経済研究
Vol. 61, No. 4, Oct. 2010

# 辞書式組合せに基づく折衷法と社会的判断における整合性[1)]

坂　本　徳　仁

相互に両立不可能な基準が存在するときに，経済学者はそれらの基準を辞書式に組合せることによって折衷する手法を開発してきた．しかしながら，Tadenuma(2002)が明らかにしたように，辞書式組合せに基づく社会的ランキングの下では集団的合理性の条件を逸脱してしまう事態が発生する．本稿は，Tadenuma(2002)の結果を踏まえた上で，一般の環境の下で任意の準順序及び順序を辞書式に組み合せた際に，(1)準順序を優先する辞書式ランキングは必ずしも非循環性を満たさないこと，(2)順序を優先する辞書式ランキングは準推移性を満たすことを示した．さらに，(3)準順序を優先する辞書式ランキングと順序を優先する辞書式ランキングの各々が推移性を満たすための必要十分条件を明らかにした．
JEL Classification Codes: D01, D63, D71

## 1. はじめに

両立可能ではない二つの基準を組み合わせて整合的な社会的判断を得る方法の一つに辞書式組合せによるアプローチがある[2)]．辞書式組合せとは，異なる基準をちょうど辞書の並べ順のように適用していく方法である．例えば，$x$と$y$といった二つの選択肢を序列付ける場合，$A$という基準で強選好関係が成立するならばそれに従う，もし$A$という基準で比較不可能ないし無差別である場合は$B$という基準に従って序列付ける，$A$でも$B$でも比較不可能ないし無差別である場合には$C$という基準によって序列付ける…などといったように上位基準から下位基準まで辞書式の順番に適用して序列付けようとするアプローチである[3)]．このアプローチに従えば，社会状態$x$と$y$の比較において，基準$A$に従えば$x$が$y$よりも厳密に好ましく，$B$に従えば$y$が$x$よりも厳密に好ましいといったような二つの基準間に齟齬が生じる状況であっても，上位基準の$A$が優先されることから$x$が$y$よりも厳密に好ましいことになり，矛盾することなく全ての選択肢を序列付けていくことが可能となる．

しかしながら，辞書式組合わせに基づくアプローチには社会的な整合性に関して欠陥があることがTadenuma(1998; 2002; 2005)によって明らかにされている．とくに，Tadenuma(2002)はPareto効率性基準と無羨望としての衡平性基準の両方を尊重する社会的選好関係を構築することが不可能であることから，それらの基準を辞書式に組み合わせたランキングの集団的合理性に関する性質を調べ，(1)効率優先ルール(パレート比較可能であるときはパレート優位な選択肢を上位に序列付け，パレート比較不可能であるときは衡平性基準に則って序列付けるランキング)の下では循環が生じること，(2)衡平優先ルール(衡平性基準で衡平である選択肢を上位に序列付け，衡平性基準で無差別であるときにはパレート基準に従って序列付けるランキング)の下では準推移性が満たされることを示した．

本稿は，Tadenuma(2002)が示した辞書式ランキングの集団的不合理性の問題に焦点を当て，(1)任意の準順序と順序を辞書式に組み合せたランキングにおける集団的整合性の問題，(2)辞書式組合せによるアプローチが推移性という意味での完全合理性を満たすための必要十分条件，の2点を明らかにすることを目的とする．

さて，本稿の構成は以下の通りである．続く2節では，基本的な定義と記法の解説を行なう．第3節では，準順序と順序を辞書式に組み合わせることの帰結を分析し，辞書式ランキングが推移的になるための必要十分条件を明らかにする．4節では本稿で得られた知見と今後ありうる研究課題についてまとめる．最後に，5節において本稿で得られた諸結果の証明を与える．

## 2. 定義と記法

集合 $X$ を三つ以上から成る社会状態の集合[4]とし，$X$ 上で定義される順序を反射性と完備性，推移性を満たす二項関係として定義しよう．ここで，二項関係 $\succsim$ が反射性を満たすとは，任意の $x \in X$ に対して $x \succsim x$ が成立することである．また，完備性は任意の $x, y \in X$ に対して $x \succsim y$ か $y \succsim x$ が成立することであり，推移性は任意の $x, y, z \in X$ に対して $x \succsim y \,\&\, y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$ が成立することである．すなわち，集合 $X$ 上で二項関係 $\succsim$ が順序であるとは，全ての選択肢について比較可能であり，選択の整合性が完全に満たされていることを意味している．

推移性よりも弱い選択の整合性の条件としては，代表的なものとして推移性を弱めた準推移性，準推移性を更に弱めた非循環性の条件がある．これらの概念は各々以下のように定義される．

**準推移性**：$\forall x, y, z \in X$；$x \succ y \,\&\, y \succ z \Rightarrow x \succ z$.

**非循環性**：$\forall x_1, \cdots, x_m \in X$；$x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_{m-1} \succ x_m \Rightarrow x_m \nsucc x_1$.

ただし，記号 $\succ$ は二項関係 $\succsim$ の非対称成分とする．

準推移性は強選好関係における整合性を要求するものであり，非循環性は強選好関係に循環が生じないことを要求している．Sen (1970, Ch. 1*) が示しているように，非循環性の要求は有限集合上で極大要素の集合が非空であるための必要十分条件になっている．その意味において，非循環性の要求は最低限満たされることが好ましい整合性の条件として考えられる．

さて，順序の概念に対して，$X$ 上の二項関係 $\succsim$ が準順序であるとは，$\succsim$ が反射性と推移性を満たす二項関係であることを言う．すなわち，準順序は全ての選択肢のペアについて比較可能であることまでは要求されないが，選択の整合性については推移性が保持されるという二項関係である．経済学における準順序の重要かつ代表的な例としては Pareto 準順序が挙げられよう．いま，$X$ 上の準順序の集合を $\mathcal{Q}$，$X$ 上の順序の集合を $\mathcal{O}$ によって各々表すものとする．また，任意の $X$ 上の二項関係 $\succsim$ において，その非対称成分と対称成分を各々 $\succ, \sim$ と記すことにする．比較不可能な場合に関しては，記号 $\bowtie$ を用いることにしよう．

このとき，$X$ 上で定義される任意の二項関係 $\succsim_A, \succsim_B$ に対して，$\succsim_A$ 第一・$\succsim_B$ 第二辞書式ランキング，あるいは単に二項関係 $\succsim_A$ を優先する辞書式ランキング $\succsim_{AB}$ とは以下のように定義される $X$ 上の二項関係である．

$$\forall x, y \in X ; \begin{cases} x \succ_{AB} y \Leftrightarrow x \succ_A y \text{ or } \\ \quad [x \nsucc_A y, y \nsucc_A x \,\&\, x \succ_B y]. \\ x \bowtie_{AB} y \Leftrightarrow x \bowtie_A y \,\&\, x \bowtie_B y \\ x \sim_{AB} y \Leftrightarrow x \nsucc_{AB} y, \\ \quad y \nsucc_{AB} x \,\&\, \neg x \bowtie_{AB} y. \end{cases}$$

即ち，辞書式ランキングとは，上位の基準の厳密な選好関係によって判定不可能なペアに関しては下位の基準にその判断を委ね，上位の基準で厳密な選好関係が成立する際には上位の基準の判断を尊重するというランキングである[5]．本稿の分析では，単に準順序と順序の辞書式組合せのケースのみを扱っているが，三つ以上の基準に関する辞書式ランキングの分析にも容易に拡張が可能である[6]．

さて，この辞書式ランキングが一般に推移性を満たすか否かは多分に辞書式ランキングの構成要素となる二項関係の性質に依存する．以下では，一般的な枠組みの下で辞書式ランキングの整合性に関する性質を分析しよう．

## 3. 辞書式原理に関する基本的な性質

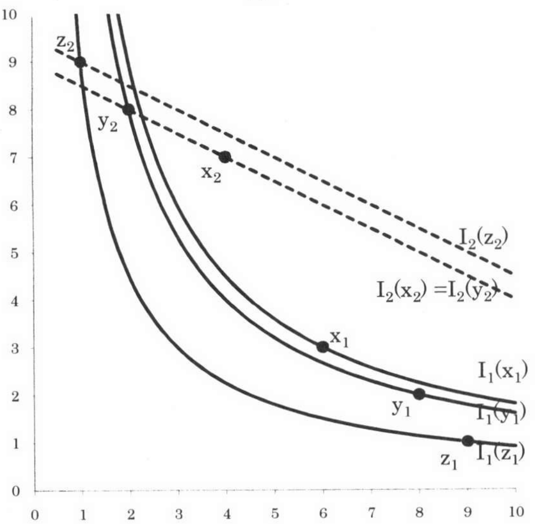
本節では，任意の順序と準順序を組み合わせた辞書式ランキングの集団的合理性における性質を調べる．論理的には(1)順序同士の辞書式ランキング，(2)準順序同士の辞書式ランキング，(3)準順序第一・順序第二辞書式ランキング，(4)順序第一・準順序第二辞書式ランキングの4つの可能性があり，以下では各々の場合における辞書式ランキングの整合性を確認しよう[7]．

まず容易に判明することであるが，任意の順序同士を組合わせた辞書式ランキングは推移性を満たすことが分かる．

続いて，準順序第一・順序第二辞書式ランキングについては非循環性を満たさないことが示される．

**命題 1**：準順序を優先させる辞書式ランキング $\succsim_{QO}$ が非循環性を満たさないような $X$ 上の

図1




準順序 $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$ と順序 $\succsim_O \in \mathcal{O}$ が存在する.

順序は準順序でもあることから，命題2から二つの準順序を辞書式に組合せたランキングについて以下の系が導かれる.

**系1**：二つの準順序を組み合わせた辞書式ランキング $\succsim_{AB}$ が非循環性を満たさないような $X$ 上の準順序 $\succsim_A, \succsim_B \in \mathcal{Q}$ が存在する.

命題1から分かることは，優先される基準が準順序であるような場合には，一般に非循環性が満たされる保証はないということである．これは Pareto 準順序を辞書式組合せで優先することは集団的選択の合理性を大きく失う可能性があることを示唆している．実際に，Tadenuma (2002) において定義された効率優先ルールは非循環性を満たさない辞書式ランキングであった[8].

次に，準順序を優先する辞書式ランキングが推移性を満たすための必要十分条件を与えよう[9]．この必要十分条件は非常に厳しい条件であるために，Pareto 準順序を上位基準とする辞書式ランキングにおいてはしばしば推移性が満たされないことが予想されるものである.

**命題2**：$X$ 上の準順序 $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$ 及び順序 $\succsim_O \in \mathcal{O}$ に対して，準順序 $\succsim_Q$ を優先させる辞書式ランキング $\succsim_{QO}$ が推移性を満たすための必要十分条件は，

$$\nexists x, y, z \in X, x \succsim_Q y, y \bowtie_Q z, z \bowtie_Q x,$$

$$y \succsim_O z \,\&\, z \succsim_O x$$

で与えられる．ただし，上の式において $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$ と $\succsim_O \in \mathcal{O}$ のうち少なくとも一つのものに関して強選好関係が成立する.

さて，命題2で提示された必要十分条件がどのくらい制約的なものであるのか Pareto 準順序を優先するような辞書式ランキングを例にして考察しよう．いま，三つの配分 $x, y, z$ について，$x$ が $y$ を Pareto 優越するが，他のペアについては Pareto 比較できないものと仮定しよう．このとき，$y$ と $z$ は何がしかの衡平性の基準(例えば，平等等価基準や無羨望基準など)からみて衡平である一方で，$x$ はその基準では衡平ではないものとする．さて，このような三つの選択肢の序列付けに当たって，Pareto 準順序を上位基準とした任意の辞書式ランキングの下では $x \succ y$ かつ $y \sim z$ かつ $z \succ x$ という判定が為されてしまい，推移性が満たされないことが確認できる．実際に，以下の通常の経済環境を前提とした数値例で示すように，Pareto 準順序を上位基準にした辞書式ランキングの下では命題2の条件を満たさないような状況を容易に見つけることができる.

**例1**：2個人2財の純粋交換経済を考えよう．初期保有量は (10, 10) で与えられ，個人1と個人2の効用関数は各々 $U_1(c_{11}, c_{12}) = c_{11}^{1/2} c_{12}^{1/2}$ と $U_2(c_{21}, c_{22}) = c_{21} + 2c_{22}$ で与えられるものとする．このとき，2人の個人の選好は明らかに連続性，単調性，凸性を満たしている．いま，三つの実行可能配分 $x = ((6, 3), (4, 7))$, $y = ((8, 2), (2, 8))$, $z = ((9, 1), (1, 9))$ において，図1からも明らかなように，配分 $x$ は配分 $y$ を Pareto 優越するが，他のペアについては Pareto 比較ができない．さらに，$y$ と $z$ は無羨望な配分であるが，$x$ は羨望のある配分である．したがって，三つの選択肢と各人の選好は命題2の必要十分条件を満たすことができず，Pareto 準順序を優先する辞書式ランキングが推移性を満たすことはない. ||

命題2と先行研究との関連性を述べると，Tadenuma (2002; 2005) は Pareto 準順序を上位基準にした辞書式ランキングについて，(1) Feldman and Kirman (1974) 流の羨望件数に基づいた衡平基準を下位基準として採用する場合には非循環性が満たされないこと，(2) 平等等

価基準に関する特殊な衡平基準を下位基準として採用する場合には推移性を満たすランキングが存在すること，の2点を示している．無羨望基準については例1で見たように，命題2の必要十分条件を満たさないことが明らかである．これに対して，Tadenuma(2005)で分析された特殊な平等等価に関する衡平性基準とPareto準順序の辞書式組合わせについては推移的な順序が存在するということで命題2の必要十分条件を満たすように思われるかもしれない．しかし，Tadenuma(2005)における衡平性基準は非対称成分のみを尊重するものであり，Pareto準順序と順序を辞書式に組み合わせたものではないことに注意されたい．実際に，Tadenuma(2005)の提唱したPareto条件付き$\bar{r}$-平等等価原理を順序拡張した形式の要求に変更した場合には命題2の必要十分条件が満たされないことを容易に確認できる[10]．

したがって，命題2は準順序と順序を辞書式に組み合わせる場合に準順序を優先させることが集団的合理性の観点からいかに困難な事態であるのか明らかにしているものとして解釈できる．このような準順序を上位基準とすることに伴う非整合性の問題を回避する方法としては，(1)準順序を順序拡張して順序同士の辞書式ランキングを構築することによって推移性を得ること，(2)Tadenuma(2005)で試みられたように，非対称成分のみを尊重する形式で推移的な辞書式ランキングを構築すること，という二つのものがあるだろう[11]．

次に，準順序と順序の辞書式組合わせのもう一つのケース，順序を優先する辞書式ランキングの整合性の問題を考察しよう．順序を上位基準とする辞書式ランキングの下では，Pareto準順序を上位基準にした場合とは対照的に非循環性が満たされないという最悪の事態は避けられることが以下の命題によって示される．

**命題3**：$X$上の任意の順序$\succsim_O \in \mathcal{O}$及び任意の準順序$\succsim_Q \in \mathcal{Q}$に対して，順序$\succsim_O$を優先させる辞書式ランキング$\succsim_{OQ}$は準推移性を満たす．

さて，命題3によって，一般に順序を優先する辞書式ランキングは準推移性という形式で選択の整合性を満たすことがわかった．この結果は衡平優先ルールが準推移性を満たすことを示したTadenuma(2002)の結果とも整合的である．しかしながら，順序を優先し準順序を下位基準とした辞書式の組合せが一般に推移性を満たせないことは以下の例によって容易に示すことができる．

いま，$x \sim_O y \sim_O z$として，$x \succ_Q y$かつ$y \bowtie_Q z$，$z \bowtie_Q x$となるような順序$\succsim_O$，準順序$\succsim_Q$，三つの選択肢$x, y, z \in X$を考えよう．このとき，順序を優先する辞書式ランキング$\succsim_{OQ}$の下では，$x \succ_{OQ} y$かつ$y \sim_{OQ} z$が成立するが，$z \sim_{OQ} x$となってしまい推移性を満たすことができない．実際に，このような選択肢と順序，準順序の組が存在しないことが，順序を優先する辞書式ランキングが推移的であるための必要十分条件となっている．

**命題4**：$X$上の順序$\succsim_O \in \mathcal{O}$及び準順序$\succsim_Q \in \mathcal{Q}$に対して，順序$\succsim_O$を優先させる辞書式ランキング$\succsim_{OQ}$が推移性を満たすための必要十分条件は，

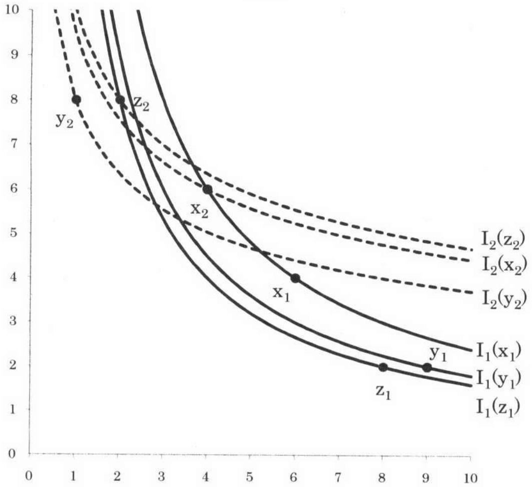
$$\forall Y \in E(X, \succsim_O), \nexists x, y, z \in Y, x \succ_Q y, \quad y \bowtie_Q z \,\&\, z \bowtie_Q x.$$

で与えられる．ただし，$E(X, \succsim_O)$は順序$\succsim_O$の対称成分$\sim_O$に基づく同値類の集合である．

命題4の必要十分条件を衡平順序とPareto準順序の辞書式組合わせの文脈で解釈すると，この条件は何がしかの衡平基準において無差別であるような三つの選択肢について，一つのペアのみがPareto比較可能であってはならないということを要求している．この条件がいかに制約的であるかは以下の一般的な経済環境における例によって容易に理解できよう．

**例2**：2個人2財の純粋交換経済を考えよう．初期保有量は$(10, 10)$で与えられ，個人1と個人2の効用関数は各$U_1(c_{11}, c_{12}) = c_{11}^{1/2} c_{12}^{1/2}$と$U_2(c_{21}, c_{22}) = c_{21}^{1/4} c_{22}^{3/4}$で与えられるものとする．各人の選好は明らかに連続，単調かつ強凸である．いま，三つの実行可能配分$x = ((6, 4), (4, 6))$, $y = ((9, 2), (1, 8))$, $z = ((8, 2), (2, 8))$において，図2からも明らかなように，配分$x$は配分$y$をPareto優越するが，他のペアについてはPareto比較ができない．さらに，三つの配分は全て無羨望な配分である．無羨望な配

図2




分を衡平な状態として無差別にするような衡平順序の下では配分 $x, y, z$ は命題4の必要十分条件を満たさず，従って，衡平順序とPareto準順序の辞書式ランキングも推移性を満たさない．||

さて，命題1から命題4までの結果をまとめよう．まず準順序と順序を辞書式に組み合わせる試みにおいて，準順序を優先させる辞書式ランキング $\gtrsim_{QO}$ は一般に非循環性を満たさないが，順序を優先させる辞書式ランキング $\gtrsim_{OQ}$ は準推移性を満たすという形で整合性に関して最悪の事態を回避できるということが明らかになった．しかし，順序と準順序のどちらを上位基準にするにせよ，一般に辞書式ランキングが推移性を満たすためには非常に制約的な条件を満たさなければならないことも示された．すなわち，(1)整合性の観点から見ると，準順序を優先させる辞書式ランキングよりも順序を優先させる辞書式ランキングの方が相対的に好ましい，(2)準順序と順序を組み合わせて推移的な辞書式ランキングを構築することは非常に困難である，という二つの事柄が明らかになったと言えよう．

## 4. 結語

効率性と衡平性の両基準を反映した社会的選好関係を構築する際に生じる不可能性の帰結に関して，辞書式ランキングによる解決法はTadenuma(2002)が示したように，単純な方式のままであれば推移性を満たさないという意味で不完全なものであった．

本稿では，この問題に対して，準順序と順序の辞書式ランキングではどちらを上位基準として採用する場合であっても一般に推移性が満たされないことを示した上で，推移性が満たされるための必要十分条件を明らかにした．しかしながら，その条件は非常に制約的であるために，推移的な辞書式ランキングを構築することが困難であることが明らかになった．この辞書式ランキングにおける非推移性を解決するための手段としては，(1)順序同士を辞書式に組み合わせる方法，(2) Tadenuma(2005)で試みられたように準順序及び順序の非対称成分のみを辞書式に組み合せる方法，の二通りがあろう．

そこで，本稿を閉じるに当たって，辞書式ランキングにおける非推移性の問題を解決する前述の二つの方法についていくつかの指摘をしておきたい．

第一に，Tadenuma(2005)で研究された衡平順序やPareto準順序の非対称成分を辞書式に組み合せたランキングにおいて，一般的な環境で推移性が成立するための必要十分条件は明らかではない．また，非対称成分を組み合わせた推移的な辞書式ランキングの衡平性基準に関してどのようなものが考えられるのかも自明な問題ではない[12)]．この意味において，非対称成分を辞書式に組み合せて推移性を得るアプローチには多くの課題が残されていると言えるだろう．

第二に，坂本(2008，第2章)は順序同士を組み合わせて推移的な辞書式ランキングを構築する研究を行なっている．その際に，Pareto準順序の順序拡張と衡平順序を辞書式に組み合せることが試みられているが，Pareto準順序の順序拡張としてどのような順序が好ましいのか明確な結論が得られていない．Campbell and Kelly(2007a, b)が示唆したように，Pareto準順序を中立性ないし匿名性を満たす順序に拡張しようとする場合には情報上の効率性をかなりの程度犠牲にしなければならない．したがって，Pareto原理を満たす社会的選好順序のクラスの中で，匿名性・中立性・情報上の効率性の間のトレードオフを前提としながら何を効率順序として採択すべきかという問題は未だ解かれざる問題なのである．

最後に，経済環境においてもPareto拡張順序を導入することで修正された効率優先ルールは推移性を満たすことが可能にはなるが，その

際に，どのようなPareto拡張順序がありうるのか自明ではない．Fleurbaey, Suzumura and Tadenuma(2005)の先駆的研究が示しているように，情報上の効率性を弱めて無差別曲線に関する情報を採集することで，Arrowの不可能性を回避しつつ推移性と匿名性を満たすようなPareto拡張順序を構築することは可能である．しかしながら，彼らの提出したPareto拡張順序を上位基準として，無羨望としての衡平性基準を下位基準とするような辞書式ランキングの極大要素の集合(参照財バンダルに基づく平等等価かつ効率的な配分の集合)は，彼らの定義したPareto拡張順序の極大要素の集合に他ならないという意味で，無羨望基準を考慮する辞書式ランキングとしては機能しないことが容易に示せる．この問題を回避するために，経済環境においてどのようなPareto拡張順序が考えられるのか，大いに興味のある問題である．

## 5. 付録

**【命題1の証明】**

次のような $x, y, z \in X$ と準順序 $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$，順序 $\succsim_O \in \mathcal{O}$ を考えよう．

$$x \succ_Q y \,\&\, y \bowtie_Q z \,\&\, z \bowtie_Q x.$$
$$y \succ_O x \,\&\, y \succ_O z \,\&\, z \succ_O x.$$

このとき，辞書式ランキング $\succsim_{QO}$ の定義より $x \succ_{QO} y$ かつ $y \succ_{QO} z$ が成立するが，$z \succ_{QO} x$ となって非循環性が侵害されることが分かる．||

**【命題2の証明】**

必要性については対偶を取ることで容易に示すことができる．従って，十分性について示そう．

いま，三つの選択肢 $x, y, z \in X$ について命題2の条件が成立しているものと仮定しよう．このとき，命題2の条件に該当しない全てのケースについて推移性が満たされることを確認する．

**(1) 準順序 $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$ において三つの選択肢全てが無差別である場合：**

このとき，$\succsim_{QO}|_S = \succsim_O|_S$ が成立する．ただし，集合 $S$ は $\{x, y, z\}$ とし，任意の二項関係 $\succsim$ に対して記号 $\succsim|_S$ を二項関係 $\succsim$ の集合 $S$ への制限，すなわち，$\succsim|_S = \succsim \cap (S \times S)$ とする．$\succsim_O$ は順序であるから，$\succsim_{QO}$ も集合 $S$ 上で順序，すなわち，推移性を満たすことが分かる．

**(2) 準順序 $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$ において三つの選択肢全てが比較不可能である場合：**

このとき，$\succsim_{QO}|_S = \succsim_O|_S$ が成立する．従って，$\succsim_{QO}$ は集合 $S$ 上で推移性を満たす．

**(3) 準順序 $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$ において全てのペアについて強選好関係が成立する場合：**

このとき，$\succsim_{QO}|_S = \succsim_Q|_S$ が成立する．準順序は推移性を満たすので，$\succsim_{QO}$ は集合 $S$ 上で推移性を満たす．

**(4) 準順序 $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$ において一つのペアについて無差別である場合：**

このとき，三つの選択肢について以下のような二つのサブケースが考えられる．

$$x \succ_Q y \sim_Q z$$
$$x \sim_Q y \succ_Q z$$

どちらのサブケースであったとしても，準順序の推移性により $x \succ_Q z$ が成立する．従って，上のケースの下では $x \succ_{QO} y$ と $x \succ_{QO} z$，下のケースの下では $x \succ_{QO} z$ と $y \succ_{QO} z$ が各々成立しなければならない．

このとき，上のケースでは $\succsim_{QO}|_{\{y,z\}} = \succsim_O|_{\{y,z\}}$，下のケースでは $\succsim_{QO}|_{\{x,y\}} = \succsim_O|_{\{x,y\}}$ となるが，これらの関係が何であろうとも集合 $S$ 上における $\succsim_{QO}$ の推移性を示すことができる．

**(5) 準順序 $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$ において一つのペアについて比較不可能である場合：**

このとき，以下のような二つのサブケースが考えられる．

$$x \succ_Q y \bowtie_Q z \,\&\, x \succ_Q z$$
$$x \bowtie_Q y \succ_Q z \,\&\, x \succ_Q z$$

準順序 $\succsim_Q$ の推移性から，一つのペアについて比較不可能であるようなケースは上記以外に存在しないことに注意せよ．いま，上のケースの下では $x \succ_{QO} y$ と $x \succ_{QO} z$，下のケースの下では $x \succ_{QO} z$ と $y \succ_{QO} z$ が各々成立する．

このとき，(4)の場合と同様の議論によって，上のケースでは $\succsim_{QO}|_{\{y,z\}} = \succsim_O|_{\{y,z\}}$，下のケースでは $\succsim_{QO}|_{\{x,y\}} = \succsim_O|_{\{x,y\}}$ となるが，これらの関係が何であろうとも集合 $S$ 上における $\succsim_{QO}$ の推移性を示すことができる．

**(6) 準順序 $\succsim_Q \in \mathcal{Q}$ において二つのペアについて比較不可能である場合：**

一般性を失うことなく，$x \succsim_Q y, y \bowtie_Q z, z \bowtie_Q x$ と仮定して，命題4の条件に該当しないケー

スでは推移性が成立することを示そう．

**(6-1)** $x\sim_Q y$ **で，** $y\sim_O z\sim_O x$ **の場合：**
このとき，$\succsim_{QO}$ は三つの選択肢全てを無差別に判定する．従って，(6-1)のケースでは明らかに推移性が満たされる．

**(6-2)** $x\succsim_Q y$ **で，** $x\succsim_O y\succsim_O z$ **の場合：**
$x\sim_Q y$ のときには $\succsim_{QO}|_S=\succsim_O|_S$ が成立する．従って，$\succsim_O$ の推移性により $\succsim_{QO}$ は明らかに集合 $S$ 上で推移性を満たす．$x\succ_Q y$ のときには，$\succsim_O|_S$ について3つの可能性を考慮しなければならない．

(a) $x\succ_O y\sim_O z$ の場合，$x\succ_{QO} y\sim_{QO} z$ かつ $x\succ_{QO} z$ が成立するので，推移性が満たされることが分かる．

(b) $x\sim_O y\succ_O z$ の場合，$x\succ_{QO} y\succ_{QO} z$ かつ $x\succ_{QO} z$ が成立し，推移性が確認される．

(c) $x\succ_O y\succ_O z$ の場合，$x\succ_{QO} y\succ_{QO} z$ かつ $x\succ_{QO} z$ が成立するので，推移性が満たされる．

これらの場合分けから(6-2)のケースに関して推移性が満たされることが示された．

**(6-3)** $x\succsim_Q y$ **で，** $x\succsim_O z\succsim_O y$ **の場合：**
$x\sim_Q y$ のときには $\succsim_{QO}|_S=\succsim_O|_S$ が成立する．従って，$\succsim_{QO}$ は集合 $S$ 上で推移性を満たす．$x\succ_Q y$ のときには，$\succsim_O|_S$ について3つの可能性を考慮しなければならない．

(a) $x\succ_O z\sim_O y$ の場合，$x\succ_{QO} y\sim_{QO} z$ かつ $x\succ_{QO} z$ が成立するので，推移性が満たされることが分かる．

(b) $x\sim_O z\succ_O y$ の場合，$z\sim_{QO} x\succ_{QO} y$ かつ $z\succ_{QO} y$ が成立し，推移性が確認される．

(c) $x\succ_O z\succ_O y$ の場合，$x\succ_{QO} z\succ_{QO} y$ かつ $x\succ_{QO} y$ が成立するので，推移性が満たされる．

これらの場合分けから(6-3)のケースに関して推移性が満たされることが示された．

**(6-4)** $x\succsim_Q y$ **で，** $y\succsim_O x\succsim_O z$ **の場合：**
$x\sim_Q y$ のときには $\succsim_{QO}|_S=\succsim_O|_S$ が成立する．従って，$\succsim_{QO}$ は集合 $S$ 上で推移性を満たす．$x\succ_Q y$ のときには，$\succsim_O|_S$ について2つの可能性を考慮しなければならない[13]．

(a) $y\sim_O x\succ_O z$ の場合，$x\succ_{QO} y\succ_{QO} z$ かつ $x\succ_{QO} z$ が成立し，推移性が確認される．

(b) $y\succ_O x\succ_O z$ の場合，$x\succ_{QO} y\succ_{QO} z$ かつ $x\succ_{QO} z$ が成立するので，推移性が満たされる．

これらの場合分けから(6-4)のケースに関して推移性が満たされることが示された．

**(6-5)** $x\succsim_Q y$ **で，** $z\succsim_O x\succsim_O y$ **の場合：**
$x\sim_Q y$ のときには $\succsim_{QO}|_S=\succsim_O|_S$ が成立する．従って，$\succsim_{QO}$ は集合 $S$ 上で推移性を満たす．$x\succ_Q y$ のときには，$\succsim_O|_S$ について3つの可能性を考慮しなければならない．

(a) $z\succ_O x\sim_O y$ の場合，$z\succ_{QO} x\succ_{QO} y$ かつ $z\succ_{QO} y$ が成立するので，推移性が満たされることが分かる．

(b) $z\sim_O x\succ_O y$ の場合，$z\sim_{QO} x\succ_{QO} y$ かつ $z\succ_{QO} y$ が成立し，推移性が確認される．

(c) $z\succ_O x\succ_O y$ の場合，$z\succ_{QO} x\succ_{QO} y$ かつ $z\succ_{QO} y$ が成立するので，推移性が満たされる．

これらの場合分けから(6-5)のケースに関して推移性が満たされることが示された．

**(6-6)** $x\succsim_Q y$ **で，** $z\succsim_O y\succsim_O x$ **の場合：**
$x\sim_Q y$ のときには $\succsim_{QO}|_S=\succsim_O|_S$ が成立する．従って，$\succsim_{QO}$ は集合 $S$ 上で推移性を満たす．$x\succ_Q y$ のときには，$\succsim_O|_S$ について2つの可能性を考慮しなければならない[14]．

(a) $z\succ_O y\sim_O x$ の場合，$z\succ_{QO} x\succ_{QO} y$ かつ $z\succ_{QO} y$ が成立するので，推移性が満たされることが分かる．

(b) $z\succ_O y\succ_O x$ の場合，$z\succ_{QO} x\succ_{QO} y$ かつ $z\succ_{QO} y$ が成立するので，推移性が満たされる．

これらの場合分けから(6-6)のケースに関して推移性が満たされることが示された．

さて，この冗長な場合分けによって命題2の条件に該当しない全てのケースについて推移性が満たされることが示された．従って，十分性を証明できた．‖

**【命題3の証明】**

$x\succ_{OQ} y\succ_{OQ} z$ となる選択肢 $x, y, z\in X$ を考えよう．いま，順序 $\succsim_O|_{\{x,y,z\}}$ について，(1) $x\succ_O y\succ_O z$，(2) $x\succ_O y\sim_O z$，(3) $x\sim_O y\succ_O z$ の三つのケースのうちのいずれかが成立している場合，$\succsim_O$ の推移性より $x\succ_O z$ が成立する．従って，$x\succ_{OQ} z$ となり準推移性が示された．

次に，$x\sim_O y\sim_O z$ の場合，$x\succ_{OQ} y\succ_{OQ} z$ であることから，$x\succ_Q y\succ_Q z$ でなければならない．従って，準順序 $\succsim_Q$ の推移性より $x\succ_Q z$ が成立し，$x\succ_{OQ} z$ が得られるので準推移性が示された．

ゆえに，全てのケースについて準推移性が保証される．

**【命題4の証明】**

必要性については対偶を取ることで，簡単に証明することができる．従って，十分性について示そう．いま，三つの選択肢 $x, y, z \in X$ について命題4の条件が成立しているものと仮定しよう．このとき，命題4の条件に該当しない全てのケースについて推移性が満たされることを確認する．いま，一般性を失うことなく，$x \succsim_{OQ} y \succsim_{OQ} z$ が成立するものとして $x \succsim_{OQ} z$ となることを示そう．

命題4の条件に該当しないケースとして，三つの選択肢の同値類の属し方について以下(1)から(3)までの三通りの場合分けをしなければならない．

**(1) 三つの選択肢が全て一つの同値類に属している場合：**

このとき，一つの同値類に属する3つの要素については $x \sim_O y \sim_O z$ が成立する．さらに，準順序 $\succsim_Q$ の三つの選択肢上での判断については以下の4通りのケースが考えられる．

**(1-1) 全てのペアについて $\succsim_Q$ で比較可能である場合：**

このとき，$S=\{x, y, z\}$ として，$\succsim_{OQ}|_S = \succsim_Q|_S$ が成立する．従って，$\succsim_Q$ の推移性から $x \succsim_{OQ} z$ が得られる．

**(1-2) 1つのペアについて $\succsim_Q$ で比較不可能な場合：**

準順序 $\succsim_Q$ の推移性から，1つのペアについて比較不可能であるようなケースは，(a) $x \succ_Q y$, $y \bowtie_Q z$ & $x \succ_Q z$, (b) $x \bowtie_Q y, y \succ_Q z$ & $x \succ_Q z$ という2つのケースに限られる[15]．$\succsim_{OQ}$ の定義により，(a)の場合には $x \succ_{OQ} y, y \sim_{OQ} z, x \succ_{OQ} z$, (b)の場合には $x \sim_{OQ} y, y \succ_{OQ} z, x \succ_{OQ} z$ が各々成立する．従って，いずれのケースにおいても $x \succsim_{OQ} z$ となることを示せた．

**(1-3) 2つのペアについて $\succsim_Q$ で比較不可能であり，1つのペアについては無差別である場合：**

このとき，$x \sim_{OQ} y, y \sim_{OQ} z, x \sim_{OQ} z$ が成立するので，$x \succsim_{OQ} z$ が得られる．

**(1-4) 全てのペアについて $\succsim_Q$ で比較不可能である場合：**

このとき，明らかに $\succsim_{OQ}|_S = \succsim_O|_S$ が成立する．すなわち，$x \sim_{OQ} y, y \sim_{OQ} z, x \sim_{OQ} z$ であるので，$x \succsim_{OQ} z$ となることが示される．

**(2) 二つの選択肢が一つの同値類に属している場合：**

仮に，$x$ と $y$ が同じ同値類に属しているものとしよう．このとき，$z$ は異なる同値類に属し，かつ $y \succsim_{OQ} z$ であることから，$y \succ_O z$ となることが分かる．いま，$x \sim_O y$ であるので，$\succsim_O$ の推移性から $x \succ_O z$ が成立し，$x \succ_{OQ} z$ となることが示せる．

$y$ と $z$ が同じ同値類に属する場合についても同様にして示すことができる．

**(3) 三つとも全て異なる同値類に属している場合：**

この場合は $x \succ_O y \succ_O z$ であるので，$\succsim_O$ の推移性から $x \succ_O z$ が得られる．ゆえに，$x \succ_{OQ} z$ が成立する．

これらの場合分けによって十分性が示せた．||

(投稿受付2008年7月18日・最終決定2010年3月10日，国立障害者リハビリテーションセンター研究所)

## 注

1)　本稿は2007年2月に作成された研究論文であり，筆者の博士学位論文(坂本2008)の2章を基にしている．最終稿に至るまでの間に有益なコメントを頂いた鈴村興太郎氏，蓼沼宏一氏，山重慎二氏，佐藤主光氏，後藤玲子氏，2名の匿名のレフリーに深く感謝したい．また，本研究は21世紀COEプロジェクト「現代経済システムの規範的評価と社会的選択」から研究費の助成を受けている．記して謝意を表したい．言うまでもなく，本稿にある誤りの全ては筆者の責任である．

2)　整合的な社会的判断を得る他の方法としては，(1)相異なる複数の基準が一致するときにのみ社会的な判断を下すという共通部分(intersection)ないし支配関係に基づくアプローチ(Sen 1985; 1992; 1999)，(2)矛盾する二つの基準が両立可能になるまで，どちらかの，あるいは両方の基準を弱めていくアプローチ，という2つのものがある．

3)　辞書式組合せに関する社会的序列付けの方法は筆者の知る限り，Rawls(1971)による正義の二原理が最初のものである．そこでは，自由の平等が第一原理として優先され，第二原理はその下位基準として機能する．社会的選択理論においては，Suzumura(1983)が社会的選択関数の枠組みの下で初めて辞書式アプローチを採択し，Klemisch-Ahlert(1993)や Bossert *et al.*(1994)は機会集合の序列付けの枠組みにおいて辞書式アプローチを採択した．辞書式ランキングにおける集団的合理性の問題は Tadenuma(1998; 2002; 2005)によって初めて分析された．

4)　$X$ が無限集合であっても本稿の帰結は成立す

ることに留意されたい.

5) 辞書式ランキングの定義がやや煩雑になったのは元となる二つの基準 $\succsim_A, \succsim_B$ に関して完備性を要求していないためである．もしどちらか一方の二項関係が完備性を持つ場合には，辞書式ランキングの非対称成分 $\succ_{AB}$ を定義さえすれば，任意の $x$ と $y$ に対して $x \succsim_{AB} y$ は $y \not\succ_{AB} x$ として表現することが可能になる.

6) 例えば，三つの基準 $A, B, C$ の辞書式組合せの場合には，基準 $A$ と基準 $B$ の辞書式組合せを一つの二項関係として考えて，基準 $C$ を付け加えれば丁度二つの基準の辞書式組合せと同様に分析することが可能である.

7) 本稿では辞書式ランキングにおける集団的合理性の形式的問題のみを考察の対象とする．しかし，準順序や順序のどちらが優先されるべきか，どのような基準が辞書式ランキングの基準として望ましいのか，集団的合理性の観点からだけではなく，規範的な観点からも考察される必要があることは言うまでもない.

8) Tadenuma(2002)の効率優先ルールは無羨望かつ効率的な配分が存在するときには必ずその配分を極大要素として指定するという長所をもっているが，循環が生じるという意味で整合性の観点からは問題がある．この結果について，Sakamoto(2008)は無羨望かつ効率的な配分を割り当てる社会選択関数が Chernoff の公理を満たさないことを示し，それを合理化するような任意のランキングが循環をもつことを示した.

9) 準順序を優先する辞書式ランキングが非循環性を満たすための必要十分条件については Houy and Tadenuma(2007)を見よ．彼らは任意の二つの二項関係を辞書式に組合せる場合に非循環性が満たされるための必要十分条件を与えている.

10) 坂本(2008，第3章)を参照せよ.

11) これらの解決法に関連する諸点については結語で補足する.

12) 平等等価基準に基づいた衡平基準であっても適正な形で拡張した衡平基準の下では推移性どころか非循環性すら満たせなくなることが示されている(坂本 2008，第 3 章)．その意味において，Tadenuma (2005)の可能性定理は頑健な結果ではないことに留意されたい.

13) $y \succ_O x \sim_O z$ の場合は $y \succsim_Q z$ かつ $z \succsim_Q x$ であるので，命題2の条件を満たさないケースに当たる．従って，(6-4)のケースにおいて考慮する必要がない.

14) $z \sim_O y \succ_O x$ の場合は $y \succsim_Q z$ かつ $z \succsim_Q x$ であるので，命題2の条件を満たさないケースに当たる．従って，(6-6)のケースにおいて考慮する必要がない.

15) 無差別のケースが排除されるのは，無差別な関係が成立すると準順序の推移性から全てのペアについて比較が可能になってしまうためである．たとえば，(a)のケースで，$x \sim_Q y$ かつ $x \succsim_Q z$ の場合には準順序の推移性によって $y \succsim_Q z$ が成立し，比較不可能なペアは存在しなくなる.

## 参 考 文 献


坂本徳仁(2008)『規範経済学及び社会的選択理論に関する4つのエッセイ』一橋大学経済学研究科博士(経済学)学位論文.

Bossert, W., P. K. Pattanaik and Y. Xu (1994) "Ranking Opportunity Sets: An Axiomatic Approach," *Journal of Economic Theory*, Vol. 63, No. 2, pp. 326-345.

Campbell, D. E. and J. S. Kelly (2007a) "Social Welfare Functions that Satisfy Pareto, Anonymity, and Neutrality, but not Independence of Irrelevant Alternatives," *Social Choice and Welfare*, Vol. 29, No. 1, pp. 69-82.

Campbell, D. E. and J. S. Kelly (2007b) "Pareto, Anonymity, and Independence: Four Alternatives," *Social Choice and Welfare*, Vol. 29, No. 1, pp. 83-104.

Feldman A. M., and A. Kirman (1974) "Fairness and Envy," *American Economic Review*, Vol. 64, No. 6, pp. 996-1005.

Fleurbaey, M., K. Suzumura and K. Tadenuma (2005) "Arrovian Aggregation in Economic Environments: How Much Should We Know about Indifference Surfaces?" *Journal of Economic Theory*, Vol. 124, No. 1, pp. 22-44.

Houy, N. and Tadenuma, K. (2007) "Lexicographic Compositions of Two Criteria for Decision Making," COE/RES Discussion Paper Series, No. 213, Hitotsubashi University.

Klemisch-Ahlert, M. (1993) "Freedom of Choice," *Social Choice and Welfare*, Vol. 10, No. 3, pp. 189-207.

Rawls, J. (1971) *A Theory of Justice*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Sakamoto, N. (2008) "Collective Rationality and Fairness as No-Envy," Presented Paper at 2008 Japanease Economic Association Annual Fall Meeting: Osaka, Japan.

Sen, A. K. (1970) *Collective Choice and Social Welfare*, San Francisco: Holden-Day.

Sen, A. K. (1985) *Commodities and Capabilities, Amsterdam*; New York: North-Holland.

Sen, A. K. (1992) *Inequality Reexamined*, Oxford: Clarendon Press.

Sen, A. K. (1999) *Development as Freedom*, New York: Alfred A. Knopf.

Suzumura, K. (1983) "Resolving Conflicting Views of Justice in Social Choice," in P. K. Pattanaik and M. Salles (eds.) *Social Choice and Welfare*, New York: North-Holland.

Tadenuma, K. (1998) "Efficiency First or Equity First? Two Principles and Rationality of Social Choice," Discussion Paper Series No. 1998-01, Hitotsubashi University.

Tadenuma, K. (2002) "Efficiency First or Equity First? Two Principles and Rationality of Social Choice," *Journal of Economic Theory*, Vol. 104, Issue 2, pp. 462-472.

Tadenuma, K. (2005) "Egalitarian-Equivalence and the Pareto Principle for Social Preferences," *Social Choice and Welfare*, Vol. 24, No. 3, pp. 455-473.