

マルコフ・スイッチング・モデルを用いた日本の景気循環の計量分析

渡部 敏明*

本稿では、1980年1月から2009年2月までの内閣府経済社会総合研究所の景気一致指数(CI)を用いて、日本の景気循環の構造変化について計量分析を行った。具体的には、CIの平均成長率が景気拡張期と後退期とで変化するマルコフ・スイッチング・モデルと、それにさらに構造変化点を付加し、景気拡張期と後退期の平均成長率および景気循環からの乖離である短期的な変動の分散が各構造変化点で変化するモデルを、マルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC)を用いてベイズ推定した。また、構造変化点の数の異なるモデルの中から周辺尤度によってモデル選択を行うことで、構造変化点の数と時期を特定化した。その結果、(1)80年以降の日本の景気循環には構造変化点が2箇所あること、(2)それらはバブル崩壊後の1991年7月とリーマン・ブラザーズが破綻する直前の2008年7月である可能性が最も高いこと、(3)前者の構造変化は、CIの景気拡張期、後退期の平均成長率をいずれも低下させ、後者の構造変化は、それらをさらに低下させたこと、(4)短期的な変動の分散は変化していないこと、などが明らかになった。

JEL Classification Codes: C11, C22, C52, E32

1. はじめに

1980年代半ば以降の日本経済は、バブルとその崩壊、その後の「失われた10年」と呼ばれる停滞期などを経験した。また、「失われた10年」の景気停滞を受けて、日銀の金融政策もゼロ金利政策や量的緩和政策など新たな政策への転換を余儀なくされている。さらに、最近では、リーマン・ショックに代表されるアメリカの金融危機が日本経済にも深刻な影響を与えている。こうした中、日本の景気循環にも構造変化が生じている可能性が高い。そこで、本稿では、1980年以降の日本の景気循環の構造変化について計量分析を行った。

本稿では、景気循環を表すモデルとして、Hamilton(1989)によって提案されたマルコフ・スイッチング・モデル(以下、MSモデルと呼ぶ)を用いている。具体的には、景気には拡張期と後退期の2つの状態があり、景気を表す変数の平均成長率の値が景気拡張期と後退期とで異なり、その2つの状態の推移はマルコフ過程に従うと仮定している。このモデルにさらに構造変化を付加し、景気拡張期と後退期の平均成長率および景気循環からの乖離である短期的な変動の分散が各構造変化点で変化するものとして、景気循環の構造変化の分析を行っている。Chib(1998)に従い、各期に構造変化が生じるか否かもマルコフ過程に従うと仮定している。同様の方法を用いて景気循環の構造変化について分析しているものに、Kim and Nelson(1999a)と渡部・飯星(2007)がある。前者が構造変化点の数を1に限定し

ているのに対して、後者は構造変化点の数が複数である場合も考え、構造変化点の数まで選択を行っている。本稿でも、渡部・飯星(2007)に従い、構造変化点の数が複数ある場合も考え、構造変化点の数まで選択を行っている。

Chib(1998)、Kim and Nelson(1999a)、渡部・飯星(2007)同様、推定方法にはマルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC)を用いたベイズ推定を採用している。従来のベイズ推定は、モデルのパラメータにデータを観測する前の分布である事前分布を設定し、それをベイズの定理によってデータを観測した後の分布である事後分布に改定し、事後分布に基づいてパラメータの推定を行うというものであった。しかし、モデルが複雑になると、ベイズの定理を用いて事後分布を解析的に求めるのが難しくなったり、たとえ求めたとしても複雑であったりするので、最近のベイズ推定ではMCMCを用いて事後分布からパラメータの値をサンプリングし、サンプリングされた値を使ってパラメータを推定することが多い。MCMCとはある分布からサンプリングする場合に1回前にサンプリングされた値を用いて次の値をサンプリングする方法の総称であり、ランダム・サンプリングが難しい場合に用いられる。

本稿のモデルはHamilton(1989)のフィルターを用いると尤度を解析的に計算することができるので、最尤法によっても推定することができるが、MCMCを用いてベイズ推定すると、各期の景気の状態や構造変化点をパラメータと一緒に同時推定できるので、パラメータの不確実性を考慮に入れて、

景気の転換点や構造変化点を推定することができる。また、MSモデルにおいて、景気の状態や構造変化によりパラメータの値が変化しているかどうかを尤度比検定などの古典的な方法によって検定しようとすると、検定統計量の漸近分布が通常の χ^2 分布に従わないという問題が生じる(Hansen 1992, Garcia 1998)。しかし、事後オッズ比に基づくベイズ統計学のモデル選択では、こうした問題は生じないので、本稿では、Chib(1998)や渡部・飯星(2007)に従い、構造変化点の数の異なるモデルを推定し、周辺尤度の値によって構造変化点の数まで選択している。

日本の景気を表す変数には、内閣府経済社会総合研究所が作成している景気一致指数(CI)を用いている。渡部・飯星(2007)では、1974年5月から2004年1月までのCIを用いて分析を行っているのに対して、本稿では、1980年1月から2009年2月までの最近の約29年間のCIを用いて分析を行っている。その結果、構造変化点の数は2が選択され、それらはバブル崩壊後の1991年7月とリーマン・ブラザーズが破綻する直前の2008年7月である可能性が最も高いことが明らかになった。また、1991年7月以降は、それ以前と比較して景気拡張期、後退期とも景気の前成長率が低下し、2008年7月以降は、それらがさらに低下しているとの結果が得られた。さらに、平均成長率は変化したものの、景気循環からの乖離である短期的な変動の分散は変化していないことも明らかになった。

本稿の構成は、以下の通りである。次節では、まずMSモデルについて簡単に説明した後、それを複数の構造変化点を持つモデルに拡張する。3節では、そのモデルを推定するために必要なベイズ推定、MCMCといった計量手法と構造変化点の数の選択に用いる事後オッズ比や周辺尤度について説明する。これらの手法の詳細については論文の最後に補論として記した。4節では、推定結果について考察し、最後に5節で本稿の結果をまとめる。

2. 複数の構造変化点を持つマルコフ・スイッチングモデル

まず最初に、構造変化のないMSモデルについて説明する。本稿で用いたMSモデルは以下のものである。

$$y_t = \mu_t + \phi(y_{t-1} - \mu_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d.} N(0, \sigma^2) \quad (1)$$

$$\mu_t = \mu^{(0)}(1 - S_t) + \mu^{(1)}S_t, \quad \mu^{(0)} < \mu^{(1)} \quad (2)$$

$$S_t = \begin{cases} 1 & \text{景気拡張期} \\ 0 & \text{景気後退期} \end{cases} \quad (3)$$

ここで、(1)式の y_t はCIの変化率である。また、 μ_t は t 期におけるCIの前成長率、 ε_t は誤差項を表す。この誤差項は過去と独立で同一な(identical and independently distributed; i.i.d.)正規分布に従

うものと仮定する。もし、 μ_t が一定であるならば、(1)式は通常の次数1の自己回帰モデルになるが、ここでは、 μ_t の値が景気拡張期と後退期とで異なることを許容する¹⁾。このことを表しているのが(2)式である。右辺にある S_t は(3)式で定義されているように景気が拡張期か後退期かを表すダミー変数であり、 $S_t=1$ ならば拡張期を、 $S_t=0$ ならば後退期を表す²⁾。したがって、平均成長率は、景気拡張期には $\mu^{(1)}$ になり、後退期には $\mu^{(0)}$ になる。(2)式で $\mu^{(0)} < \mu^{(1)}$ との制約を置いているのは、景気拡張期の方が後退期より平均成長率が高いことを保証するためである。

MSモデルでは、 S_t はマルコフ過程に従っていると仮定する。そこで、遷移確率(transition probability)は、以下のように、1期前の状態 S_{t-1} のみに依存する。(本稿では、以下、確率関数および確率密度関数をすべて $\pi(\cdot)$ で表す。)

$$\begin{aligned} \pi(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) &= p_{11} \\ \pi(S_t = 0 | S_{t-1} = 1) &= 1 - p_{11} \\ \pi(S_t = 0 | S_{t-1} = 0) &= p_{00} \\ \pi(S_t = 1 | S_{t-1} = 0) &= 1 - p_{00} \end{aligned} \quad (4)$$

例えば、 p_{11} は、 $t-1$ 期が景気拡張期である時に t 期も景気拡張期のままである確率を表しており、 p_{00} は、 $t-1$ 期が景気後退期である時に t 期も景気後退期のままである確率を表している。さらに、これらの確率はすべて時間を通じて一定であると仮定する。この遷移確率を行列表現すると、以下のようになる。

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{00} \\ 1 - p_{11} & p_{00} \end{bmatrix} \quad (5)$$

このMSモデルを複数の構造変化点を付加したモデルに拡張する。本稿の分析では、構造変化によって、景気後退期と拡張期の平均成長率 $\mu^{(0)}$ と $\mu^{(1)}$ のみ値が変化するモデルと、それに加えて(1)式の誤差項 ε_t の分散 σ^2 も変化するモデルを考える。前者のモデルでは、 $\mu^{(0)}$ と $\mu^{(1)}$ に添え字 t を付けることにより、(2)式を以下のように書き換える。

$$\mu_t = \mu_t^{(0)}(1 - S_t) + \mu_t^{(1)}S_t, \quad \mu_t^{(0)} < \mu_t^{(1)} \quad (2')$$

後者のモデルでは、さらに σ^2 にも添え字 t を付けて σ_t^2 と表す。

次に、各期においてその期までに何回構造変化が起きているか表すために、変数 D_t を導入する。以下、 y_t のデータ数を T 、構造変化点の数を n とする。さらに、構造変化点を (τ_1, \dots, τ_n) で表し、これらは $1 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n \leq T$ を満たすものとする。そうすると、 D_t は以下のように定義される。

$$D_t = \begin{cases} 0, & 1 \leq t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots \\ i, & \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \\ \vdots \\ n-1, & \tau_{n-1} \leq t < \tau_n \\ n, & \tau_n \leq t \leq T \end{cases} \quad (6)$$

ただし, $D_1 = 0, D_T = n$.

(5)式の示す通り, 最初の構造変化が生じるまでは D_t は 0 であり, 最初の構造変化が生じた後は D_t は 1 となり, 同様に, 構造変化が起きるたびに D_t の値は 1 つずつ大きくなり, 最後の n 個目の構造変化の後には D_t は n である. 構造変化点の数が n になるように, D_1 と D_T はそれぞれ 0 と n に固定する. また, この D_t は (3) 式で定義した景気が拡張期か後退期かを表すダミー変数 S_t と独立であると仮定する.

この D_t の値に依存して, 景気後退期と拡張期の平均成長率がそれぞれ以下のように変化するものとする.

$$\mu_t^{(0)} = \begin{cases} m_{00}, & D_t = 0 \\ m_{01}, & D_t = 1 \\ \vdots \\ m_{0i}, & D_t = i \\ \vdots \\ m_{0,n-1}, & D_t = n-1 \\ m_{0n}, & D_t = n \end{cases} \quad (7)$$

$$\mu_t^{(1)} = \begin{cases} m_{10}, & D_t = 0 \\ m_{11}, & D_t = 1 \\ \vdots \\ m_{1i}, & D_t = i \\ \vdots \\ m_{1,n-1}, & D_t = n-1 \\ m_{1n}, & D_t = n \end{cases} \quad (8)$$

ただし, $m_{0i} < m_{1i} (i = 0, \dots, n)$.

誤差項の分散 σ_i^2 も変化するモデルでは, それも以下のように表す.

$$\sigma_i^2 = \begin{cases} v_0, & D_t = 0 \\ v_1, & D_t = 1 \\ \vdots \\ v_i, & D_t = i \\ \vdots \\ v_{n-1}, & D_t = n-1 \\ v_n, & D_t = n \end{cases} \quad (9)$$

本稿の分析では, Chib(1998) や 渡部・飯星(2007) に従い, それまでに何回構造変化があったかを表す変数 D_t も, S_t と同様, マルコフ過程に従うものとする. ただし, 通常のマルコフ過程ではなく, 現行の値にとどまるか, あるいは 1 増えるかどちらかで, 値が減ったり, 一度に 2 以上増えることはないものとする. これを遷移確率で表わすと次のよう

になる.

$$\begin{aligned} \pi(D_t = 0 | D_{t-1} = 0) &= q_{00} \\ \pi(D_t = 1 | D_{t-1} = 0) &= 1 - q_{00} \\ \pi(D_t = 1 | D_{t-1} = 1) &= q_{11} \\ \pi(D_t = 2 | D_{t-1} = 1) &= 1 - q_{11} \\ &\vdots \\ \pi(D_t = n-1 | D_{t-1} = n-1) &= q_{n-1,n-1} \\ \pi(D_t = n | D_{t-1} = n-1) &= 1 - q_{n-1,n-1} \\ \pi(D_t = n | D_{t-1} = n) &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

例えば, q_{00} は, $t-1$ 期まで 1 度も構造変化が生じていない時に t 期も構造変化が生じない確率を表しており, q_{11} は, $t-1$ 期にまでに 1 回構造変化が生じている時に t 期に新たな構造変化が生じない確率を表している. この遷移確率を行列表現したものが次式である.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 - q_{00} & q_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - q_{11} & q_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - q_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - q_{n-1,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

(10)式の遷移確率は, (4)式の遷移確率と異なり, 各状態の遷移が非可逆的であり, 一度次の状態に遷移したら元に戻ることがないことを示している. 例えば, 今期が $D_t = 2$ である 3 行 3 列目の q_{22} に注目すると, この q_{22} は来期も $D_{t+1} = 2$ に留まる確率であり, その下の $1 - q_{22}$ は来期構造変化が起こり $D_{t+1} = 3$ になる確率である. 3 列目の他の値がすべて 0 になっていることからわかるように, $D_{t+1} = 1$ になる確率や $D_{t+1} = 4$ になる確率は 0 である.

本稿では, (1)-(4)式から成る構造変化点のない通常の MS モデルと, (1), (2'), (3), (4), (6)-(10)式から成る構造変化点を付加した MS モデルを用いて日本の景気循環の構造変化について分析する. 分析方法に MCMC を用いたベイズ推定を採用することにより, パラメータだけでなく, 景気の転換点や構造変化点も同時推定する. また, 事後オッズ比を用いて構造変化点の数の選択も行う. 次節ではこうした計量手法について説明する.

3. ベイズ推定法とモデル選択

3.1 ギブス・サンプラーを用いたベイズ推定

以下, データを $\tilde{Y}_T = (y_1, \dots, y_T)$, 推定する未知パラメータベクトルを θ とする. ベイズ推定法では, まず, 未知パラメータ θ にデータを観測する前の分布である事前分布 $\pi(\theta)$ を設定する. 従来のベイズ推定法は, 事前分布をベイズの定理

$$\pi(\bar{\theta}|\bar{Y}_T) = \frac{\pi(\bar{\theta})\pi(\bar{Y}_T|\bar{\theta})}{\pi(\bar{Y}_T)} \quad (12)$$

によってデータ \bar{Y}_T を観測した後の事後分布 $\pi(\bar{\theta}|\bar{Y}_T)$ に更新し、得られた事後分布に基づいてパラメータの値を推定するというものであった。前節で説明した複数の構造変化点を付加した MS モデルにおいて、(12)式を用いて事後分布を計算しようとするとは煩雑な手法を採らなければならない。そうした場合には、MCMC によって事後分布から未知パラメータ $\bar{\theta}$ の値をサンプリングし、得られた値に基づいてパラメータの値を推定するという方法が用いられる。MCMC とは、通常のランダム・サンプリングと異なり、1 回前にサンプリングされた値に依存させて次の値をサンプリングする方法の総称であり、代表的なものにギブス・サンプラーとメトロポリス・ヘイスティンクス(MH)アルゴリズムがある。ベイズ推定や MCMC について詳しくは、大森(2001)、小西・越智・大森(2008)、中妻(2007)、和合(2005)等を参照されたい。

本稿の推定ではギブス・サンプラーを用いるので、以下、ギブス・サンプラーについて説明する。ギブス・サンプラーを使う場合には、未知パラメータ $\bar{\theta}$ をいくつかのブロック $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ に分割する。 $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ はそれぞれ 1 変量であっても多変量であっても構わないが、各ブロックの全条件付事後分布(full conditional posterior distribution) $\pi(\theta_i|\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_k, \bar{Y}_T)$ ($i=1, \dots, k$) は、基準化定数(normalizing constant)以外はすべて解析的に求められ、かつ、そこからサンプリングできるものとする。このとき、適当な初期値 $(\theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})$ からスタートして、まず、全条件付事後分布 $\pi(\theta_1|\theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, \bar{Y}_T)$ から $\theta_1^{(1)}$ をサンプリングし、次に、全条件付事後分布 $\pi(\theta_2|\theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, \bar{Y}_T)$ から $\theta_2^{(1)}$ をサンプリングする。これを繰り返し、最後に $\pi(\theta_k|\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(1)}, \bar{Y}_T)$ から $\theta_k^{(1)}$ をサンプリングする。以上を第 1 ループと呼ぶことにする。この第 1 ループでサンプリングされた $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_k^{(1)})$ からスタートして、同様に第 2 ループを行い、 $(\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \dots, \theta_k^{(2)})$ をサンプリングする。以上を繰り返すと、第 l ループでは、 $(\theta_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}, \dots, \theta_k^{(l)})$ がサンプリングされることになる。緩い制約条件の下で、 $l \rightarrow \infty$ とすると、以上のようにしてサンプリングされた $(\theta_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}, \dots, \theta_k^{(l)})$ は同時事後分布 $\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|\bar{Y}_T)$ からサンプリングされた確率変数に分布収束することが知られている³⁾。

そこで、最初の M ループ(M は十分大きな値とする)でサンプリングされた値を捨て(この捨てる最初の M ループのことを“burn-in”と呼ぶ)、さらに N ループを行ってサンプリングされた $(\theta_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}, \dots, \theta_k^{(l)})$ ($l=M+1, M+2, \dots, M+N$) を、同時事後

分布 $\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|\bar{Y}_T)$ からサンプリングされた値と見なし、推定に用いる。例えば、 θ_1 の平均はサンプリングされた値の標本平均として次のように推定できる。

$$E(\theta_1) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=M+1}^{M+N} \theta_1^{(i)}$$

前節で説明した複数の構造変化点を付加した MS モデルの未知パラメータは、構造変化によって景気後退期と拡張期の平均成長率だけが変化する場合、 $\bar{\theta}=(\bar{m}, \phi, \sigma^2, \bar{p}, \bar{q})$ であり、誤差項の分散も変化する場合、 $\bar{\theta}=(\bar{m}, \phi, \bar{v}, \bar{p}, \bar{q})$ である。ただし、 $\bar{m}=[m_{01}, \dots, m_{0n}, m_{11}, \dots, m_{1n}]'$, $\bar{p}=[p_{00}, p_{11}]'$, $\bar{q}=[q_{00}, \dots, q_{n-1, n-1}]'$, $\bar{v}=[v_1, \dots, v_n]'$ 。このモデルにギブス・サンプラーを応用する場合には、さらに潜在変数である $\bar{D}_T=[D_1, \dots, D_T]'$, $\bar{S}_T=[S_1, \dots, S_T]'$ もパラメータと一緒にサンプリングを行う。例えば、構造変化によって景気後退期と拡張期の平均成長率だけが変化する場合、以下の 7 つの全条件付事後分布から繰り返しサンプリングを行う。

- ステップ 1. $\pi(\bar{m}|\bar{\theta}_{-\bar{m}}, \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{Y}_T)$
- ステップ 2. $\pi(\phi|\bar{\theta}_{-\phi}, \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{Y}_T)$
- ステップ 3. $\pi(\sigma^2|\bar{\theta}_{-\sigma^2}, \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{Y}_T)$
- ステップ 4. $\pi(\bar{S}_T|\bar{\theta}, \bar{D}_T, \bar{Y}_T)$
- ステップ 5. $\pi(\bar{D}_T|\bar{\theta}, \bar{S}_T, \bar{Y}_T)$
- ステップ 6. $\pi(\bar{p}|\bar{S}_T)$
- ステップ 7. $\pi(\bar{q}|\bar{D}_T)$

ここで、例えば、 $\bar{\theta}_{-\bar{m}}$ は $\bar{\theta}$ に含まれる \bar{m} 以外のすべてのパラメータを意味する。ステップ 6 と 7 で条件の中にそれぞれ \bar{S}_T と \bar{D}_T しかないのは、それらが与えられると、 \bar{p} や \bar{q} が他のパラメータや \bar{Y}_T と独立になるからである。なお、各ステップの全条件付事後分布およびそこからのサンプリング法については補論 A に記したので、そちらを参照されたい。以上のステップ 1 から 7 までの全条件付事後分布からのサンプリングを繰り返せば、同時事後分布

$$\pi(\bar{m}, \phi, \sigma^2, \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{p}, \bar{q}|\bar{Y}_T) \quad (13)$$

からサンプリングした確率変数に分布収束するので、最初の何回かを burn-in として捨て、残りのサンプルを使ってパラメータの推定を行えばよい。

ただし、その前に burn-in 以降のサンプルが同時事後分布(13)からサンプリングされた確率変数に分布収束しているかどうか確かめる必要がある。本稿では、そうした収束診断の方法として、Geweke(1992)によって提案された方法を用いている⁴⁾。この方法は、burn-in 以降の各パラメータの N 個のサンプルを前半と後半に分け、平均に有意な差がないかどうか検定するものである⁵⁾。具体的には、 N 個のサンプルの内、最初の n_A 個のサンプルの平均 $\bar{\theta}_A=(1/n_A)\sum_{j=1}^{n_A}\theta^{(j)}$ と最後の n_B 個のサンプルの平均 $\bar{\theta}_B=(1/n_B)\sum_{j=N-n_B+1}^N\theta^{(j)}$ を用いて、次のような

収束診断(Covergence Diagnostic; CD)統計量を計算する。

$$CD = \frac{\bar{\theta}_A - \bar{\theta}_B}{\sqrt{\hat{\sigma}_A^2/n_A + \hat{\sigma}_B^2/n_B}} \quad (14)$$

ただし、分母の $\hat{\sigma}_A^2/n_A$ と $\hat{\sigma}_B^2/n_B$ は、それぞれ $\bar{\theta}_A$ と $\bar{\theta}_B$ の分散の推定量である。もしギブス・サンプラーが収束していれば、CD 統計量は漸近的に標準正規分布に従う。この CD 統計量を計算する上で注意しなくてはならないのは、MCMC はランダム・サンプリングではないので、サンプリングされた値に自己相関が生じることである。そこで、 $\hat{\sigma}_A^2, \hat{\sigma}_B^2$ は自己相関を考慮して計算する必要がある。自己相関のあるサンプル $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(n)}\}$ の標本平均の分散の推定値は以下の式から計算できる。

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\Gamma}^{(0)} + \frac{2n}{n-1} \sum_{i=1}^B K\left(\frac{i}{B}\right) \hat{\Gamma}(i) \quad (15)$$

ただし、

$$\hat{\Gamma}(i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^n (\theta^{(k)} - \bar{\theta})(\theta^{(k-i)} - \bar{\theta})$$

である。本稿では、 $K(\cdot)$ にバルツェン・ウインドーを採用する⁶⁾。B はそのバンド幅を表す。

3.2 事後オッズ比によるモデル選択法

ベイズ統計学では通常、事後オッズ比を用いてモデル選択を行う。モデル M_k と M_l の間の選択を行う場合、データ \tilde{Y}_T が与えられた下でのそれぞれのモデルが正しい確率の比率 $\pi(M_k|\tilde{Y}_T)/\pi(M_l|\tilde{Y}_T)$ を事後オッズ比と呼ぶ。これが 1 よりも大きければ M_k を選択し、1 よりも小さければ M_l を選択する。

事後オッズ比は次のように表すことができる。

$$\frac{\pi(M_k|\tilde{Y}_T)}{\pi(M_l|\tilde{Y}_T)} = \frac{\pi(M_k)}{\pi(M_l)} \cdot \frac{\pi(\tilde{Y}_T|M_k)}{\pi(\tilde{Y}_T|M_l)} \quad (16)$$

ここで、右辺第 1 項 $\pi(M_k)/\pi(M_l)$ は事前オッズ比と呼ばれ、データを観測する前のそれぞれのモデルが正しい確率の比率である。また、右辺第 2 項 $\pi(\tilde{Y}_T|M_k)/\pi(\tilde{Y}_T|M_l)$ はベイズ・ファクターと呼ばれる。どちらのモデルが正しいか事前情報がない場合には、事前オッズ比は 1 に設定される。そうすると、事後オッズ比はベイズ・ファクターと等しくなり、ベイズファクターの分子、分母を計算すれば事後オッズ比が求まることになる。

ベイズ・ファクターの分子、分母はそれぞれ周辺尤度(marginal likelihood)と呼ばれる。本稿では、Geweke(1999)の修正調和平均推定量(modified harmonic mean estimator)を潜在変数を含むモデルに適用できるように改良して周辺尤度を計算している。この方法を用いると、Hamilton(1989)のフィルターを用いることなく、簡単に周辺尤度を計算できる。この方法についての詳細は補論 B に記したので、そちらを参照されたい。

4. 構造変化点と景気転換点の推定結果

本節では、上記のモデルと分析方法を用いて、80 年以降の日本の景気循環において、構造変化があったかどうか、もしあったなら、構造変化点の数はいくつで、それぞれいつどのような変化があったのかを検証する。さらに、構造変化点を考慮することが、景気転換点の推定に対してどのような影響を及ぼすのかについても検討する。そのために、7 種類の MS モデルを推定する。この 7 種類とは、構造変化点を持たない通常の MS モデル、構造変化によって景気後退期と拡張期の CI の平均成長率のみが変化するものとした構造変化点が 1 つの MS モデル、2 つの MS モデル、3 つの MS モデル、さらに構造変化によって誤差項の分散も変化するものとした構造変化点が 1 つの MS モデル、2 つの MS モデル、3 つの MS モデルである。また、各 MS モデルの周辺尤度を計算することでモデル選択を行い、選択された MS モデルに基づいて構造変化点の数と時期を特定化する。

日本の景気を表す変数として用いたのは、内閣府経済社会研究所が 11 個の景気一致系列を使って作成している景気一致指数(CI)である。標本期間は 1980 年 1 月から 2009 年 2 月までであり、データ数は 350 である。図 1 にこのデータをプロットしてある。図 1 の影の部分は内閣府経済社会総合研究所が公表している景気基準日付に基づく景気後退期である。ただし、最後の景気後退期の開始時点、すなわち最後の景気の山は 2007 年 10 月になっているが、これは 2009 年 1 月 29 日に公表された暫定的な日付である。CI を自然対数化して 1 階の階差をとり、さらに 100 倍することにより % 表示にしたものを y_t として用いた。各パラメータの事前分布には、通常の自然共役な事前分布を設定した。詳細は、補論 A および表 2 の注を参照されたい。全推定で、burn-in を 5,000 回とし、その後の 10,000 回のサンプルを事後分布からサンプリングされたものと見なして推定に用いた。

表 1 には、各モデルの対数周辺尤度の値が記されている。それによると構造変化点が 2 つで平均成長率のみが変化するモデルの対数周辺尤度が最も高くなっている。この結果から、80 年以降の日本の景気循環における構造変化点の数は 2 であり、構造変化によって平均成長率は変化しているが、誤差項の分散は変化していないことがわかる。

図 2 には、構造変化点 2 つの MS モデルから推定された各構造変化点の事後分布を描いている。実線が第一構造変化点、点線が第二構造変化点の事後分布を表している。これらは、 \tilde{D}_T の burn-in 以降の 10,000 回のサンプルそれぞれで、 $D_{t-1} < D_t$ となっている t が 2 箇所あるので、それらを抽出して、それ

図 1. 内閣府経済社会総合研究所の景気一致指数(CI)と景気日付

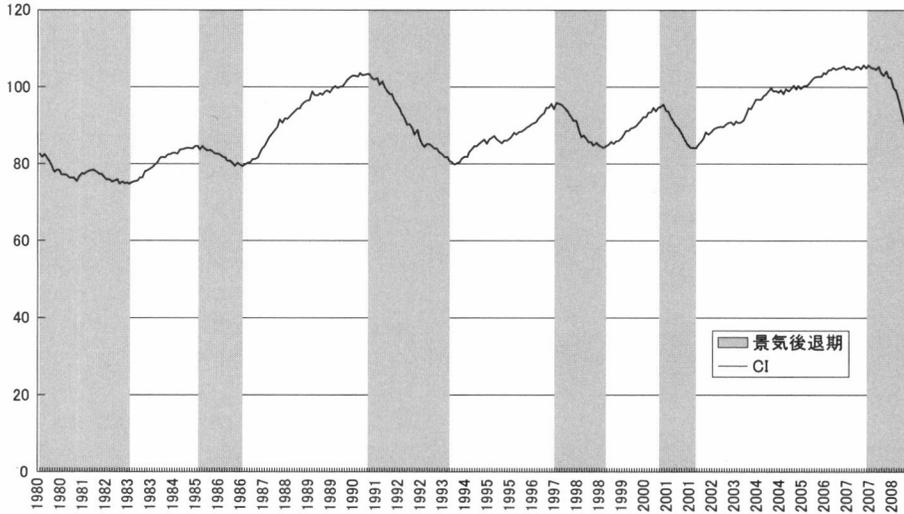


表 1. 対数周辺尤度

構造変化点の数	対数周辺尤度
0	-441.551
構造変化によって平均のみが変化するモデル	
1	-414.651
2	-412.826
3	-413.923
構造変化によって平均と分散の値が変化するモデル	
1	-414.767
2	-438.609
3	-449.127

ぞれのヒストグラムを描いたものである。第一構造変化点の事後分布のピークは1991年7月であり、第二構造変化点の事後分布のピークは2008年7月である。このことから、2つの構造変化点は、バブル崩壊後の1991年7月とリーマン・ブラザーズが破綻する直前の2008年7月である可能性が最も高いことがわかる。

表2は、構造変化点2つで平均成長率のみが変化するMSモデルのパラメータの推定結果である。そこには、burn-in以降の10,000個のサンプルを使って計算された各パラメータの事後分布の平均、標準偏差、95%信用区間(credible interval)⁷⁾、CD統計量が計算されている。平均と標準偏差はそれぞれ各パラメータの10,000個のサンプルの平均と標準偏差として計算した。95%信用区間は、サンプルを大きさの順に並べ替え、下2.5%点と上2.5%点を抽出することで導出した。CD統計量は $N=10,000, n_A=1,000, n_B=5,000$ として(14)式を用いて計算した。その際、 σ_A^2 および σ_B^2 は(15)式を用いて計算し、パルツェン・ウィンドーのバンド幅 B はそれぞれ100および500に設定した。

表2のCDの値からわかるように、ギブス・サンプラーが収束しているという帰無仮説は、すべ

てのパラメータにおいて、有意水準1%で受容されている。 m_{00} と m_{01} の事後平均、 m_{10} と m_{11} の事後平均を比較すると、第一構造変化点では、景気拡張期、後退期ともに平均成長率が低下していることがわかる。また、 m_{01} と m_{02} の事後平均、 m_{11} と m_{12} の事後平均を比較すると、第二構造変化点では、それらがさらに低下していることがわかる。その他のパラメータに関しては、事後平均および95%信用区間から、 ϕ は負であることがわかる。内閣府のCIの変化率が負の自己相関を持つことはよく知られており、これはCIを構成する11のほとんどの景気一致系列の変化率が負の自己相関を持っているからである(Fukuda and Onodera 2001, Watanabe 2003)。

以上の結果は次のようにまとめられる。(1)日本の80年以降の景気循環における構造変化点の数は2である。(2)変化点はそれぞれバブル崩壊後の1991年7月と、リーマン・ブラザーズが破綻する直前の2008年7月である可能性が最も高い。(3)いずれの構造変化も、景気拡張期、後退期ともに景気平均成長率を低下させている。(4)景気循環からの乖離を表す誤差項 ε_t の分散には構造変化は観測されない。

次に、構造変化を考慮するのとならないのとで、景気転換点の推定値がどのように影響を受けるかを分析する。図3には、構造変化によって平均成長率のみが変化するMSモデルにおいて、構造変化点の数を0, 1, 2, 3として推定した各期が景気後退期である事後確率を描いたものである。これは、 S_t の事後平均 S_t^* を使って、 $(1-S_t^*)$ として計算している。図3の影の部分は、図1同様、内閣府経済社会総合研究所が公表している景気基準日付から割り出された景気後退期である。さらに表3は、4種類のMS

図2. 構造変化点が2つで、構造変化によって景気後退期と拡張期の平均成長率のみが変化するモデルから推定した各時点の構造変化点である事後確率

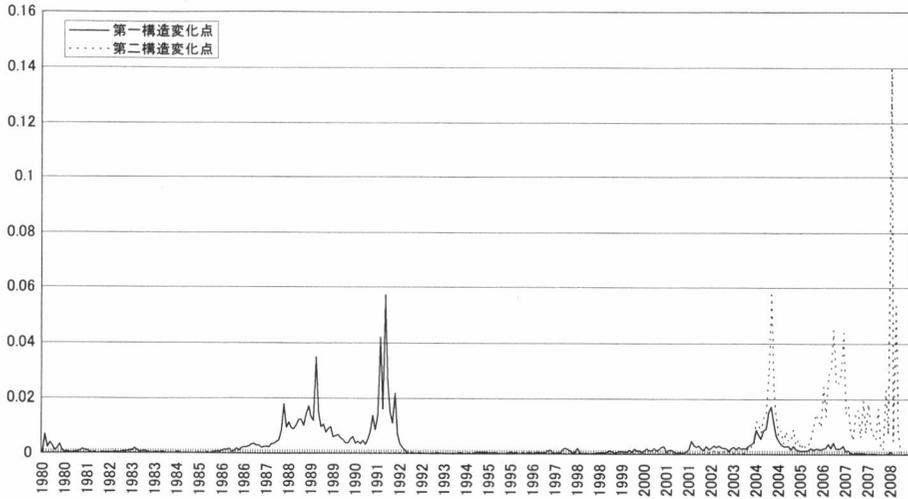


表2. 構造変化点2つで構造変化によって平均のみが変化するMSモデルの推定結果

パラメータ	事後分布			
	平均	標準偏差	95% 信用区間	CD
ϕ	-0.272	0.058	[-0.367, -0.177]	-0.94
m_{00}	-0.461	0.221	[-0.748, -0.190]	2.07
m_{01}	-0.757	0.360	[-1.156, -0.009]	-1.22
m_{02}	-2.349	0.256	[-2.779, -1.932]	-1.75
m_{10}	0.550	0.206	[0.381, 0.765]	1.11
m_{11}	0.386	0.154	[0.099, 0.555]	0.90
m_{12}	0.048	0.564	[-0.637, 1.234]	0.49
σ^2	0.526	0.045	[0.455, 0.603]	-0.04
p_{00}	0.929	0.027	[0.881, 0.967]	-0.36
p_{01}	0.958	0.016	[0.929, 0.980]	0.00
q_{10}	0.995	0.005	[0.985, 1.000]	-1.61
q_{11}	0.995	0.006	[0.983, 1.000]	2.14

注) 表にある記号は、(1), (2), (4), (8)-(11)式のものである。CDは(14)式で定義されるGeweke(1992)の収束診断(CD)統計量を表す。各パラメータの事前分布は以下の通り。 $\phi \sim N(0, 1) I[|\phi| < 1]$, $\vec{M}_i = [m_{0i}, m_{1i}]' \sim N((-0.5, 0.5)', I_2)$ $I[m_{0i} < m_{1i}] (i=0, 1, 2)$, $\sigma^2 \sim IG(3, 2)$, $p_{00} \sim Beta(9, 1)$, $p_{01} \sim Beta(9, 1)$, $q_{00} \sim Beta(9, 0.1)$, $q_{11} \sim Beta(9, 0.1)$ 。ここで、 I_a は $a \times a$ の単位行列、 $N(\cdot, \cdot)$ は正規分布、 $IG(\cdot, \cdot)$ は逆ガンマ分布、 $Beta(\cdot, \cdot)$ はベータ分布を表す。また、 $I[|\phi| < 1]$, $I[m_{0i} < m_{1i}]$ は括弧の中の不等式がすべて満たされれば1、そうでなければ0となる指示関数である。

モデルから推定された各景気転換点がそれぞれ内閣府の景気基準日付と何日ずれているかを記したものである。正の数値は基準日付に対してMSモデルによる推定値が遅れていることを表し、負の数値は先行していることを表す。なお、景気の山の日付は、景気後退期の確率が50%を切った時点とし、景気の谷の日付は景気後退期の確率が50%を越えた時点とした。内閣府が暫定的に最後の景気の山としている2007年10月以外は、構造変化点の数を2としたモデルから推定した転換点が内閣府の公表している景気の転換点に最も近いことがわかる。2007年

10月に関しては、構造変化を考えない通常のMSモデルでは3ヶ月遅れであるのに対して、構造変化点を付加したモデルでは、すべて10ヶ月遅れとなっている。図1からわかるように、内閣府が暫定的に景気の山としている2007年10月以降、CIは下落しているものの、しばらく下落のスピードが緩やかだったために、その時期も景気拡張期(あるいは景気の踊り場)と見なし、内閣府の日付よりも10ヶ月遅れたものと解釈できる。

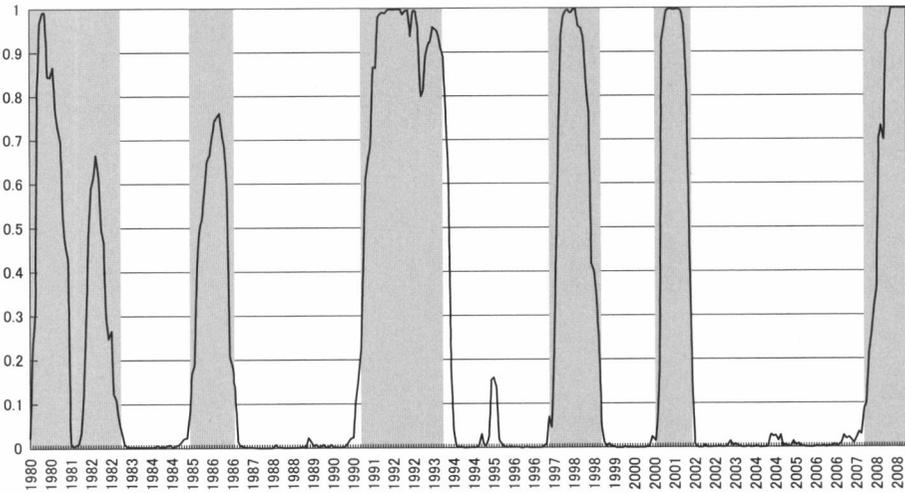
5. 結論

本稿では、複数の構造変化点を付加したMSモデルをMCMCを用いてベイズ分析することにより、1980年1月から2009年2月までのCIの月次データから日本の景気循環の転換点と構造変化点を同時推定した。また、構造変化点の数の異なるモデルの中から事後オッズ比によってモデル選択を行うことで、構造変化点の数と時期について特定化した。その結果、80年以降の日本の景気循環における構造変化点は2箇所あり、バブル崩壊後の1991年7月とリーマン・ブラザーズが破綻する直前の2008年7月である可能性が最も高いこと、いずれの構造変化も景気の平均成長率を下降させたことが明らかになった。さらに、景気循環からの乖離である短期的な変動の分散には構造変化は観測されないことも明らかになった。

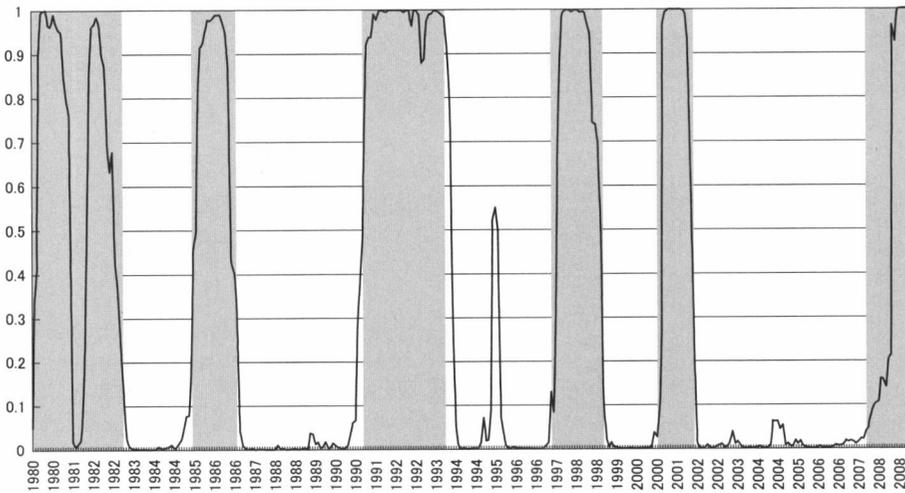
本稿では、構造変化点を付加することにより通常のMSモデルを拡張したが、本稿のモデルにはさらに改良の余地がある。例えば、本稿では、景気の状態として景気拡張期と後退期の2状態しか考えなかったが、今後、景気の踊り場等を加えた3状態以上のモデルに拡張することは重要である。

図 3. 景気後退確率

(a) 構造変化点なし



(b) 構造変化点が1の場合



補論 A：事前分布と全条件付事後分布

構造変化点の数が n で、構造変化によって平均成長率のみが変化する MS モデルの各パラメータの事前分布および 3.1 節のステップ 1-7 の全条件付事後分布は以下の通りである。全条件付事後分布の導出方法について詳しくは、Kim and Nelson (1999b) の Chapter 9 や Watanabe (2003) の Appendix 1 を参照されたい。

ステップ 1. 平均成長率のベクトル $\tilde{M}_i = [m_{0i}, m_{1i}]' (i=0, \dots, n)$ の事前分布には以下のように互いに独立な 2 変量切断正規分布を仮定する。

$$\tilde{M}_i \sim N(M_{i0}, \Sigma_{M_{i0}}) I(m_{0i} < m_{1i}) \quad (A1)$$

ここで、 $I(m_{0i} < m_{1i})$ は括弧内の不等式が満たされれば 1、そうでなければ 0 となる指示関数(indicator function)であり、したがって、この事前分布は平均 M_{i0} 、分散共分散行列 $\Sigma_{M_{i0}}$ の 2 変量正規分布を $m_{0i} < m_{1i}$ の範囲だけ残して切断した切断正規分布になっている。

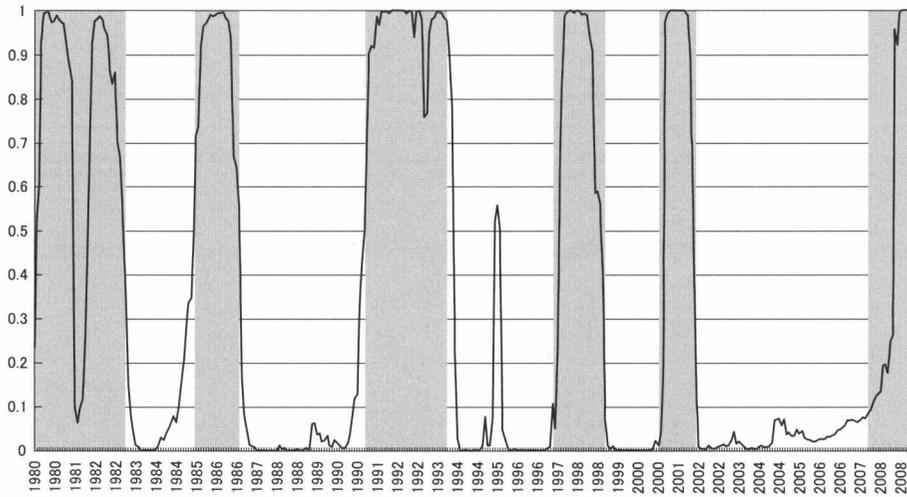
この事前分布の下では、 $\tilde{M}_i (i=0, \dots, n)$ の全条件付事後分布も以下のような互いに独立な 2 変量切断正規分布になる。

$$\tilde{M}_i | \bar{\theta}, \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{Y}_T \sim N(M_{i1}, \Sigma_{M_{i1}}) I(m_{0i} < m_{1i}) \quad (A2)$$

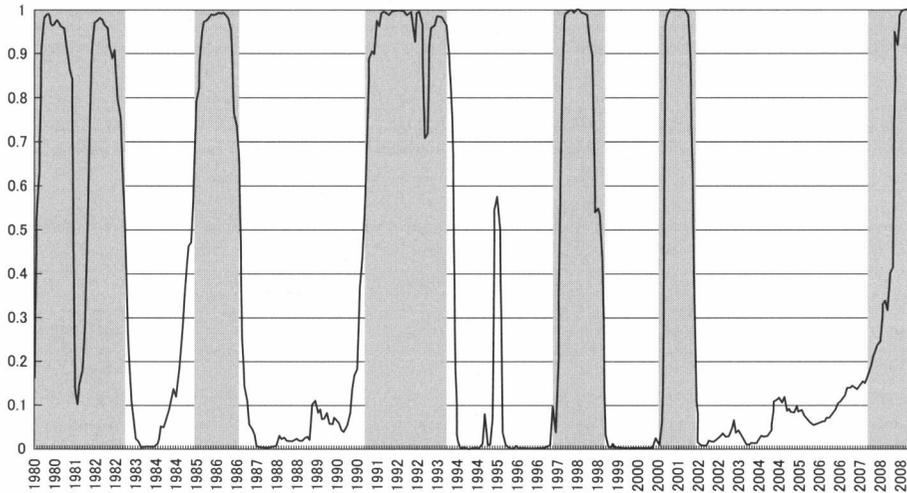
ただし、 $i=0$ であれば、

$$Y_i^* = [\sqrt{1-\phi^2}y_1/\sigma, (y_2-\phi y_1)/\sigma, \dots, (y_{t_1-1}-\phi y_{t_1-2})/\sigma]'$$

(c) 構造変化点が2の場合



(d) 構造変化点が3の場合



$$X_i^* = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\phi^2}(1-S_1)/\sigma, & \sqrt{1-\phi^2}S_1/\sigma \\ \{(1-S_2)-\phi(1-S_1)\}/\sigma, & (S_2-\phi S_1)/\sigma \\ \vdots & \vdots \\ \{(1-S_{\tau_1-1})-\phi(1-S_{\tau_1-2})\}/\sigma, & (S_{\tau_1-1}-\phi S_{\tau_1-2})/\sigma \end{bmatrix}$$

$i=1, \dots, n-1$ であれば,

$$Y_i^* = [(y_{\tau_i}-\phi y_{\tau_i-1})/\sigma, \dots, (y_{\tau_{i+1}-1}-\phi y_{\tau_{i+1}-2})/\sigma]'$$

$$X_i^* = \begin{bmatrix} \{(1-S_{\tau_i})-\phi(1-S_{\tau_i-1})\}/\sigma, & (S_{\tau_i}-\phi S_{\tau_i-1})/\sigma \\ \vdots & \vdots \\ \{(1-S_{\tau_{i+1}-1})-\phi(1-S_{\tau_{i+1}-2})\}/\sigma, & (S_{\tau_{i+1}-1}-\phi S_{\tau_{i+1}-2})/\sigma \end{bmatrix}$$

$i=n$ であれば,

$$Y_i^* = [(y_{\tau_n}-\phi y_{\tau_n-1})/\sigma, \dots, (y_T-\phi y_{T-1})/\sigma]'$$

$$X_i^* = \begin{bmatrix} \{(1-S_{\tau_n})-\phi(1-S_{\tau_n-1})\}/\sigma, & (S_{\tau_n}-\phi S_{\tau_n-1})/\sigma \\ \vdots & \vdots \\ \{(1-S_T)-\phi(1-S_{T-1})\}/\sigma, & (S_T-\phi S_{T-1})/\sigma \end{bmatrix}$$

と定義すると,

$$\Sigma_{M_{i1}} = (\Sigma_{M_{i0}}^{-1} + X_i^* X_i^*)^{-1},$$

$$M_{i1} = \Sigma_{M_{i1}} (\Sigma_{M_{i0}}^{-1} M_{i0} + X_i^* Y_i^*)$$

この分布からサンプリングするには、まず平均 M_{i1} , 分散 $\Sigma_{M_{i1}}$ の2変量正規分布からサンプリングし、サンプリングされた値が $m_{0i} < m_{1i}$ を満たさなければ、それを捨てて新たにサンプリングすればよい。

ステップ2. ϕ の事前分布には次のような切断正規分布を仮定する。

$$\phi \sim N(\phi_0, \sigma_\phi^2) I(|\phi| < 1)$$

ここで、 $I(|\phi| < 1)$ は、 $|\phi| < 1$ であれば1, それ以外では0になる指示関数である。すなわち、この事前分布は平均 ϕ_0 , 分散 σ_ϕ^2 の正規分布を定常性を満たす範囲だけ残して切断した切断正規分布である。

表3. 内閣府経済社会総合研究所の景気日付とのずれ

景気基準日付	構造変化点の数			
	0	1	2	3
	山			
85/6	+3	+2	0	-1
91/2	+1	0	0	0
97/5	+3	+2	+2	+2
00/11	+2	+2	+2	+2
07/10	+5	+10	+10	+10
	谷			
83/2	-7	-3	0	0
86/11	-2	-2	+1	+1
93/10	+3	+3	+3	+3
99/1	-4	0	-1	-1
02/1	-1	0	-1	-1

注) 正の数字は、基準日付に対してMSモデルによる推定値が遅れていることを表し、負の数字は先行していることを表す。景気の山の日付は、景気後退期の確率が50%を切った時点とし、景気の谷の日付は景気後退期の確率が50%を越えた時点とする。

この事前分布の下で、 ϕ の全条件付事後分布はやはり次のように切断正規分布になる⁸⁾。

$$\phi | \bar{\theta}, \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{Y}_T \sim N(\phi_1, \sigma_{\phi_1}^2) I(|\phi| < 1) \quad (A3)$$

ただし、

$$Y^* = [(y_2 - \mu_2)/\sigma, \dots, (y_T - \mu_T)/\sigma]'$$

$$X^* = [(y_1 - \mu_1)/\sigma, \dots, (y_{T-1} - \mu_{T-1})/\sigma]'$$

と定義すると、

$$\sigma_{\phi_1}^2 = (\sigma_{\phi_0}^2 + X^{*'} X^*)^{-1},$$

$$\phi_1 = \sigma_{\phi_1}^2 (\sigma_{\phi_0}^2 \phi_0 + X^{*'} Y^*)$$

この分布からサンプリングするには、まず平均 ϕ_1 、分散 $\sigma_{\phi_1}^2$ の正規分布からサンプリングし、サンプリングされた値が定常性を満たさない場合には、それを捨てて新たにサンプリングすればよい。

ステップ3. σ^2 の事前分布には次のような逆ガンマ分布を仮定する。

$$\sigma^2 \sim IG\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\delta_0}{2}\right) \quad (A4)$$

この事前分布の下では、全条件付事後分布も次のような逆ガンマ分布になる。

$$\sigma^2 | \bar{\theta}, \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{Y}_T \sim IG\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\delta_1}{2}\right) \quad (A5)$$

ただし、

$$\nu_1 = \nu_0 + T$$

$$\delta_1 = \delta_0 + \sum_{t=1}^T (y_t - \mu_t - \phi(y_{t-1} - \mu_{t-1}))^2$$

この分布からサンプリングするには、ガンマ分布からサンプリングし、その逆数をとればよい。

ステップ4. \bar{S}_T のサンプリングには、Kim and Nelson(1998, 1999b)で提案されているMulti-move samplerを用いる⁹⁾。 $\bar{S}^{t+1} = [S_{t+1}, \dots, S_T]'$ と定義す

ると、 \bar{S}_T の全条件付事後分布は次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} & \pi(\bar{S}_T | \bar{D}_T, \bar{Y}_T, \bar{\theta}) \\ &= \pi(S_T | \bar{D}_T, \bar{Y}_T, \bar{\theta}) \cdots \pi(S_t | \bar{S}^{t+1}, \bar{D}_T, \bar{Y}_T, \bar{\theta}) \cdots \\ & \quad \pi(S_1 | \bar{S}^2, \bar{D}_T, \bar{Y}_T, \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (A6)$$

そこで、左辺の分布から \bar{S}_T をサンプリングするためには、まず右辺第1項 $\pi(S_T | \bar{D}_T, \bar{Y}_T, \bar{\theta})$ から S_T をサンプリングし、そこでサンプリングされた S_T の値を条件として、右辺第2項 $\pi(S_{T-1} | S_T, \bar{D}_T, \bar{Y}_T, \bar{\theta})$ から S_{T-1} をサンプリングするといったように、時間と逆方向に S_1 まで順々に右辺の各項からサンプリングすればよい。

右辺の各項は次のように表すことができる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} & \pi(S_t = l | S^{t+1}, \bar{D}_T, \bar{Y}_T, \bar{\theta}) \\ &= \frac{\pi(S_t = l | \bar{Y}_t, \bar{D}_T, \bar{\theta}) \pi(S_{t+1} | S_t = l, \bar{p})}{\sum_{j=0}^1 \pi(S_t = j | \bar{Y}_t, \bar{D}_T, \bar{\theta}) \pi(S_{t+1} | S_t = j, \bar{p})}, \quad l = 0, 1 \end{aligned} \quad (A7)$$

ただし、 $\bar{Y}_t = [y_1, y_2, \dots, y_t]'$ 。

この式の右辺の第2項は遷移確率(4)式である。右辺の第1項は、定常確率

$$\pi(S_0 = 1 | \bar{Y}_0, \bar{D}_T, \bar{\theta}) = \pi(S_0 = 1 | \bar{p}) = \frac{1 - p_{00}}{2 - p_{00} - p_{11}} \quad (A8)$$

$$\pi(S_0 = 0 | \bar{Y}_0, \bar{D}_T, \bar{\theta}) = \pi(S_0 = 0 | \bar{p}) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{00} - p_{11}} \quad (A9)$$

からスタートして、 $t=T$ まで、時間の順にHamilton(1989)で提案されているフィルターを実行することで導出できる¹¹⁾。

そこで、(A6)から \bar{S}_T をサンプリングするためには、以下の2つのステップを行えばよい。

(i) まず、定常確率(A8)、(A9)からスタートして、 $t=1$ から $t=T$ まで時間の順にHamilton(1989)のフィルターを実行し、 $\pi(S_t | \bar{Y}_t, \bar{D}_T, \bar{\theta})$ ($t=1, \dots, T$)を計算する。

(ii) 次に、(i)で最後に計算される $\pi(S_T | \bar{Y}_T, \bar{D}_T, \bar{\theta})$ を使って S_T をサンプリングする。具体的には、確率 $\pi(S_T=1 | \bar{Y}_T, \bar{D}_T, \bar{\theta})$ で $S_T=1$ をサンプリングし、残りの確率で $S_T=0$ をサンプリングする。さらに、そこでサンプリングされた S_T を使って次の確率を計算する。

$$\begin{aligned} & \pi(S_{T-1} = 1 | S_T, \bar{D}_T, \bar{Y}_T, \bar{\theta}) \\ &= \frac{\pi(S_{T-1} = 1 | \bar{Y}_{T-1}, \bar{D}_T, \bar{\theta}) \pi(S_T | S_{T-1} = 1, \bar{p})}{\sum_{j=0}^1 \pi(S_{T-1} = j | \bar{Y}_{T-1}, \bar{D}_T, \bar{\theta}) \pi(S_T | S_{T-1} = j, \bar{p})} \end{aligned} \quad (A10)$$

ただし、右辺の $\pi(S_{T-1}=1 | \bar{Y}_{T-1}, \bar{D}_T, \bar{\theta})$ は(i)でHamilton(1989)フィルターによって計算され、 $\pi(S_T | S_{T-1}=1, \bar{p})$ は推移確率(4)である。この確率で $S_{T-1}=1$ をサンプリングし、残りの確率で $S_{T-1}=0$ をサンプリングする。これを時間と逆方向に $t=1$ まで繰り返せばよい。

ステップ5. \tilde{D}_T のサンプリングはステップ4の手順と同様,

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{D}_T | \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \\ = \pi(D_T | \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \cdots \pi(D_t | \tilde{D}^{t+1}, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \cdots \\ \pi(D_1 | \tilde{D}^2, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}). \end{aligned} \quad (A11)$$

の右辺の各項からのサンプリングを時間と逆方向に行えばよい。ただし、 D_1 と D_T はそれぞれ0 と n に固定されているので、サンプリングするのは (D_2, \dots, D_{T-1}) である。これは以下の2つのステップにより行える。

(i) まず、 $D_1=0$ からスタートして、 $t=2, \dots, T-1$ の順に Hamilton(1989) のフィルターを実行することにより、 $\pi(D_t | \tilde{Y}_t, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})$ ($t=2, \dots, T-1$) を計算する。

(ii) 次に、(i) の最後に計算された $\pi(D_{T-1} | \tilde{Y}_{T-1}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})$ を用いて、次の確率を計算する。

$$\begin{aligned} \pi(D_{T-1} = n | D_T = n, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \\ = \frac{\pi(D_{T-1} = n | \tilde{Y}_{T-1}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta}) \pi(D_T = n | D_{T-1} = n, \tilde{q})}{\sum_{j=n-1}^n \pi(D_{T-1} = j | \tilde{Y}_{T-1}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta}) \pi(D_T = n | D_{T-1} = j, \tilde{q})} \end{aligned} \quad (A12)$$

ただし、右辺の $\pi(D_{T-1} = n | \tilde{Y}_{T-1}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})$ は(i) で Hamilton(1989) フィルターによって計算され、 $\pi(D_T = n | D_{T-1} = n, \tilde{q})$ は遷移確率(10)である。この確率で $D_{T-1} = n$ をサンプリングし、残りの確率で $D_{T-1} = n-1$ をサンプリングする。そこでサンプリングされた D_{T-1} と上記ステップ(i)で計算された $\pi(D_{T-2} | \tilde{Y}_{T-2}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})$ を用いて、次の確率を計算する。

$$\begin{aligned} \pi(D_{T-2} = D_{T-1} | \tilde{D}^{T-1}, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \\ = \frac{\pi(D_{T-2} = D_{T-1} | \tilde{Y}_{T-2}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta}) \pi(D_{T-1} | D_{T-2} = D_{T-1}, \tilde{q})}{\sum_{j=D_{T-1}-1}^{D_{T-1}} \pi(D_{T-2} = j | \tilde{Y}_{T-2}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta}) \pi(D_{T-1} | D_{T-2} = j, \tilde{q})} \end{aligned} \quad (A13)$$

この確率で $D_{T-2} = D_{T-1}$ をサンプリングし、残りの確率で $D_{T-2} = D_{T-1} - 1$ をサンプリングする。これを時間と逆方向に $t=2$ まで繰り返す。

ステップ6. 遷移確率 $\tilde{p} = [p_{00}, p_{11}]'$ の事前分布には次のような互いに独立なベータ分布を仮定する。
 $p_{00} \sim \text{Beta}(u_{00}, u_{01})$, $p_{11} \sim \text{Beta}(u_{11}, u_{10})$ (A14)
 ベータ分布を用いることにより、 p_{00}, p_{11} は必ず0から1までの値になる。

この事前分布の下では、全条件付事後分布はやはり次のような互いに独立なベータ分布になる。

$$\begin{aligned} p_{00} | \tilde{S}_T \sim \text{Beta}(u_{00} + n_{00}, u_{01} + n_{01}) \\ p_{11} | \tilde{S}_T \sim \text{Beta}(u_{11} + n_{11}, u_{10} + n_{10}) \end{aligned} \quad (A15)$$

ただし、 n_{00} は条件の \tilde{S}_T の中で $S_t=0$ かつ $S_{t+1}=0$ であった t の個数、 n_{01} は $S_t=0$ かつ $S_{t+1}=1$ であった t の個数であり、 n_{11}, n_{10} も同様である。これらはステップ4でサンプリングした \tilde{S}_T から得ることができる。

ステップ7. $\tilde{q} = [q_{00}, \dots, q_{n-1, n-1}]'$ の事前分布にも

次のような互いに独立なベータ分布を仮定する。

$$q_{ii} \sim \text{Beta}(r_{ii}, r_{i, i+1}), \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (A16)$$

そうすると、全条件付事後分布はやはり次のような互いに独立なベータ分布になる。

$$q_{ii} | \tilde{D}_T \sim \text{Beta}(r_{ii} + m_{ii}, r_{i, i+1} + 1), \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (A17)$$

ただし、 m_{ii} は条件の \tilde{D}_T の中で $D_t=i$ かつ $D_{t+1}=i$ であった t の個数であり、これらはステップ5でサンプリングした \tilde{D}_T から得ることができる。

補論B：周辺尤度の計算方法

周辺尤度の計算方法には、いくつかの方法が提案されているが、本稿では、Geweke(1999)によって提案された修正調和平均推定量(modified harmonic mean estimator)を潜在変数を含むモデルに適用できるように改良している。以下、この方法について説明する。なお、以下では、周辺尤度 $\pi(\tilde{Y}_T | M_k)$ の条件 M_k は省略する。

$g(\tilde{\theta})$ を任意の確率密度関数であるとする。本稿では、確率関数や確率密度関数をすべて $\pi(\cdot)$ で表しているが、事前分布 $\pi(\tilde{\theta})$ と区別するために、こゝだけ $g(\tilde{\theta})$ を用いる。確率密度関数なので $\int g(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 1$ を満たす。

以下の計算から、同時事後密度関数 $\pi(\tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta} | \tilde{Y}_T)$ の下での $g(\tilde{\theta}) / [\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta}) \pi(\tilde{\theta})]$ の期待値が周辺尤度 $\pi(\tilde{Y}_T)$ の逆数に等しいことがわかる。

$$\begin{aligned} E \left[\frac{g(\tilde{\theta})}{\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta}) \pi(\tilde{\theta})} \right] \\ = \iiint \frac{g(\tilde{\theta})}{\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta}) \pi(\tilde{\theta})} \\ \pi(\tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta} | \tilde{Y}_T) d\tilde{S}_T d\tilde{D}_T d\tilde{\theta} \\ = \iiint \frac{g(\tilde{\theta})}{\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta}) \pi(\tilde{\theta})} \\ \frac{\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta}) \pi(\tilde{S}_T, \tilde{D}_T | \tilde{\theta}) \pi(\tilde{\theta})}{\pi(\tilde{Y}_T)} d\tilde{S}_T d\tilde{D}_T d\tilde{\theta} \\ = \frac{1}{\pi(\tilde{Y}_T)} \int g(\tilde{\theta}) \left[\iint \pi(\tilde{S}_T, \tilde{D}_T | \tilde{\theta}) d\tilde{S}_T d\tilde{D}_T \right] d\tilde{\theta} \\ = \frac{1}{\pi(\tilde{Y}_T)} \int g(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} \\ = \frac{1}{\pi(\tilde{Y}_T)} \end{aligned} \quad (B1)$$

したがって、周辺尤度は、ギブス・サンプラーによって同時事後密度関数 $\pi(\tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta} | \tilde{Y}_T)$ からサンプリングした $(\tilde{S}_T^{(i)}, \tilde{D}_T^{(i)}, \tilde{\theta}^{(i)})$ ($i=1, \dots, N$) を用いて以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{Y}_T) &= \left[E \left[\frac{g(\tilde{\theta})}{\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta}) \pi(\tilde{\theta})} \right] \right]^{-1} \\ &\approx \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(\tilde{\theta}^{(i)})}{\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{S}_T^{(i)}, \tilde{D}_T^{(i)}, \tilde{\theta}^{(i)}) \pi(\tilde{\theta}^{(i)})} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (B2)$$

Newton and Raftery(1994)は、 $g(\bar{\theta})$ を $\bar{\theta}$ の事前分布 $\pi(\bar{\theta})$ とすることを提案している。そうすると、(B2)式は以下のように簡単になる。

$$\pi(\bar{Y}_T) \approx \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\pi(\bar{Y}_T | \bar{S}_T^{(i)}, \bar{D}_T^{(i)}, \bar{\theta}^{(i)})} \right]^{-1} \quad (\text{B3})$$

これは、周辺尤度の調平均推定量(harmonic mean estimator)と呼ばれる。しかし、(B3)式右辺の $\pi(\bar{Y}_T | \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{\theta})$ は値がほぼ0になることがあり、そうすると、(B3)式右辺の括弧の中は発散してしまう。

そこで、Geweke(1999)は、 $g(\bar{\theta})$ に以下のような切断正規分布を用いることを提案した。

$$g(\bar{\theta}) = \tau^{-1} (2\pi)^{-k/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\bar{\theta} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{\theta} - \mu) \right] \times I \left[(\bar{\theta} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{\theta} - \mu) \leq F_{k,2}^{-1}(\tau) \right] \quad (\text{B4})$$

ここで、 k は推定するパラメータの数、 τ は切断する範囲を決める0から1までの定数、 $F_{k,2}^{-1}(\tau)$ は自由度 k の χ^2 分布の累積分布関数の逆関数である。また、 μ と Σ は、それぞれ、ギブス・サンプラーによって事後密度関数 $\pi(\bar{\theta} | \bar{Y}_T)$ からサンプリングした $\bar{\theta}^{(i)}$ ($i=1, \dots, N$)の標本平均と分散共分散行列である。 $I[\cdot]$ は括弧の中の不等式が満たされれば1、そうでなければ0となる指示関数である。

これは、周辺尤度の修正調平均推定量(modified harmonic mean estimator)と呼ばれる。この推定量では、 $\bar{\theta}^{(i)}$ に極端な値がサンプリングされ、(B2)式右辺の $\pi(\bar{Y}_T | \bar{S}_T^{(i)}, \bar{D}_T^{(i)}, \bar{\theta}^{(i)})$ の値がほぼ0になったとしても、同時に分子の $g(\bar{\theta}^{(i)})$ を0にすることにより、(B2)式右辺の括弧の中の値が発散するのを防ぐことができる。

本稿では、修正調平均推定量(B2)、(B4)式を用いて周辺尤度を計算している。 τ の値は0.90とした。 \bar{S}_T, \bar{D}_T が与えられると、(2')式と(8)、(9)式から μ_t ($t=1, \dots, T$)が定まるので、例えば、構造変化によって平均成長率のみが変化するMSモデルの場合、(B2)式右辺の $\pi(\bar{Y}_T | \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{\theta})$ は以下の式により簡単に計算できる。

$$\begin{aligned} & \ln(\pi(\bar{Y}_T | \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{\theta})) \\ &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(\sigma^2) + \frac{1}{2} \ln(1 - \phi^2) \\ & \quad - \frac{(y_1 - \mu_1)^2}{2\sigma^2 / (1 - \phi^2)} \\ & \quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T [y_t - \mu_t - \phi(y_{t-1} - \mu_{t-1})]^2 \quad (\text{B5}) \end{aligned}$$

また、(B2)式右辺の事前密度 $\pi(\bar{\theta})$ は以下のように計算した。本稿では、事前密度において $\bar{m}, \bar{\phi}, \sigma^2, \bar{p}, \bar{q}$ は互いに独立であると仮定しているため、以下のように、同時事前密度 $\pi(\bar{\theta})$ はそれぞれのパラメータの事前密度の積になる。

$$\pi(\bar{\theta}) = \pi(\bar{m}) \pi(\phi) \pi(\sigma^2) \pi(\bar{p}) \pi(\bar{q}) \quad (\text{B6})$$

さらに、本稿の分析では、補論Aで説明したように、右辺のそれぞれのパラメータの事前分布に切断正規分布、逆ガンマ分布、ベータ分布といったよく知られた分布を仮定しているため、(B2)式の右辺の各事後密度の計算は容易である。ただし、切断正規分布の密度は、それを切断後に残した領域で積分したものが1になるように、切断する前の正規分布の密度に基準化定数を掛ける必要がある。ここでは、 ϕ の基準化定数は解析的に求め、 \bar{m} の基準化定数は、切断前の事前分布から1,000回のシミュレーションを行い、1,000÷指示関数の括弧内の制約を満たした回数として求めた。

周辺尤度の計算方法としてもう一つよく用いられる方法に、Chib(1995)によって提案された方法がある。この方法でも周辺尤度を計算したが、値はほとんど変わらなかった。

(一橋大学経済研究所)

注

* 本研究は、一橋大学グローバルCOEプログラム「社会科学の高度統計・実証分析拠点構築」から助成を受けている。また、一橋大学経済研究所定例研究会の参加者および討論者の浅子和美教授から貴重なコメントを頂いた。記して感謝したい。本稿に残された誤りがあれば、すべて筆者の責任である。

1) μ_t だけでなく、 ϕ や σ^2 の値も景気拡張期と後退期とで異なるモデルに拡張することは可能である。また、本稿では、ラグ次数を1とし、誤差項 ε_t の分布に正規分布を仮定しているが、ラグ次数を2以上にするこや、 ε_t の分布を正規分布以外の分布にすることも可能である。

2) ここでは、景気には拡張期と後退期の2状態しかないものと仮定するが、3状態以上ある場合への拡張も可能である。

3) 詳しくは、大森(2001)の7節を参照されたい。

4) 他の方法については、小西・越智・大森(2008)の12.1節を参照されたい。

5) ただし、平均に差がないことは収束の必要条件であって十分条件ではない。

6) Shephard and Pitt(1997)を参照されたい。

7) ベイズ統計学では「信頼区間」ではなく、「信用区間」という言葉を用いることが多い。鈴木(1978)参照。

8) ϕ の全条件付事後分布の導出では、尤度 $\pi(y_1, \dots, y_T | \bar{\theta})$ を $\pi(y_2, \dots, y_T | y_1, \bar{\theta})$ で近似した。厳密な尤度 $\pi(y_1, \dots, y_T | \bar{\theta})$ を用いると、 ϕ の全条件付事後分布は切断正規分布にならない。詳しくは、Chib and Greenberg(1994)を参照されたい。

9) 詳しくは、Kim and Nelson(1999b)のSection 9.1.1を参照されたい。同様の方法は、Chib(1998)でも提案されている。

10) 詳細は、Chib(1998, p 83)やKim and Nelson(1999b)のp 213を参照されたい。

11) Hamilton(1989)のフィルターについては、Kim and Nelson(1999b)のSection 4.2.2も参照されたい。

参考文献

- 小西貞則・越智義道・大森裕浩(2008)『計算統計学の方法——ブートストラップ・EM アルゴリズム・MCMC』朝倉書店。
- 中妻照雄(2007)『入門ベイズ統計学』朝倉書店。
- 大森裕浩(2001)「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」『日本統計学会誌』第31巻第3号, pp. 305-344.
- 鈴木雪夫(1978)『統計解析』筑摩書房。
- 和合肇編著(2005)『ベイズ計量経済分析 モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社。
- 渡部敏明・飯星博邦(2007)「景気循環の構造変化と景気転換点」浅子和美・宮川努編『日本経済の構造変化と景気循環』第5章, pp. 88-107, 東京大学出版会。
- Chib, S. (1995) "Marginal Likelihood from the Gibbs Output," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 90, No. 432, pp. 1313-1321.
- Chib, S. (1998) "Estimation and Comparison of Multiple Change-Point Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 86, No. 2, pp. 221-241.
- Chib, S. and Greenberg, E. (1994) "Bayes Inference via Gibbs Sampling in Regression Models with ARMA (p, q) Errors," *Journal of Econometrics*, Vol. 64, No. 1, pp. 183-206.
- Fukuda, S. and Onodera, T. (2001) "A New Composite Index of Coincident Economic Indicators in Japan: How Can We Improve Forecast Performances?" *International Journal of Forecasting*, Vol. 17, No. 3, pp. 483-498.
- Garcia, R. (1998) "Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models," *International Economic Review*, Vol. 39, No. 3, pp. 763-788.
- Geweke, J. (1992) "Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith (eds.) *Bayesian Statistics*, Vol. 4, pp. 169-193, Oxford University Press, Oxford.
- Geweke, J. (1999) "Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Developments, and Communications," *Econometric Reviews*, Vol. 18, No. 1, pp. 1-127.
- Hamilton, J. D. (1989) "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and Business Cycle," *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, pp. 357-384.
- Hansen, B. E. (1992) "The Likelihood Ratio Test under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching Model of GNP," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 7, pp. S61-S82.
- Kim, C.-J. and Nelson, C. R. (1998) "Business Cycle Turning Points, a New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model with Regime Switching," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 80, No. 2, pp. 188-201.
- Kim, C.-J. and Nelson, C. R. (1999a) "Has the U.S. Economy Become More Stable? A Bayesian Approach Based on a Markov-Switching Model of the Business Cycle," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 81, No. 4, pp. 608-616.
- Kim, C.-J. and Nelson, C.R. (1999b) *State-Space Models with Regime Switching*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Newton, M. A. and Raftery, A. E. (1994) "Approximate Bayesian Inference with the Weighted Likelihood Bootstrap," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 56, No. 1, pp. 3-48.
- Shephard, N. and Pitt, M. K. (1997) "Likelihood Analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series," *Biometrika*, Vol. 84, No. 3, pp. 653-667.
- Watanabe, T. (2003) "Measuring Business Cycle Turning Points in Japan with a Dynamic Markov Switching Factor Model," *Monetary and Economic Studies*, Vol. 21, No. 1, pp. 35-68.