理した CI を使うか処理していない CI を使うか，構造変化を考慮するかどうかには依存しない.

(1)–(3) の結果は 1985 年 2 月–2013 年 11 月の日本の CI 一致指数の変化率を用いて同様の分析を行っている Watanabe(2014) の結果と同じである．それに対して，渡部(2009) では，1980 年 2 月–2009 年 2 月の日本の CI 一致指数の変化率を用いて誤差項を分散一定の正規分布にした MS モデルに構造変化を加えて推定し，構造変化点は 1991 年 7 月と 2008 年 7 月の 2 回であるとの結果を得ている．また，構造変化を考慮することで，ESRI の景気基準日付により近い景気転換点の推定値が得られることを示している．これらの結果は (4), (5) の結果と異なるので，さらなる分析が必要であろう.

本稿の分析には以下の拡張が考えられるが，これらについては今後の課題としたい.

1. 誤差項の分布の拡張として t 分布を用いたが，表 1 の歪度は有意な負の値を示しており，CI の変化率は左裾が厚い．そこで，こうした分布の非対称も考慮した非対称 t 分布や混合正規分布を用いた分析も今後行う必要がある．非対称 t 分布については，Aas(2005), Azzalini and Capitano(2003), Fernández and Steel(1998) を参照されたい.
2. 誤差項の分散の変動を表すモデルとして SV モデルを用いたが，GARCH モデルやマルコフ・スイッチング GARCH モデルを用いることもできるので，そうしたモデルを用いた分析も必要である．GARCH モデルについては渡部(2000)，マルコフ・スイッチング GARCH モデルやその MCMC を用いたベイズ推定については Bauwens *et al.*(2014) を参照されたい.
3. MS モデルの状態数を 2 と仮定したが，それを増やすことによっても金融危機や東日本大震災などの大きなショックを吸収できる可能性があるので，そうした分析も必要である.
4. 周辺尤度や景気転換点の推定値によってモデルの比較を行ったが，将来の CI の予測精度や

図 7．景気後退確率（モデル 5）
（a）SV＋t 分布＋2 回の構造変化

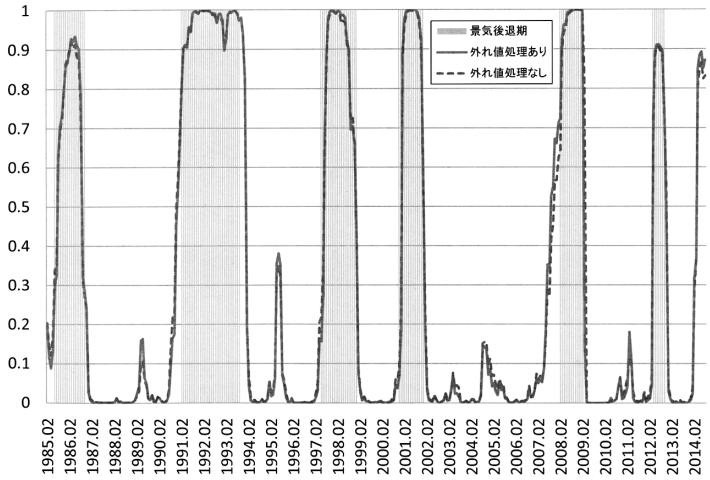
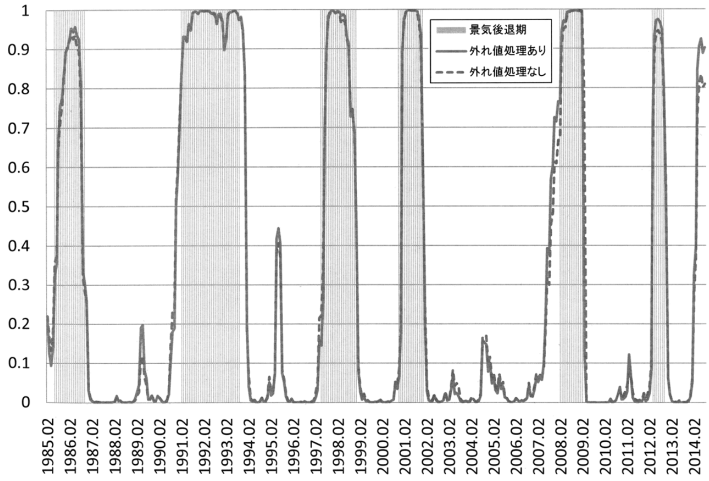


図 7．景気後退確率（モデル 6）
（b）SV＋t 分布＋2 回の構造変化（制約あり）



どのモデルが景気転換点を早く見つけられるかといった観点からの比較も重要である．

5. データとして CI のみを用いたが，内閣府経済社会総合研究所では diffsion index（DI）も公表しているので，CI と DI を同時に用いたモデルの開発も重要である．
6. 日本の景気循環についてのみ分析を行ったので，米国などの他国についても同様の結果が得られるかどうか分析を行う必要がある．
7. 本稿では ESRI の CI 一致指数を用いたが，Stock and Watson（1989, 1991）は，景気を複数のマクロ変数の共通因子として定義する動学因子モデルを提案し，Kim and Nelson（1998）は共通因子の平均成長率の値が好不況によってスイッチする動学マルコフ・スイッチング（MS）因子モデルに拡張している．このモデルの共通因子や各系列固有のショックの分散や分布を本稿と同じように拡張することも重要である．裾の厚い分布に従うのが各系列固有のショックだけであれば，各系列に外れ値の処理を行った上で CI を計算するのは問題ないが，共通因子が裾の厚い分布に従うのであれば，そうした外れ値の処理は望ましくない．動学因子モデルや動学 MS 因子モデルの日本のマクロ・データへの応用については，それぞれ Fukuda and Onodera（2001）と Watanabe（2003）を参照されたい．
8. 本稿の第 3 節でサーベイしたように，新たなモデルもいくつか提案されているので，今後，そうしたモデルも応用し，本稿の分析結果と比較すべきであろう．

補論 A：事前分布と全条件付事後分布

本補論では，各パラメータの事前分布と 2.2 節の（5）-（9）の全条件付事後分布およびそこからのサンプリング法について説明する．詳細については，Kim and Nelson（1999b）の Chapter 9 を参照されたい．ただし，そこでは尤度の初期分布 $f(y_1|\tilde{\theta})$ を無視して全条件付事後分布を導出しているのに対して，ここでは $y_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2/(1-\phi^2))$ として初期分布まで考慮した厳密な全条件付き事後分布を求めている．

（5）　$\tilde{\mu}=[\mu^{(0)}, \mu^{(1)}]'$ の事前分布には以下のように互いに独立な 2 変量切断正規分布を仮定する．

$$\tilde{\mu} \sim \mathrm{N}(M_{\mu 0}, \Sigma_{\mu 0}) I(\mu^{(0)} < \mu^{(1)}) \qquad \text{(A1)}$$

ここで，$I(\mu^{(0)}<\mu^{(1)})$ は括弧内の不等式が満たされれば 1，そうでなければ 0 となる指示関数（indicator function）であり，したがって，この事前分布は平均 $M_{\mu 0}$，分散共分散行列 $\Sigma_{\mu 0}$ の 2 変量正規分布を $\mu^{(0)}<\mu^{(1)}$ の範囲だけ残して切断した切断正規分布になっている．

この事前分布の下では，$\tilde{\mu}$ の全条件付き事後分布も以下のような 2 変量切断正規分布になる．

$$\tilde{\mu}|\phi, \sigma^2, \tilde{p}, \tilde{S}_T, \tilde{y}_T \sim \mathrm{N}(M_{\mu 1}, \Sigma_{\mu 1}) I(\mu^{(0)} < \mu^{(1)}) \qquad \text{(A2)}$$

ここで，

$$Y = [\sqrt{1-\phi^2}\, y_1/\sigma, (y_2-\phi y_1)/\sigma, \cdots, (y_{\tau_1-1}-\phi y_{\tau_1-2})/\sigma]'$$

表 9. 景気転換点の推定値

(a)外れ値処理あり

ESRI	モデル 2	モデル 3	モデル 4	モデル 5	モデル 6
山					
85/06	85/08	85/08	85/08	85/08	85/08
91/02	90/11	90/11	90/11	90/12	90/11
97/05	97/07	97/07	97/07	97/07	97/07
00/10	01/01	01/01	01/01	01/01	01/01
08/02	07/09	07/11	07/09	07/09	07/09
12/04	12/04	12/04	12/04	12/04	12/04
—	14/04	14/04	14/04	14/04	14/04
谷					
86/11	86/09	86/09	86/09	86/09	86/09
93/10	94/01	94/01	94/01	94/01	94/01
99/01	98/12	99/01	98/12	98/12	98/12
02/01	02/01	02/01	02/01	02/01	02/01
09/03	09/04	09/03	09/04	09/03	09/03
12/11	12/12	12/12	12/12	12/11	12/12

(b)外れ値処理なし

ESRI	モデル 2	モデル 3	モデル 4	モデル 5	モデル 6
山					
85/06	85/08	85/08	85/08	85/08	85/08
91/02	90/12	90/11	90/11	90/12	90/11
97/05	97/07	97/07	97/07	97/07	97/07
00/10	01/01	01/01	01/01	01/01	01/01
08/02	07/09	07/09	07/11	07/11	07/11
12/04	12/04	12/04	12/04	12/04	12/04
—	14/04	14/04	14/04	14/04	14/04
谷					
86/11	86/09	86/09	86/09	86/09	86/09
93/10	94/01	94/01	94/01	94/01	94/01
99/01	98/12	98/12	98/12	98/12	98/12
02/01	02/01	02/01	02/01	02/01	02/01
09/03	09/04	09/03	09/03	09/04	09/04
12/11	12/12	12/12	12/12	12/12	12/12

$$X = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\phi^2}(1-S_1)/\sigma, & \sqrt{1-\phi^2}S_1/\sigma \\ \{(1-S_2)-\phi(1-S_1)\}/\sigma, & (S_2-\phi S_1)/\sigma \\ \vdots & \vdots \\ \{(1-S_T)-\phi(1-S_{T-1})/\sigma, & (S_T-\phi S_{T-1})/\sigma \end{bmatrix}$$

と定義すると，

$\Sigma_{\mu 1} = (\Sigma_{\mu 0}^{-1}+X'X)^{-1}$, $M_{\mu 1} = \Sigma_{\mu 1}(\Sigma_{\mu 0}^{-1}M_{\mu 0}+X'Y)$

この分布からサンプリングするには，まず平均 $M_{\mu 1}$，分散 $\Sigma_{\mu 1}$ の 2 変量正規分布からサンプリングし，サンプリングされた値が $\mu^{(0)}<\mu^{(1)}$ を満たさなければ，それを捨てて新たにサンプリングすればよい．

(6) ϕ の事前分布を $\pi(\phi)$ とすると，ϕ の全条件付き事後確率密度関数は以下のように表すことができる．

$$\pi(\phi|\tilde{\mu},\sigma^2,\tilde{p},\tilde{S}_T,\tilde{y}_T) \propto \pi(\phi)\sqrt{1-\phi^2} \exp\left\{-\frac{(\phi-m_\phi)^2}{2\sigma_\phi^2}\right\} \tag{A3}$$

ただし，

$$m_\phi = \frac{\sum_{t=2}^{T}(y_t-\mu_t)(y_{t-1}-\mu_{t-1})}{\sum_{t=2}^{T-1}(y_t-\mu_t)^2}$$

$$\sigma_\phi^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^{T-1}(y_t-\mu_t)^2}$$

この全条件付き事後確率分布からは直接サンプリングできないので，MH アルゴリズムを用いる[9]．(A3) 式の $\pi(\phi)\sqrt{1-\phi^2}$ を無視すると，平均 m_ϕ，分散 σ_ϕ^2 の正規分布の核になる．したがって，提案分布を $(-1,1)$ 上の切断正規分布 $N(m_\phi,\sigma_\phi^2)I(-1<\phi<1)$ として候補点 ϕ^* を発生させ，この候補点 ϕ^* を次の確率で受容する．

$$\min\left\{\frac{\pi(\phi^*)\sqrt{1-\phi^{*2}}}{\pi(\phi)\sqrt{1-\phi^2}},1\right\}$$

ここで，ϕ は 1 回前にサンプリングされた値であり，棄却された場合には，その値をもう 1 度サンプリングする．

本稿では ϕ の事前分布として，$(1+\phi)/2$ にベータ分布を仮定した．そうすると，$-1<\phi<1$ となる．ϕ の事前分布を $(-1,1)$ 上の切断正規分布にすることもできる．その場合，初期分布を無視すれば ϕ の全条件付き事後分布は切断正規分布になるが，初期分布まで考えるとそうならないので，やはり MH アルゴリズムを用いる必要がある．

(7) σ^2 の事前分布には次のような逆ガンマ分布を仮定する．

$$\sigma^2 \sim IG\left(\frac{\nu_0}{2},\frac{\delta_0}{2}\right) \tag{A4}$$

この事前分布の下では，全条件付き事後分布も次のような逆ガンマ分布になる．

$$\sigma^2|\tilde{\mu},\phi,\tilde{p},\tilde{S}_T,\tilde{y}_T \sim IG\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{\delta_1}{2}\right) \tag{A5}$$

ただし，

$$\nu_1 = \nu_0+T,\ \ \delta_1 = \delta_0+(1-\phi^2)(y_1-\mu_1)^2 + \sum_{t=2}^{T}\{y_t-\mu_t-\phi(y_{t-1}-\mu_{t-1})\}^2$$

この分布からサンプリングするには，ガンマ分布からサンプリングし，その逆数をとればよい．

(8) $\tilde{S}_T$ のサンプリングには，Kim and Nelson (1998, 1999b) で提案されている multi-move sampler を用いる[10]．$\tilde{S}^{t+1}=[S_t+1,\cdots,S_T]'$ と定義すると，$\tilde{S}_T$ の全条件付き事後確率関数は次式のように表現できる．

$$\pi(\tilde{S}_T|\tilde{y}_T,\tilde{\theta}) = \pi(S_T|\tilde{y}_T,\tilde{\theta})\cdots\pi(S_t|\tilde{S}^{t+1},\tilde{y}_T,\tilde{\theta}) \cdots\pi(S_1|\tilde{y}_T,\tilde{\theta}) \tag{A6}$$

そこで，左辺の分布から $\tilde{S}_T$ をサンプリングするためには，まず右辺第 1 項 $\pi(S_T|\tilde{y}_T,\tilde{\theta})$ から S_T をサンプリングし，そこでサンプリングされた S_T の値を条件として，右辺第 2 項 $\pi(S_{T-1}|S_T,\tilde{y}_T,\tilde{\theta})$ から S_{T-1} をサンプリングするといったように，時間と

逆方向に S_1 まで順々に右辺の各項からサンプリングすればよい．

右辺の各項は以下のように表すことができる[11]．

$$\pi(S_t = l|S_{t+1}, \tilde{y}_T, \tilde{\theta}) = \frac{\pi(S_t = l|\tilde{y}_t, \tilde{\theta})\pi(S_{t+1}|S_t = l, \tilde{p})}{\sum_{j=0}^{1}\pi(S_t = j|\tilde{y}_t, \tilde{\theta})\pi(S_{t+1}|S_t = j, \tilde{p})}, \quad l = 0, 1 \tag{A7}$$

この式の右辺の分子，分母の第2項は推移確率(3)式である．第1項は，定常確率

$$\pi(S_0 = 1|\tilde{y}_0, \tilde{\theta}) = \pi(S_0 = 1|\tilde{p}) = \frac{1-p_{00}}{2-p_{00}-p_{11}} \tag{A8}$$

$$\pi(S_0 = 0|\tilde{y}_0, \tilde{\theta}) = \pi(S_0 = 0|\tilde{p}) = \frac{1-p_{11}}{2-p_{00}-p_{11}} \tag{A9}$$

からスタートして，$t=T$ まで，時間の順に Hamilton(1989)で提案されているフィルターを実行することで導出できる[12]．

そこで，(A6)から $\tilde{S}_T$ をサンプリングするためには，以下の2つのステップを行えばよい．

(i)まず，定常確率(A8)，(A9)からスタートして，$t=1$ から $t=T$ まで時間の順に Hamilton(1989)のフィルターを実行し，$\pi(S_t|\tilde{y}_t, \tilde{\theta})$ $(t=1, \cdots, T)$ を計算する．

(ii)次に，(i)で最後に計算される $\pi(S_T|\tilde{y}_T, \tilde{\theta})$ を使って S_T をサンプリングする．具体的には，確率 $\pi(S_T=1|\tilde{y}_T, \tilde{\theta})$ で $S_T=1$ をサンプリングし，残りの確率で $S_T=0$ をサンプリングする．さらに，そこでサンプリングされた S_T を使って次の確率を計算する．

$$\pi(S_{T-1} = 1|S^T, \tilde{y}_T, \tilde{\theta}) = \frac{\pi(S_{T-1} = 1|\tilde{y}_{T-1}, \tilde{\theta})\pi(S_T|S_{T-1} = 1, \tilde{p})}{\sum_{j=0}^{1}\pi(S_{T-1} = j|\tilde{y}_t, \tilde{\theta})\pi(S_T|S_{T-1} = j, \tilde{p})} \tag{A10}$$

ただし，右辺の $\pi(S_{T-1}=1|\tilde{y}_{T-1}, \tilde{\theta})$ は(i)で Hamilton(1989)フィルターによって計算され，$\pi(S_T|S_{T-1}=1, \tilde{p})$ は推移確率(3)である．(A10)式の確率で $S_{T-1}=1$ をサンプリングし，残りの確率で $S_{T-1}=0$ をサンプリングする．これを時間と逆方向に $t=1$ まで繰り返せばよい．

(9)　推移確率 $\tilde{p}=[p_{00}, p_{11}]'$ の事前分布には次のような互いに独立なベータ分布を仮定する．

$$p_{00} \sim Beta(u_{00}, u_{01}),\quad p_{11} \sim Beta(u_{11}, u_{10}) \tag{A11}$$

ベータ分布を用いることにより，p_{00}, p_{11} は必ず0から1までの値になる．

この事前分布の下では，全条件付き事後確率密度関数は以下のように表せる．

$$\pi(\tilde{p}|\tilde{S}_T) \propto \frac{(1-p_{00})^{S_1}(1-p_{11})^{1-S_1}}{2-p_{00}-p_{11}} p_{00}^{u_{00}+n_{00}}(1-p_{00})^{u_{01}+n_{01}}p_{11}^{u_{11}+n_{11}}(1-p_{11})^{u_{10}+n_{10}} \tag{A12}$$

ただし，n_{00} は条件の $\tilde{S}_T$ の中で $S_t=0$ かつ $S_{t+1}=0$ であった t の個数，n_{01} は $S_t=0$ かつ $S_{t+1}=1$ であった t の個数であり，n_{11}, n_{10} も同様である．これらは上記(8)でサンプリングした $\tilde{S}_T$ から得ることができる．

$0 \leq \frac{(1-p_{00})^{S_1}(1-p_{11})^{1-S_1}}{2-p_{00}-p_{11}} \leq 1$ なので，受容・棄却(accept-reject)アルゴリズムを用いる．$\frac{(1-p_{00})^{S_1}(1-p_{11})^{1-S_1}}{2-p_{00}-p_{11}}$ を無視すると，(A12)式は以下の互いに独立なベータ分布になる．

$$p_{00} \sim Beta(u_{00}+n_{00}, u_{01}+n_{01}),\quad p_{11} \sim Beta(u_{11}+n_{11}, u_{10}+n_{10}) \tag{A13}$$

そこで，この互いに独立なベータ分布からサンプリングし，それを確率 $\frac{(1-p_{00})^{S_1}(1-p_{11})^{1-S_1}}{2-p_{00}-p_{11}}$ で受容し，棄却された場合には受容されるまでサンプリングを繰り返す．

(大阪大学金融・保険教育研究センター・一橋大学経済研究所)

注

＊　一橋大学経済研究所定例研究会で，討論者の大森裕浩氏(東京大学)，『経済研究』編集委員の神林龍氏(一橋大学)，他の参加者から有益なコメントを頂いた．また，中島上智氏(日本銀行)と大塚芳宏氏(長崎県立大学)にも貴重なコメントを頂いた．記して感謝したい．本研究は科学研究費(No. 26245028, No. 25245037)より助成を受けている．本稿の誤りはすべて筆者たちの責任である．

1)　SV モデルについて詳しくは，渡部(2000, 2005)，大森・渡部(2012)を参照されたい．

2)　どのパラメータがスイッチするのかを調べる方法に permutation sampler がある．この方法について詳しくは，Frühwirth-Schnatter(2001, 2006)を参照されたい．石原・大森(2008)はこの方法を SV モデルに応用している．

3)　平均に差がないというのは収束の必要条件であり，十分条件ではない．

4)　最初の M_A 個と最後の M_B 個の間に $M-M_A-M_B=0.4M$ 個分の間隔を空けているのは，$\bar{\theta}_A$ と $\bar{\theta}_B$ を無相関にするためである．

5)　古典的な頻度論の統計学では，パラメータが定数で標本が確率変数であるのに対して，ベイズ統計学ではパラメータが確率変数で標本が定数である．そこで，これは頻度論の信頼区間(confidence interval)と異なるため，鈴木(1978)に従い，信用区間(Bayesian credible interval)と呼ぶ．

6)　Chib(2001)を参照されたい．

7)　この指数の計算方法については以下のサイトを参照されたい．http://www.esri.cao.go.jp/en/stat/di/di2e.html.

8)　資産価格の日次リターンに SV モデルを当てはめると，ϕ の推定値は1に近い値が得られる(渡部(2000, 2005)，大森・渡部(2012)を参照されたい)．そ

れに比べると，ここでの ψ の推定値は低い．

9) MH アルゴリズムについて詳しくは，Chib and Greenberg (1995) を参照されたい．

10) 詳しくは，Kim and Nelson (1999b) の Section 9.1.1. を参照されたい．同様の方法は，Chib (1998) でも提案されている．

11) 詳細は，Chib (1998) の p. 83 や Kim and Nelson (1999b) の p. 213 を参照されたい．

12) Hamilton (1989) のフィルターについては，Kim and Nelson (1999b) の Section 4.2.2 も参照されたい．

参 考 文 献

石原庸博・大森裕浩 (2008)「TOPIX 収益率のマルコフ・スイッチング非対称確率的ボラティリティ変動モデルによる分析 —— 順列サンプラーによる探索 ——」No. 24，pp. 75–100.

大森裕浩・渡部敏明 (2012)「MCMC とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」国友直人・山本拓編集・監修，日本統計学会創立 75 周年記念出版 2012 年増補 HP 版『21 世紀の統計科学〈Vol. I〉社会・経済の統計科学 (人口・政府統計・金融と保険)』第 9 章，pp. 204–244，http://park.itc.u-tokyo.ac.jp/atstat/jss75shunen/Vol1.pdf.

古澄英男 (2005)「ディリクレ過程事前分布を用いた構造変化のベイズ分析」和合肇編著『ベイズ計量経済分析』第 8 章，pp. 235–258，東洋経済新報社.

小西貞則・越智義道・大森裕浩 (2008)『計算統計学の方法 —— ブートストラップ・EM アルゴリズム・MCMC ——』朝倉書店.

鈴木雪夫 (1978)『統計解析』筑摩書房.

中妻照雄 (2007)『入門ベイズ統計学』朝倉書店.

藤原一平・渡部敏明 (2011)「マクロ動学一般均衡モデル —— サーベイと日本のマクロデータへの応用 ——」『経済研究』第 62 巻第 1 号，pp. 66–93.

和合肇編著 (2005)『ベイズ計量経済分析　モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社.

渡部敏明 (2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明 (2005)「マルチ・ムーブ・サンプラーを用いた確率的ボラティリティ変動モデルのベイズ推定」，和合肇編著『ベイズ計量経済分析』第 9 章，pp. 259–294，東洋経済新報社.

渡部敏明 (2009)「マルコフ・スイッチング・モデルを用いた日本の景気循環の計量分析」『経済研究』第 60 巻第 3 号，pp. 253–285.

Aas, K. (2005) "The Generalized Hyperbolic Skew Student's t-distribution," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, No. 2, pp. 275–309.

Azzalini, A. and Capitano, A. (2003) "Distributions Geberated by Perturbation of Symmetry with Emphasis on a Multivariate Skew t-distribution," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol. 65, No. 2, pp. 367–389.

Bauwens, L., De Backer, B. and Dufays, A. (2014) "A Bayesian Method of Change-Point Estimation with Recurrent Regimes: Application to GARCH Models," *Journal of Empirical Finance*, Vol. 29, pp. 207–229.

Beal, M. J., Ghahramani, Z. and Rasmussen, C. E. (2001) "The Infinite Hidden Markov Model," *Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. 14, pp. 577–584.

Castro, V. (2010) "The Duration of Economic Expansions and Recessions: More than Duration Dependence," *Journal of Macroeconomics*, Vol. 32, No. 1, pp. 347–365.

Chan. K. S. and Tong, H. (1990) "On Estimating Thresholds in Autoregressive Models," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 7, No. 3, pp. 179–190.

Chen. C., and Tiao, G. C (1990) "Random Level-Shift Time Series Models, ARIMA Approximations, and Level-Shift Detection," *Journal of Business Economic Statistics*, Vol. 8, No. 1, pp. 83–97.

Chernoff, H. and Zacks, S. (1964) "Estimating the Current Mean of a Normal Distribution Which is Subjected to Changes in Time," *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 35, No. 3, pp. 999–1018.

Chib, S. (1995) "Marginal Likelihood from the Gibbs Output," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 90, No. 432, pp. 1313–1321.

Chib, S. (1998) "Estimation and Comparison of Multiple Change-Point Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 86, No. 2, pp. 221–241.

Chib, S. (2001) "Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference," in J. J. Hechman and E. Leeper (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 5, Chapter 57, Amsterdam, Netherlands: Elsevier, pp. 3569–3649.

Chib, S. and Dueker, M. J. (2004) "Non-Markovian Regime Switching with Endogenous States and Time-varying State Strengths," *Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper Series No. 2004–030*.

Chib, S. and Greenberg, E. (1995) "Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm," *American Statistician*, Vol. 49, No. 4, pp. 327–335.

Diebold, F. (1988) *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, Springer-Verlag.

Diebold, F. X. and Inoue, A. (2001) "Long Memory and Regime Switching," *Journal of Econometrics*, Vol. 105, No. 1, pp. 131–159.

Diebold, F. X. and Rudebusch, G. D. (1990) "A Nonparametric Investigation of Duration Dependence in the American Business Cycle," *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 3, pp. 596–616.

Diebold, F. X., Rudebusch, G. D. and Sichel, D. E. (1993) "Further Evidence on Business-Cycle Duration Dependence," in *Business Cycles, Indicators and Forecasting*, University of Chicago Press, pp. 255–284.

Dunson, D. B. and Park, J.-H. (2008) "Kernel Stick-Breaking Processes," *Biometrika*, Vol. 95, No. 2, pp. 307–323.

Durland, J. M. and McCurdy, T. H. (1994) "Duration-

Dependent Transitions in a Markov Model of US GNP Growth," *Journal of Business Economic Statistics*, Vol. 12, No. 3, pp. 279–288.

Engle, R. F. and Smith, A. D. (1999) "Stochastic Permanent Breaks," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 81, No. 4, pp. 553–574.

Ferguson, T. S. (1973) "A Bayesian Analysis of Some Nonparametric Problems," *The Annals of Statistics*, Vol1, No. 2, pp. 209–230.

Fern'andez, C. and Steel, M. F. J. (1998) "On Bayeasian Modeling of Fat Tail and Skewness," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 93, No. 441, pp. 359–371.

Filardo, A. J. (1994) "Business-Cycle Phases and their Transitional Dynamics," *Journal of Business Economic Statistics*, Vol. 12, No. 3, pp. 299–308.

Filardo, A. J, and Gordon, S. F. (1998) "Business Cycle Durations," *Journal of Econometrics*, Vol. 85, No. 1, pp. 99–123.

Frühwirth-Schnatter, S. (2001) "Markov Chain Monte Carlo Estimation of Classical and Dynamic Switching and Mixture Models," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 96, No. 453, pp. 196–209.

Frühwirth-Schnatter, S. (2001) *Finite Mixture and Markov Switching Models*, Springer-Verlag.

Fox, E. B. and Sudderth, E. B. and Jordan, M. I. and Willsky, A. S. (2011) "A Sticky HDP-HMM with Application to Speaker Diarization," *Annals of Applied Statistics*, Vol. 5, No. 2A, pp. 1020–1056.

Fukuda, S. and Onodera, T. (2006) "A New Composite Index of Coincident Economic Indicators in Japan," International Journal of Forecasting}, Vol. 17, No. 3, pp. 483–498.

Gerlach, R. and Carter, C. and Kohn, R. (2000) "Efficient Bayesian Inference for Dynamic Mixture Models," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 95, No. 451, pp. 819–828.

Geweke, J. (1992) "Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior moments," (with discussion), in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith (eds.), *Bayesian Statistics 4*, Oxford University Press, Oxford, pp. 169–191.

Geweke, J. (1999) "Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Developments, and Communications," *Econometric Reviews*, Vol. 18, No,1, pp. 1–127.

Geweke, J. and Jiang, Y. (2011) "Inference and Prediction in a Multiple-Structural-Break Model," *Journal of Econometrics*, Vol. 163, No. 2, pp. 172–185.

Giordani, P. and Kohn, R. (2008) "Efficient Bayesian Inference for Multiple Change-Point and Mixture Innovation Models," *Journal of Business Economic Statistics*, Vol. 26, No. 1, pp. 66–77.

Giordani, P., Kohn, R. and van Dijk, D. (2007)" A Unified Approach to Nonlinearity, Structural Change, and Outliers," *Journal of Econometrics*, Vol. 137, No. 1, pp. 112–133.

Goldfeld, S. M. and Quandt, R. E. (1973) "A Markov Model for Switching Regressions," *Journal of Econometrics*, Vol. 1, No. 1, pp. 3–15.

Green, P. J. (1995) "Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Computation and Bayesian Model Determination," *Biometrika*, Vol. 82, No. 4, pp. 711–732.

Haggan, V. and Heravi, S. M., and Priestley, M. B. (1984) "A Study of the Application of State-Depemdemt Models in Non-linear Time Series Analysis," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 5, No. 2, pp. 69–102.

Hamilton, J. D. (1989) "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and Business Cycle," *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, pp. 357–384.

Iiboshi, H. (2007) "Duration Dependence of the Business Cycle in Japan: A Bayesian Analysis of Extended Markov Switching Model," *Japan and the World Economy*, Vol. 19, No. 1, pp. 86–111.

Inoue, A.(2012) "Mean-Plus-Noise Factor Models: An Empirical Exploration," *Japanese Economic Review*, Vol. 63, No. 3, pp. 289–309.

Jochmann, M. (2015) "Modeling US Inflation Dynamics: A Bayesian Nonparametric Approach," *Econometric Reviews*, Vol. 34, No. 5, pp. 537–558.

Kim, C.-J. and Eo, Y. (2013) "Markov-Switching Models with Evolving Regime-Specific Parameters: Are Post-War Booms and Recessions All Alike?" *Available at* SSRN: http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1971169.

Kim, C.-J. and Nelson, C. R. (1998) "Business Cycle Turning Points, a New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model with Regime Switching," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 80, No. 2, pp. 188–201.

Kim, C.-J. and Nelson, C. R. (1999a) "Has the U.S. Economy Become More Stable? A Bayesian Approach Based on a Markov-Switching Model of the Business Cycle," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 81, No. 2, pp. 608–616.

Kim, C. -J. and Nelson, C. R. (1999b) *State-Space Models with Regime Switching*, MIT Press.

Kim, C.-J., Piger, J. and Startz, R. (2008) "Estimation of Markov Regime-Switching Regression Models with Endogenous Switching," *Journal of Econometrics*, Vol. 143, No. 2, pp. 263–273.

Koop, G. and Potter, S. M. (2007) "Estimation and Forecasting in Models with Multiple Breaks," *The Review of Economic Studies*, Vol. 74, No. 3, pp. 763–789.

Koop, G. and Potter, S. M. (2009) "Prior Elicitation in Multiple Change-Point Models," *International Economic Review*, Vol. 50, No. 3, pp. 751–772.

Layton, A. P. and Smith, D. R. (2007) "Business Cycle Dynamics with Duration Dependence and Leading Indicators," *Journal of Macroeconomics*, Vol. 29, No. 4,

pp. 855–875.

Liang, F. and Wong, W. H. (2000) "Evolutionary Monte Carlo: Applications to Cp Model Sampling and Change Point Problem," *Statistica Sinica*, Vol. 10, No. 2, pp. 317–342.

Lopes, H. F. and Salazar, E. (2006) "Bayesian Model Uncertainty in Smooth Transition Autoregressions," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 27, No. 1, pp. 99–117.

McCulloch, R. E. and Tsay, R. S. (1993) "Bayesian Inference and Prediction for Mean and Variance Shifts in Autoregressive Time Series," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 88, No. 423, pp. 968–978.

Nakajima, J. and Omori, Y. (2012) "Stochastic Volatility Model with Leverage and Asymmetrically Heavy Tailed Error Using GH Skew Student's t-distribution," *Computational Statistics Data Analysis*, Vol. 56, No. 11, pp. 3690–3704.

Omori, Y. (2003) "Discrete Duration Model Having Autoregressive Random Effects with Application to Japanese Diffusion Index," *Journal of the Japan Statistical Society*, Vol. 33, No. 1, pp. 1–22.

Priestley, M. B. (1980) "State-Depemdemt Models: A General Approach to Non-linear Time Series Analysis," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 1, No. 1, pp. 47–71.

Primiceri, G. E. (2005) "Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy," *Review of Economic Studies*, Vol. 72, No. 3, pp. 821–852.

Rodriguez, A. and Dunson, D. B. (2011) "Nonparametric Bayesian Models Through Probit Stick-Breaking Processes," *Bayesian Analysis*, Vol. 6, No. 1, pp. 145–177.

Sethuraman, J. (1994) "A Constructive Definition of Dirichlet Priors," *Statistica Sinica*, Vol. 4, pp. 639–650.

Sichel, D. E. (1991) "Business Cycle Duration Dependence: A Parametric Approach," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 73, No. 2, pp. 254–260.

Song, Y. (2013) "Modelling Regime Switching and Structural Breaks with an Infinite Hidden Markov Model," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 29, No. 5, pp. 825–842.

Stock, J. H. and Watson, M. W. (1989) "New Indexes of Coincident and Leading Macroeconomic Indicators," in O. Blanchard and S. Fischer, eds. *NBER Macroeconomic Annual*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, pp. 351–394.

Stock, J. H. and Watson, M. W. (1991) "A Probability Model of the Coincident Economic Indicators," in K. Kahri and G. Moore, eds. *Leading Macroeconomic Indicators: New Approaches and Forecasting Records*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 63–89.

Teh, Y. W., Jordan, M. I., Beal, M. J. and Blei, D. M. (2006) "Hierarchical Dirichlet Processes," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 101, No. 476, 1566–1581.

Teräsvirta, T. (1994) "Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 89, No. 425, pp. 208–218.

Teräsvirta, T. and Anderson, H. M. (1992) "Characterizing Nonlinearities in Business Cycles Using Smooth Transition Autoregressive models," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 7, No. S1, pp. S119–S136.

van Dijk, D., Teräsvirta, T. and Franses, P. H. (2002) "Smooth Transition Autoregressive Models: A Survey of Recent Developments," *Econometric Reviews*, Vol. 21, No. 1, pp. 1–47.

Watanabe, T. (2001) "On Sampling the Degree-of-Freedom of Student's t-Disturbances," *Statistics and Probability Letters*, Vol. 52, No. 2, pp. 177–181.

Watanabe, T. (2003) "Measuring Business Cycle Turning Points in Japan with a Dynamic Markov Switching Factor Model," *Monetary and Economic Studies*, Vol. 21, No. 1, pp. 35–68.

Watanabe, T. (2014) "Bayesian Analysis of Business Cycle in Japan Using Markov Switching Model with Stochastic Volatility and Fat-tail Distribution,"『経済研究』第 65 巻第 2 号，pp. 156–167.

Watanabe, T. and Omori, Y. (2004) "A Multi-move Sampler for Estimating Non-Gaussian Time Series Model: Comments on Shephard Pitt (1997)," *Biometrika*, Vol. 91, No. 1, pp. 246–248.

Yau, C., Papaspiliopoulos, O., Roberts, G. O. and Holmes, C. (2011) "Bayesian Non-parametric Hidden Markov Models with Applications in Genomics," *Journal of the Royal Statistical Society: Series B* (*Statistical Methodology*), Vol. 73, No. 1, pp. 37–57.

Yao, Y. C. (1984) "Estimation of a Noisy Discrete-Time Step Function: Bayes and Empirical Bayes Approaches," *The Annals of Statistics*, Vol. 12, No. 4, pp. 1434–1447.