【調 杳】

Realized Volatility

――サーベイと日本の株式市場への応用*――

渡 部 敏 明

資産価格の高頻度データが利用可能になるにつれ、日中リターンの2乗を足し合わせた Realized Volatility(RV)がボラティリティの精度の高い推定量として注目を集めるようになってきている。本稿は、こうした RV に関する研究についてサーベイを行ったものである。RV の変動を表す時系列モデルには ARFIMA(X)モデル、HAR モデル、UC モデルなどが提案されており、本稿ではそうしたモデルについても解説を行っている。また、日経 225 株価指数の日次 RV を計算し、それにそうした時系列モデルを当てはめた場合と、従来のように、日次リターンに ARCH 型モデルを当てはめた場合とで、ボラティリティの予測精度の比較を行っている。さらに、最近の RV の研究はさまざまな方向に発展が見られるので、そうした新たな発展についてもサーベイを行い、今後の研究課題を探っている。

1. はじめに

資産価格変化率(以後、リターンと呼ぶ)の分散もしくは標準偏差を表すボラティリティは、オプション価格や Value-at-Risk (VaR)を決定する重要な要因であるため、ファイナンスの理論、実務両方で重要な変数である。しかし、ボラティリティは真の値を観測することができないため、リターンのデータから何らかの方法で推定する必要がある。古くは、ボラティリティをある期間一定であると仮定することにより、その間のリターンの標本分散もしくは標準偏差として推定していた。

その後、ボラティリティは日々確率的に変動するという考えが主流になり、ボラティリティの変動を明示的に定式化する時系列モデルであるボラティリティ変動モデルが提案され、ボラティリティの推定にそうしたモデルが用いられるようになった。ボラティリティ変動モデルの代表的なものに、Engle(1982)のARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)モデル、Bollerslev(1986)のGARCH (Generalized ARCH)モデル、およびそれらを拡張したモデルがある(本稿ではそうしたモデルを総称してARCH 型モデルと呼ぶ)。また、

確率的ボラティリティ変動(Stochastic Volatility)モデルと呼ばれる別のモデルもある¹゚. このようにボラティリティ変動モデルには数多くのモデルがあり、どのモデルを用いるかによってボラティリティの推定値が異なる。

そこで、近年、モデルに依存しないボラティリティの推定量として Realized Volatility(RV)に注目が集まっている。これは日中リターンの2乗を足し合わせたもので、資産価格の高頻度データが利用可能になったことにより、盛んに研究が行われるようになった。本稿は、こうした RV に関するこれまでの研究についてサーベイを行ったものである。

RVの計算にはモデルは必要ないが、それを用いて例えば将来のボラティリティの予測を行う場合には、RVの変動を表す時系列モデルが必要になる。ボラティリティは一度上昇(下落)するとしばらくボラティリティの高い(低い)期間が続くことが知られており、こうした現象はボラティリティ・クラスタリングと呼ばれ、あらゆる資産市場で観測される。特にRVに関しては長期記憶過程に従うという結果が数多く得られており、そこでその変動を表すモデルとしてよく用いられるのはARFIMA(Autoregressive Fractionally Integrated Moving

Average)モデルである。それ以外に、Corsi (2004) が HAR (Heterogeneous Interval Autoregressive) モデル、Barndorff-Nielsen and Shephard(2001, 2002b)がUC(Unobserved Components)モデルを提案している. また、株式市場では株価が上がった日の翌日よ りも株価が下がった日の翌日の方がボラティリ ティがより上昇する傾向があることが知られて おり、Giot and Laurent (2004)、渡部・佐々木 (2006), Watanabe and Yamaguchi(2007)で は、こうしたボラティリティ変動の非対称性を 考慮してARFIMAモデルを拡張したAR-FIMAX モデルを用いている。本稿では、こう した RV の変動を表すモデルについても解説 を行っている。また、実際に日経225株価指数 のRVを計算し、それにそうした時系列モデル を当てはめた場合と、従来のように、日次リタ ーンに ARCH 型モデルを当てはめた場合とで, ボラティリティの予測精度の比較を行っている.

さらに、最近の RV の研究はさまざまな方向 に発展が見られるので、そうした新たな発展に ついてもサーベイを行い、今後の研究課題を探っている.

本稿の構成は以下の通りである。まず、次の第2節で、RVについて解説を行う。続く第3節で、RVの変動を表す時系列モデルについて解説する。第4節では、RVのモデルとの比較のために用いるARCH型モデルについて解説する。第5節で、日経225株価指数の日次RVを計算し、各モデルの推定およびボラティリティの予測を行う。第6節では、RVに関するより進んだ研究についてサーベイを行い、第7節でRVの研究の今後の課題を探る。

2. Realized Volatility

2.1 Integrated Volatility ∠ Realized Volatility

まず最初に、資産価格の連続時間モデルを用いてボラティリティの定義を行う。資産価格の対数値 p(s) が拡散過程(diffusion process)

 $dp(s) = \mu(s) ds + \sigma(s) dW(s)$ (1) に従っているものとする。ここで、W(s) はウ イナー過程である。また、 $\mu(s)$ 、 $\sigma^2(s)$ はそれ ぞれ瞬時的なドリフト、ボラティリティと呼ばれる。ファイナンス理論では、 $\sigma(s)$ をボラティリティと呼ぶことが多いが、本稿では $\sigma^2(s)$ をボラティリティと呼ぶことにする。

このとき、第 t-1 日の最終時点を t-1、第 t 日の最終時点を t とすると、第 t 日の真の日次ボラティリティは、

$$\sigma_t^2 = \int_{t-1}^t \sigma^2(s) \, ds \tag{2}$$

と定義され、これは瞬間的なボラティリティ $\sigma^2(s)$ を積分したものなので、Integrated Volatility とも呼ばれる。真のボラティリティは観測できないので、その値が必要な場合には、リターンのデータから推定しなければならない。真のボラティリティの精度の高い推定量として、近年、注目を集めているのが、Realized Volatility(RV)である。

いま,第t日の日中のn個のリターン・データ $\{r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n}, \cdots, r_t\}$ が与えられているものとする。このとき,それらを2乗して足し合わせた

$$RV_{t} = \sum_{i=1}^{n} r_{t-1+i/n}^{2}$$
 (3)

を第t日のRVという。(3)式で定義される RV_t は、 $n\to\infty$ とすると、(2)式で定義される 真のボラティリティ σ_t^2 に確率収束するので、nが十分大きいなら、 RV_t は σ_t^2 の精度の高い推定量となる。

2.2 Realized Volatility の計算上の問題点2.1.1 マイクロストラクチャー・ノイズ

しかし、実際の高頻度データを用いて RV を計算する際には、いくつかの問題が生じる。まず、高頻度の資産価格はマイクロストラクチャー・ノイズを含むことである。マイクロストラクチャー・ノイズとは市場のミクロ構造に起因するノイズのことで、代表的なものに bid-ask bounce がある。これは、取引は bid で成立したり ask で成立するために、取引価格が真の価格から乖離し、リターンに負の自己相関が生じるというものである(詳しくは、Campbell、Lo

and MacKinlay 1997 の Chapter 3 を参照). いま,観測される対数価格を $\tilde{\rho}(s)$,(1)式に従う真の対数価格を p(s),マイクロストラクチャー・ノイズを $\eta(s)$ とし,

 $\tilde{p}(s) = p(s) + \eta(s), \eta(s) \sim WN(0, \sigma_{\eta}^2)$ (4) であるとする。ここで,簡単化のため,マイクロストラクチャー・ノイズ $\eta(s)$ は平均 0,分散 σ_{η}^2 のホワイトノイズであり,(1)式の dW (s) と無相関であるものとする²⁾.

このとき、(4)式を $t-\Delta$ から t までのリターンに直し、分散を計算すると以下のように表せる。

$$Var(\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(t-\Delta)) = Var(p(t) - p(t-\Delta)) + Var(\eta(t) - \eta(t-\Delta)).$$
 (5) ここで,(1)式より,右辺の第1項は,

$$Var(p(t)-p(t-\Delta)) = \int_{t-\Delta}^{t} \sigma^{2}(s) ds$$
 (6) となり、これは、時間間隔 Δ を小さくすると、0 に近づいていく。それに対して、(5)式の右辺第 2 項は、

$$Var(\eta(t) - \eta(t - \Delta)) = 2\sigma_{\eta}^{2}$$
 (7) となり、 Δ に依存せず、一定である。

したがって、△を小さくすると、真のリターンの分散に比べてマイクロストラクチャー・ノイズの分散が相対的に大きくなってしまう。そこで、もしマイクロストラクチャー・ノイズがなければ、RVの計算には可能な限り時間間隔の短い日中リターンを用いるのが望ましいが、マイクロストラクチャー・ノイズがある場合には、時間間隔を短くするとRVに占めるマイクロストラクチャー・ノイズのウエイトが大きくなってしまうため、ティックデータ(値がつくたびのデータ)があったとしても、例えば5分ごとのリターンを用いることが多い。

また、マイクロストラクチャー・ノイズを軽減する方法として、異なる時間間隔を用いて複数の RV を計算し組み合わせる方法(Zhang, Mykland and Aït-Sahalia 2005, Zhang 2006), カーネル推定量(Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde and Shephard 2006)などが提案されている。さらに、マイクロストラクチャー・ノイズを考慮した最適な時間間隔 Δ の選択方法も

提案されている(Aït-Sahalia, Mykland and Zhang 2005, Bandi and Russell 2006)³⁾.

2.2.2 夜間や昼休みのリターンの取り扱い

もう一つの問題は、夜間や昼休みなど取引がない時間のリターンの取り扱いである。第t日のボラティリティをt-1日の終値からt日の終値までのボラティリティと定義すると、t-1日の終値からt日の始値までの間も考慮に入れなければならないが、その間は取引がないので、短い時間間隔のリターンを計算することができない。また、日本の株式市場では昼休みがあるので、その間も同様である。夜間や昼休みのリターンの2乗は時間間隔が長いので、そのまま2乗して加えると、その間の(1)式の $dW^2(s)$ が消えずに残ってしまう。

そこで、Hansen and Lunde (2005a) は、以下のように最初に昼休みと夜間を除いて計算したRV(以下、これを $RV_t^{(o)}$ と表す)に日次リターンの標本分散と $RV_t^{(o)}$ の標本平均の比を掛けるという方法を提案している。

$$RV_t = cRV_t^{(o)}, c = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_t - \bar{R})^2}{\sum_{t=1}^{T} RV_t^{(o)}}.$$
 (8)

ここで、Rは日次リターンの標本平均を表す。この方法を用いると、RVの標本平均と日次リターンの標本分散が等しくなる。厳密に言うと、cは t-1 営業日と t 営業日の間の休みの日数に応じて調整すべきであるが、Hansen and Lunde(2005a)は一定と仮定しており、簡単化のため、本稿でも以下それに従う 4 .

他に、 RV_t を $RV_t^{(o)}$ 、夜間のリターンの2乗、昼休みがある場合は昼休みのリターンの2乗の加重平均とし、最適なウエイトを求めるという方法も提案されている(Hansen and Lunde 2005b)。

3. Realized Volatility の変動の定式化

3.1 ボラティリティの長期記憶性とAR-FIMA モデル

RV の変動の特徴としてよく知られているのは、長期記憶(long-memory)過程に従っているということである(Andersen, Bollerslev, Diebold and Ebens 2001, Andersen, Bollers-

lev, Diebold and Labys 2003)。 ある変数の k 次の自己相関係数を $\rho(k)$ とすると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty \tag{9}$$

となるとき、この変数は短期記憶(short memory)過程に従うといい、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| = \infty \tag{10}$$

となるとき、この変数は長期記憶(long memory)過程に従うという。

長期記憶過程を表すモデルとしてよく用いられるのは、ARFIMA (Autogregressive Fractionally Integrated Moving Average) モデルである 50 . ARFIMA (p,d,q) モデルは以下のように表される.

$$\Phi(L) (1-L)^{d} (y_{t} - \mu) = \Theta(L) u_{t},$$

$$u_{t} \sim WN(0, \sigma_{u}^{2}).$$
(11)

ここで、 $WN(0, \sigma^2)$ は平均 0,分散 σ^2 のホワイトノイズを表す。また,L はラグオペレータを表し, $L^i y_t = y_{t-i} (i=0,1,\cdots)$ である。 $\Phi(L)$, $\Theta(L)$ はそれぞれ以下のようなラグ多項式を表す。

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p,$$

$$\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q.$$

ただし、 $\Phi(L)=0$ 、 $\Theta(L)=0$ の根の絶対値はすべて 1 より大きいものと仮定する。

ここで、最も重要なパラメータはdである。d=0とすると、(11)式は、

$$\Phi(L)(y_t - \mu) = \Theta(L)u_t \qquad (12)$$

となり、これは定常な ARMA(p,q) モデルである。また、d=1 とすると、(11)式は、

$$\Phi(L)(1-L)(y_t-\mu) = \Theta(L)u_t$$
 (13)
となり、これは単位根を持ち非定常な ARIMA $(p,1,q)$ モデルである。

ARFIMA モデルでは、d の値として、0 と 1 だけでなく、その間のすべての実数値を取り得るものとする 6 . d>0 であれば、 y_t は長期記憶過程に従う。また、 y_t は d<0.5 であれば定常であり、 $d\geq0.5$ であれば非定常である 7 .

(11)式の $(1-L)^d$ は L=0 で テーラー展開すると次のように表すことができる.

 $(1-L)^{d}$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!}(-L)^{k}.$$
(14)

先行研究では、 y_t に RV_t そのもの、 RV_t の 平方根 $\sqrt{RV_t}$ 、 RV_t の対数値 $\ln(RV_t)$ を用いているものがそれぞれあるが、本稿の以下の分析では $y_t = \ln(RV_t)$ として分析を行っている。 $y_t = \ln(RV_t)$ とした ARFIMA モデルを、以下、 $\ln RV$ -ARFIMA モデルと呼ぶ。また、ARFIMA モデルの推定法には、最尤法(Sowell 1992)、近似最尤法(Beran 1995)、2 段階推定法(Geweke and Porter-Hudak 1983、Janacek 1982) などがあるが、以下では近似最尤法を用いている®、 次数 p、q は SIC によって選択を行っている。

3.2 HAR モデル

Corsi(2004)は、RV の変動を表すモデルとして、より簡単な HAR (Heterogeneous Interval Autoregressive)モデルを提案している。このモデルでは、市場には短期の投資を行っている投資家や長期の投資を行っている投資家など、異なる期間で投資を行っている投資家がいるので、ボラティリティは過去の期間の異なるボラティリティに依存すると考える。Corsi(2004)は、具体的には、過去の日次、週次、月次のボラティリティに依存するものと仮定した次のような RV-HAR(3)モデルを提案した。

$$RV_{t} = \beta_{0} + \beta_{1}RV_{t-1} + \beta_{2}RV_{t-1}^{(w)} + \beta_{3}RV_{t-1}^{(m)} + v_{t}, v_{t} \sim WN(0, \sigma_{v}^{2}).$$
(15)

ここで、 RV_t 、 RV_{t-1} は、これまで同様、第 t日、第 t-1日の日次 RVを表す。また、 $RV_{t-1}^{(w)}$ 、 $RV_{t-1}^{(w)}$ はそれぞれ第 t-1日の週次、月次 RV を表し、以下のように定義する。

$$RV_{t-1}^{(w)} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} RV_{t-i}, RV_{t-1}^{(m)} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} RV_{t-i}.$$
(16)

このモデルは長期記憶モデルではないが、次数 20 と長い次数の AR モデルになっている。 こうした長い次数を β_0 、 β_1 、 β_2 という少ないパラメータで表現しているのが HAR モデルの特徴である。また、パラメータ β_0 、 β_1 、 β_2 は最小 2乗法で、 σ_v^2 は残差分散として簡単に推定できる。

Corsi(2004) はスイスフランの対ドルレートを用いて、このモデルによるボラティリティの予測精度が高いことを示している。このモデルを用いているものは、他に、Andersen、Bollerslev and Diebold(2003)、Corsi、Kretschmer、Mittnik and Pigorsch(2005)、Liu and Maheu(2006)、Watanabe and Yamaguchi(2007) などがある。

本稿の以下の分析では、ARFIMA モデル同様、RV そのものではなく、RV の対数値を定式化する.

 $\ln(RV_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(RV_{t-1}) + \beta_2 \ln(RV_{t-1}^{(\omega)}) + \beta_3 \ln(RV_{t-1}^{(m)}) + v_t, v_t \sim WN(0, \sigma_v^2).$ (17) このモデルを、以下、 $\ln RV$ -HAR(3)モデルと呼ぶ。

3.3 UCモデル

以上のモデルは、日次 RV を直接モデル化するものであったが、Barndorff-Nielsen and Shephard (2001, 2002b)、Barndorff-Nielsen、Nielsen、Shephard and Ysusi (2004) らが提案した UC (Unobserved Components) モデルでは、連続時間モデルからスタートし、そこから日次 RV の時系列モデルを導出している。彼らは、まず、瞬時的なボラティリティ $\sigma^2(s)$ が J 個のファクター $\tau^i(j=1,\cdots,J)$ の和として以下のように表されるものと仮定する。

$$\sigma^{2}(s) = \sum_{i=1}^{J} \tau^{j}(s).$$
 (18)

次に、各ファクター $\tau^{j}(s)$ の連続時間モデルには、自己相関係数が $\rho(\tau_{j}(s),\tau_{j}(s'))$ =exp $(-\lambda_{j}|s-s'|)$ となるように、互いに独立な非がウス OU(Ornstein-Uhlenbeck)過程またはCEV(Constant Elasticity of Variance)過程を想定している。前者は、

 $d\tau^{j}(s) = -\lambda_{j}\tau^{j}(s)ds + dz_{j}(\lambda_{j}s)$ (19) と表される。ここで, $z_{j}(s)$ は増分が非負のレヴィ過程である。後者は,

$$d\tau^{j}(s) = -\lambda_{j}(\tau^{j}(s) - \xi) ds + w\tau(s)^{\eta_{j}/2} dB_{j}(s),$$

$$\eta_{j} \in [1, 2]$$
(20)

と表される。ここで, $B_j(s)$ はウイナー過程である。(19)式の $dz_j(\lambda_j s)$ と(20)式の $dB_j(s)$ はいずれも(1)式の dW(s) と独立であると仮定する。

さらに、彼らは、各ファクター $\tau^{i}(s)$ の無条件の期待値と分散をそれぞれ、以下のように、ボラティリティ $\sigma^{2}(s)$ の無条件の平均と分散の w_{i} 倍($\Sigma_{i=1}^{f}w_{i}=1$)であると仮定する。

$$E(\tau^{j}(s)) = w_{j}\xi, Var(\tau^{j}(s)) = w_{j}w^{2},$$

 $w_{j} > 0, \sum_{i=1}^{J} w_{j} = 1.$ (21)

ここで、 $\xi = E(\sigma^2(s))$ 、 $w^2 = Var(\sigma^2(s))$ である。

そうすると、ファクターjの日次の値 $\tau_t^j \! = \int_{-t}^t \! \tau^j(s) \, ds$

は以下のように ARMA(1,1) モデルとして表すことができる(Meddahi 2003 参照).

$$\tau_t^j = w_j \xi + \phi_j (\tau_{t-1}^j - w_j \xi) + \eta_t^j + \theta_j \eta_{t-1}^j,$$

$$\eta_t^j \sim WN(0, \sigma_j^2).$$
 (22)
$$z = c,$$

$$\phi_{j} = \exp(-\lambda_{j}),$$

$$Var(\tau_{t}^{j}) = \frac{2w_{j}w^{2}}{\lambda_{j}^{2}}(\phi_{j}-1+\lambda_{j})$$

$$Corr(\tau_{t}^{j}, \tau_{t-1}^{j}) = \frac{(1-\phi_{j})^{2}}{2(\phi_{j}-1+\lambda_{j})},$$

$$\rho_{j} = \frac{Corr(\tau_{t}^{j}, \tau_{t-1}^{j}) - \phi_{j}}{1+\phi_{j}^{2}-2\phi_{j}Corr(\tau_{t}^{j}, \tau_{t-1}^{j})},$$

$$\theta_{j} = \frac{1-\sqrt{1-4\rho_{j}^{2}}}{2\rho_{j}},$$

$$\sigma_{j}^{2} = \frac{1+\phi_{j}^{2}-2\phi_{j}Corr(\tau_{t}^{j}, \tau_{t-1}^{j})}{1+\theta_{j}^{2}}Var(\tau_{t}^{j})$$

また、対数価格が(1)式に従うなら、第t日の日次 RV はその日の真のボラティリティ σ_t^2 (= $\sum_{i=1}^{t} \tau_i^2$)に、RV の計算に用いる日中リターンの時間間隔が0でないことによる誤差(以下、離散化誤差と呼ぶ) u_t の和として以下のように表される。

 $RV_t = \sum_{j=1}^{J} \tau_t^J + u_t, u_t \sim WN(0, \sigma_{u,t}^2).$ (23) ただし、離散化誤差 u_t の分散 $\sigma_{u,t}^2$ は以下のように計算される。

$$\sigma_{u,t}^2 = 2n_t \left[(\xi/n_t)^2 + \sum_{i=1}^J \frac{2w^2w_j}{\lambda^2} \{ \exp(-\lambda_j/n_t) \right]$$

$$-1 + \lambda_j/n_t\} \Big]. \tag{24}$$

ここで、 n_t は RV_t を計算するために用いた日中リターンの個数を表す。 n_t が増えると、連続時間モデルに近づくので、離散化誤差 u_t の分散 $\sigma_{u,t}^2$ は小さくなり、 $n_t \rightarrow \infty$ とすると、 $\sigma_{u,t}^2$ 一のとなる。ただし、このモデルではマイクロストラクチャー・ノイズを考えていないことに注意されたい。2.2.1 節で述べたように、マイクロストラクチャー・ノイズが存在する場合は、 $n_t \rightarrow \infty$ としても、 $\sigma_{u,t}^2 \rightarrow 0$ とはならない。

このモデルは線形状態空間モデルとして表すことができる。例えば、J=2 の場合、以下のように表すことができる。

 $RV_t = \xi + (1 \ 0 \ 1 \ 0) \alpha_t + u_t, \ u_t \sim WN(0, \sigma_u^2),$

$$\alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_t + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \theta_1 \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & \theta_2 \sigma_2 \end{pmatrix} v_t,$$
(26)

$$v_t \sim WN\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

ここで、(25)式の右辺の ξ +(1 0 1 0) α_t が真の日次ボラティリティ $\sigma_t^2 = \sum_{j=1}^2 \tau_t^j$ に相当する。

したがって、 u_t 、 v_t の分布を正規分布で近似すると、このモデルはカルマン・フィルターを用いることにより尤度を計算することができるので、パラメータを最尤推定できる 9 . しかし、実際には、 u_t 、 v_t の分布は正規分布ではないので、この方法は疑似最尤推定である。推定するパラメータは、連続時間モデルのパラメータ ξ 、 w^2 、 $\lambda_i(j=1,\cdots,J)$ 、 $w_i(j=1,\cdots,J-1)$ である。以下では、ファクターの数J を SIC によって選択している。

3.4 ボラティリティ変動の非対称性と AR-FIMAX モデル

株式市場では、株価が上がった日の翌日より も下がった日の翌日の方がボラティリティがよ り上昇する傾向があることが知られている(渡 部 2000 2.1.2 節)、こうしたボラティリティ変 動の非対称性を考慮して、Giot and Laurent (2004)、渡部・佐々木(2006)、Watanabe and Yamaguchi(2007)では、ARFIMA モデルを以下のように拡張している。

$$\Phi(L) (1-L)^{d} (\ln RV_{t} - \mu_{0} - \mu_{1} | R_{t-1} |
- \mu_{2} D_{t-1}^{-} | R_{t-1} |) = \Theta(L) u_{t}, u_{t} \sim WN(0, \sigma_{u}^{2}).$$
(27)

ここで、 D_{t-1} は、t-1 期のリターン R_{t-1} が負であれば 1、それ以外であれば 0 をとるダミー変数である。このモデルは、 $R_{t-1}>0$ であれば、 $D_{t-1}=0$ なので、

$$\Phi(L) (1-L)^{d} (\ln RV_{t} - \mu_{0} - \mu_{1} | R_{t-1} |)
= \Theta(L) u_{t}$$

となり、 $R_{t-1}{<}0$ であれば、 $D_{t-1}^-{=}1$ なので、 $\Phi(L) (1-L)^d (\ln RV_t - \mu_0 - (\mu_1 + \mu_2)|R_{t-1}|)$ $= \Theta(L) u_t$

となる。したがって、μ2が正であれば、株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇するというボラティリティ変動の非対称性と整合的になる。以下、このモデルを lnRV-ARFIMAX モデルと呼ぶ。

4. ARCH 型モデル

4.1 ボラティリティ・クラスタリングと ARCH, GARCH モデル

以上の RV のモデルとの比較のために、本稿では日次リターンを用いた ARCH 型モデルの推定も行う。そこで、本節では、本稿で推定を行う ARCH 型モデルについて簡単に説明を行う。以下、ある資産の t 期のリターン R_t を、次のように、t-1 期に 予測 可能な変動 E $(R_t|I_{t-1})$ と予測不可能な変動 ε_t に分割する。

$$R_t = E(R_t | I_{t-1}) + \varepsilon_t$$
. (28) ここで, I_{t-1} は $t-1$ 期に利用可能な情報集合を表す.ボラティリティ変動モデルでは,この予測不可能な変動 ε_t を,正の値をとる σ_t と平均 0,分散 1 のホワイトノイズ z_t との積として表す.

 $\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \sigma_t > 0, z_t \sim WN(0, 1).$ (29) 代表的なボラティリティ変動モデルである ARCH 型モデルでは、t 期のボラティリティ $\sigma_t^2 \varepsilon t - 1$ 期に既に値がわかっている変数だけ の(攪乱項を含まないという意味で)確定的な関数として定式化する。このように定式化すると、 尤度を解析的に求めることができるので、パラメータを(疑似)最尤法によって簡単に推定することができる。そのため、ARCH型モデルは資産価格の実証分析に幅広く用いられており、同時にさまざまな改良が行われている。

既に述べたように、資産価格のボラティリティは一旦上昇(低下)すると、その後しばらくの間ボラティリティの高い(低い)日が続くことが知られている。こうしたボラティリティ・クラスタリングを捉えるために、Engle(1982)は次のような ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデルを提案した 10 .

 $\sigma_t^2 = w + \alpha \varepsilon_{t-1}^2, w > 0, \alpha \geq 0.$ (30) ここで、パラメータに非負制約を課すのは、 σ_t^2 の非負性を保証するためである。

その後、Bollerslev(1986)が、(30)式の右辺に σ_{t-1}^2 を 加 え た GARCH (Generalized ARCH)モデルを提案した¹¹⁾.

 $\sigma_t^2 = w + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$, w > 0, β , $\alpha > 0$. (31) このモデルでも σ_t^2 の非負性を保証するために, パラメータに非負制約を課す.

4.2 ボラティリティ変動の非対称性と GJR, EGARCH, APGARCH モデル

既に述べたように、株式市場では、株価が上がった日の翌日と下がった日の翌日を比べると後者の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られており、こうした前日に株価が上がったか下がったかによるボラティリティ変動の非対称性は ARCH モデルや GARCH モデルでは捉えることができない。ボラティリティ変動の非対称性を考慮したモデルには、Glosten、Jagannathan and Runkle (1993) によって提案された GJR モデル、Nelson (1991) によって提案された GJR モデル、Nelson (1991) によって 提案された EGARCH (Exponential GARCH) モデル、Ding、Granger and Engle (1993) によって 提案 された APGARCH (Asymmetric Power GARCH) モデルなどがある。

GJR モデルでは、以下のように、 ε_{t-1} が負で

あれば 1, それ以外では 0 になるダミー変数 D_{t-1} を用いることによって, ボラティリティ変動の非対称性を捉える 12 .

$$\sigma_t^2 = w + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2,$$

$$w > 0, \ \alpha, \ \beta, \ \gamma \ge 0.$$
 (32)

このモデルでも、 σ_t^2 の値が負にならないように、パラメータに非負制約が必要となる。(32)式は、 $\varepsilon_{t-1}>0$ であれば、 $D_{t-1}^*=0$ なので、

$$\sigma_t^2 = w + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$$

となり、 ε_{t-1} <0 であれば、 D_{t-1}^- =1 なので、 $\sigma_t^2 = w + \beta \sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma) \varepsilon_{t-1}^2$

となる。そこで、 $\gamma>0$ であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

Nelson(1991)の提案したEGARCH モデルでは、ボラティリティ σ^2 ではなく、その対数値 $\ln(\sigma^2)$ の変動を次のように定式化する¹³⁾.

$$\ln(\sigma_t^2) = w + \beta \{\ln(\sigma_{t-1}^2) - w\} + \theta z_{t-1} + \gamma \{|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)\}.$$
(33)

ここで, $E(|z_{t-1}|)$ は $|z_{t-1}|$ の期待値を表す。このモデルは, $\ln(\sigma_t^2)$ を被説明変数としているために,パラメータに非負制約を課す必要がない。また,負の値をとるような変数でも説明変数に加えることができる。そこで, z_{t-1} を説明変数に加えることにより,ボラティリティ変動の非対称性を考慮している。(33)式は, $z_{t-1}>0$ であれば。

$$\ln(\sigma_t^2) = w + \beta \{\ln(\sigma_{t-1}^2) - w\} + (\gamma + \theta)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|)$$

となるのに対して、 $z_{t-1} < 0$ であれば、

$$\ln(\sigma_t^2) = w + \beta \{\ln(\sigma_{t-1}^2) - w\} + (\gamma - \theta)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|)$$

となる。そこで、 θ <0 であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

ボラティリティ変動の非対称性を表すモデルとしてはこれまで GJR, EGARCH モデルを用いることが多かったが, 近年よく用いられるようになってきたモデルに, Ding, Granger and Engle (1993)によって提案された APGARCH

モデルがある¹⁴⁾. このモデルは次のように表される¹⁵⁾.

 $\sigma_t^{\delta} = w + \beta \sigma_{t-1}^{\delta} + \alpha (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1})^{\delta}, \quad (34)$ $w, \delta > 0, \alpha, \beta \ge 0, -1 < \gamma < 1.$

ARCH, GARCH モデルでは σ_t^2 , EGARCH モデルでは $\ln(\sigma_t^2)$ の変動を定式化していたのに対して、このモデルでは σ_t^δ の変動を定式化しており、 δ も未知パラメータとして推定するのが特徴である。(34)式は、 $\varepsilon_{t-1}>0$ であれば、

 $\sigma_t^\delta = w + \beta \sigma_{t-1}^\delta + \alpha (1-\gamma)^\delta |\varepsilon_{t-1}|^\delta$ となり、 $\varepsilon_{t-1} < 0$ であれば、

 $\sigma_t^{\tilde{s}} = w + \beta \sigma_{t-1}^{\tilde{s}} + \alpha (1+\gamma)^{\tilde{s}} | \varepsilon_{t-1}|^{\tilde{s}}$ となる。そこで, $\gamma > 0$ であれば,予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。このモデルは,他の多くのARCH 型モデルを特殊ケースとして含んでいる16)

4.3 ボラティリティ変動の長期記憶性と FI-EGARCH モデル

これまでに説明した ARCH 型モデルでは, パラメータが定常性を満たす限り, ボラティリ ティは短期記憶過程に従い, ボラティリティの ショックは指数的に減衰する。例えば, GARCH モデルの場合に、0期に起きた1単位 のショックは t 期には $(\alpha+\beta)^t$ になり、ボラテ ィリティの定常性の条件 α+β<1 が満たされ ると、これは時間とともに指数的に減衰する17)。 しかし、ボラティリティの代理変数であるリタ ーンの2乗の自己相関を計測すると,通常,シ ョックの減衰のスピードはそれよりも遅いこと が知られている。そこで、ボラティリティは長 期記憶過程に従っている可能性があることを考 慮に入れて、Bollerslev and Mikkelsen(1996) は EGARCH モデルを次のような FIEGARCH モデルに拡張している18)。

 $(1 - \beta L) (1 - L)^{d} \{ \ln(\sigma_t^2) - w \} = g(z_{t-1}). \quad (35)$ to the U,

 $g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma \{|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)\}.$ このモデルは、ARFIMA(X)モデル同様、d=0 であれば、EGARCH モデル(33)になり、d =1 であれば、ボラティリティは単位根を持ち非定常になる。 $|\beta|<1$ であるとすると、d>0 であれば、ボラティリティは長期記憶性を持ち、d<0.5 であれば定常、 $d\geq0.5$ であれば非定常である。

ボラティリティの長期記憶性を考慮したモデルには、他にも、GARCH モデルを拡張した FIGARCH モデル(Baillie、Bollerslev and Mikkelsen 1996)や APGARCH モデルを拡張した FIAPGARCH モデル(Tse 1998)があるが、これらのモデルは、d < 0.5 であってもリターンの分散が無限大になるという問題点があり¹⁹⁾、また、ボラティリティの非負性を保証するためのパラメータの制約が複雑なので(Baillie、Bollerslev and Mikkelsen 1996、Chung 1999)、本稿では扱わない。

以下の分析では、以上のARCH型モデルすべてを最尤法により推定している(ARCH型モデルの最尤推定について詳しくは、渡部・佐々木 2006 の補論 A、B を参照のこと).

5. 日経 225 株価指数への応用

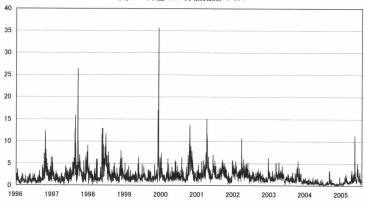
5.1 データと基本統計量

本稿の分析に用いた日次リターンは 1996 年3月11日から 2006 年3月31日までの日経 225株価指数の日次変化率(%)である。これらは各営業日の終値の対数階差を 100 倍することにより算出した。

RVの計算は、同じく1996年3月11日から2006年3月31日までの日経225の5分ごとの価格を用いて行った²⁰⁾. 我々の利用したデータベースには、前場は9:01から11:00(もしくは11:00過ぎ)まで、後場は12:31から15:00(もしくは15:00過ぎ)までの1分ごとの日経225の価格が記録されており²¹⁾、その中から前場については、9:01、9:05、9:10、…、10:55の価格と前場の終値を、後場については12:31、12:35、12:40、…、14:55の価格と後場の終値を5分ごとの価格として抽出した。大納会、大発会は前場しか取引がないので、同様に前場の価格だけ抽出した。

まず、これらの5分ごとの価格の対数階差を

図 1. 日経 225 株価指数の RV



100 倍することにより、5 分ごとのリターンを 計算した. 次に、Hansen and Lunde (2005a) に 従い,前日の終値から9:01までのリターンと 11:00 から 12:31 までのリターンは除いて、5 分 ごとのリターンの2乗をすべて足し合わせるこ とにより市場が開いている時間の $RV(RV_{\ell}^{(o)})$ を計算し、それに(8)式のように日次リターン の標本分散と $RV_t^{(o)}$ の標本平均の比である cを掛けることにより、t-1 日の終値から t 日の 終値までのRVを計算した。cの値は1.73で あった。大納会、大発会以外の営業日の市場が 開いている時間は4.5時間であり、もし昼休み や夜間など市場が閉まっている間のボラティリ ティの上昇のスピードが市場が開いている間と 同じであれば、cは $24/4.5 \approx 5.33$ となるはずで ある。ところが、それよりかなり小さい 1.73 と いうことは、市場が閉まっている間のボラティ リティの上昇のスピードが市場が開いている間 より遅いということで, 先行研究と整合的であ る(渡部2000, 2.4.1節)。このようにして計算 された RV が図1に描かれている.

表 1 には、1996 年 3 月 11 日から 2006 年 3 月 31 日までのすべての標本を使った場合の日経 225 の日次リターンとその 2 乗,日次 RV とその対数値の基本統計量が計算されている。まず最初に日次リターン(R)について見てみると、平均は 0 から有意に乖離していないので,以後,日次リターンの平均は 0 であるものとして分析を行う。分布については、歪度は 0 から有意に乖離していないが,尖度は有意水準 1% でも 3

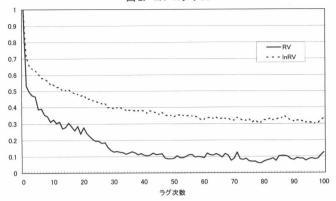
を有意に超えている。このことは日次リターンは分布の裾が正規分布よりも厚いことを示している。リターンの分布の裾が厚いことは、よく知られた事実である。JB は歪度と尖度を合わせて正規性の検定を行う Jarque and Bera (1987)統計量であり、有意水準 1% でも正規性を棄却する。LB(10)は 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung and Box (1978)統計量であり、分散不均一性がある場合にこの統計量をそ

表1. 日経 225 の日次リターン, RV の基本統計量 サンプル期間: 1996 年 3 月 11 日―2006 年 3 月 31 日 サンブル数: 2,476

	日次リターン		RV	
	R	R^2	RV	$\ln RV$
平均	-0.0067	2.1125	2.1125	0.4669
	(0.0292)	(0.0832)	(0.0383)	(0.0153)
標準偏差	1.4537	4.1405	1.9062	0.7637
歪度	-0.0326	5.6624	4.9937	-0.2540
	(0.0492)	(0.0492)	(0.0492)	(0.0492)
尖度	4.8395	52.3669	59.0827	3.4982
	(0.0985)	(0.0985)	(0.0985)	(0.0985)
JB	349.52***	264657.91***	334777.65***	52.22***
LB(10)	16.47*	111.96***	1322.29***	4285.20***

注) 括弧内の数値は標準誤差、LB(10)は1次から10次までの自己相関がすべて0であるという帰無仮説を検定するためのLjung-Box(1978)統計量で、Diebold(1988)の方法により分散不均一性を調整している。LB(10)の臨界値は15.99(10%)、18.31(5%)、23.21(1%)、JB 統計量は正規性を検定するためのJarque-Bera(1987)統計量である。LB(10)の臨界値は15.99(10%)、18.31(5%)、23.21(1%)、JB 統計量の臨界値は4.61(10%)、5.99(5%)、9.21(1%)、***、***はそれらがそれぞれ有意水準10%、5%、1%で有意であることを示す。しかし、JB 統計量は、長期記憶過程に従う系列では、正規性を過剰に棄却することが知られている(Thomakos and Wang 2003)、

図 2. コレログラム



のまま使うと帰無仮説を過剰に棄却してしまうので、Diebold (1988) の方法により分散不均一性を調整している (渡部 2000 の 1.5.1 節参照)。この統計量によると、日次リターンに自己相関がないという帰無仮説は有意水準 10% では棄却されるものの、有意水準 5% では棄却されないので、以後、自己相関もないものとして分析を行う。平均 0 で自己相関がないということは、リターンの式 (28) において、 $E(R_t|I_{t-1})=0$ ということである。

次に、残りのリターンの2乗(R^2)、RV、RV の対数値の基本統計量を見てみると, リターン の2乗とRVの平均は同じである。これは、 RV の計算に Hansen and Lunde (2005a)の方 法を用いたからである。それに対して、標準偏 差はリターンの2乗の方がRVよりもかなり 大きくなっている。これは、(28)式でE $(R_t|\mathbf{I}_{t-1})=0$ とすると、リターンの 2 乗は $\sigma_t^2 z_t^2$ となり、その変動はボラティリティ σ_t^2 の変動 だけでなく、これの変動も含むからである。歪 度, 尖度, JB統計量によると, リターンの2 乗、RV、RV の対数値ともに有意水準 1% でも 正規性は棄却される。ただし、長期記憶過程に 従う変数の場合、JB 統計量は過剰に正規性を 棄却してしまうので(Thomakos and Wang 2003), これらの正規性については以下であら ためて議論する. LB(10)によると, 自己相関 がないという帰無仮説はいずれも有意水準 1% で棄却される。これはボラティリティ・クラス タリングと整合的である。特に、RV とその対 数値の LB(10)は高く,この結果はそれらが長期記憶過程に従っている可能性を示唆するものである.

図2はRVとその対数値のコレログラム(自己相関係数)を描いたものである。この図は、自己相関の減衰の速度が遅いことを示しており、これはRVが長期記憶過程に従っているという先行研究の結果と整合的である。

5.2 各モデルの推定結果

表 2 には,最初の 1,200 個のデータを使った場合の RV の各モデルの推定結果がまとめられている。ただし,SIC により, \ln RV-ARFIMA, \ln RV-ARFIMAX モデルの次数はいずれも p=0, q=1 が, \ln UC モデルのファクターの数は J=2 が選択されたので,その次数およびファクターの数での推定結果だけ示している。表 2 からわかることは以下の通りである.

- (1) InRV-ARFIMA, InRV-ARFIMAX モデルの d の推定値にはいずれも有意な正の値が得られており、RV の対数値は長期記憶過程に従っていることがわかる。また、d の推定値は有意に 0.5 を下回っていないので、定常か非定常かはわからない。
- (2) lnRV-ARFIMAX モデルの μ₂ の推定値は 有意な正の値であり、RV は株価が上がっ た日の翌日よりも下がった日の翌日の方が より上昇する傾向があることがわかる。ま た、μ₁ が有意でないことから、RV は前日 に株価が下がった場合だけ反応することが

表 2. RV のモデルの推定結果

サンプル期間: 1996 年 3 月 12 日―2001 年 1 月 24 日サンプル数: 1,200

(a) lnRV-ARFIMA(0, d, 1)モデル

 $(1-L)^d(\ln(RV_t)-\mu) = u_t - \theta u_{t-1}, \quad u_t \sim WN(0, \sigma_u^2)$

パラメータ	推定值	標準誤差	
d	0.4574	0.0532	
μ	0.3401	0.2079	
θ	0.1407	0.0723	
σ_u^2	0.2768	0.0137	
Log-likelihood	-931.99		
LB(10)	5.58		
JB	49.97***		

注) 推定は誤差項 u_t の分布を正規分布とした近似疑似最尤法により行った。詳しくは、渡部・佐々木(2006)の補論 C を参照のこと。また、次数は SIC によって選択した。標準誤差は疑似最尤法の標準誤差である。LB(10)、JB はそれぞれ残差 \hat{u}_t の Ljung-Box (1978) 統計量と Jarque-Bera 統計量 (1987)を表す。LB 統計量は、Diebold (1988)の方法により分散不均一性を調整している。LB(10)の臨界値は 15.99(10%)、18.31 (5%)、23.21(1%)。JB 統計量の臨界値は 4.61(10%)、5.99(5%)、9.39.21(1%)。*、**、*** はそれらがそれぞれ有意水準 10%、5%、1% で有意であることを示す。

(b) lnRV-ARFIMAX (0, d, 1) $\in \vec{\mathcal{T}}^{\nu}$ $(1-L)^{d} (\ln(RV_{t}) - \mu_{0} - \mu_{1}|R_{t-1}| - \mu_{2}D_{t-1}^{-}|R_{t-1}|)$ $= u_{t} - \theta u_{t-1}, u_{t} \sim WN(0, \sigma_{u}^{2})$

推定值	標準誤差
0.4873	0.0567
0.2438	0.2289
0.0315	0.0216
0.0829	0.0200
0.2353	0.0742
0.2683	0.0136
-913.38	
2.11	
66.62***	
	0.4873 0.2438 0.0315 0.0829 0.2353 0.2683 -913.38 2.11

注) 推定は誤差項 u_t の分布を正規分布とした近似疑似最尤法により行った。詳しくは、渡部・佐々木(2006)の補論 C を参照のこと。また、次数は SIC によって選択した。標準誤差は疑似最尤法の標準誤差である。LB(10)、JB はそれぞれ残差 \bar{u}_t の Ljung-Box (1978) 統計量 と Jarque-Bera 統計量 (1987)を表す。LB 統計量は、Diebold (1988) の方法により分散不均一性を調整している。LB(10) の臨界値は 15.99 (10%)、18.31 (5%)、23.21 (1%)。JB 統計量の臨界値は 4.61 (10%)、5.99 (5%)、9.21 (1%)。*, ***, **** はそれらがそれぞれ有意水準 10%、5%、1% で有意であることを示す。

わかる.

(3) InRV-HAR モデルの β₁、β₂ は有意水準 5 % で、β₃ は有意水準 10% で有意であり、 RV は過去の日次、週次、月次すべての RV に依存していることがわかる。
$$\begin{split} & \text{(c)} \ln \text{RV-HAR}(3) = \vec{\tau}' \nu \\ & \ln (RV_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln (RV_{t-1}) + \beta_2 \ln (RV_{t-1}^{(w)}) \\ & + \beta_3 \ln (RV_{t-1}^{(m)}) + v_t, \quad v_t \sim WN(0, \, \sigma_v^2) \end{split}$$

. 1-0 (, ; 1)		(0,00)
パラメータ	推定值	標準誤差
β_0	0.0338	0.0905
β_1	0.2283	0.1010
eta_2	0.3903	0.1669
β_3	0.2189	0.1257
σ_v^2	0.2749	0.0387
Log-likelihood	-927.81	
LB(10)	8.89	
JB	43.93***	

注) 推定は最小 2 乗法により行った、ただし、標準誤差は疑似最尤法の標準誤差である。LB(10)、JB はそれぞれ残差 \bar{v}_t の Ljung-Box (1978) 統計量と Jarque-Bera 統計量(1987)を表す。LB 統計量は、Diebold(1988)の方法により分散不均一性を調整している。LB(10) 臨界値は 15.99(10%)、18.31(5%)、23.21(1%)、JB 統計量の臨界値は 4.61(10%)、5.99(5%)、9.21(1%)、*, **, *** はそれらがそれぞれ有意水準 10%、5%、1% で有意であることを示す。

$$(d) RV-UC(2) \neq \vec{\tau}'\nu$$

$$\sigma^{2}(s) = \sum_{j=1}^{2} \tau^{j}(s)$$

$$d\tau^{j}(s) = -\lambda_{j}\tau^{j}(s) ds + dz_{j}(\lambda_{j}s)$$

$$d\tau^{j}(s) = -\lambda_{j}(\tau^{j}(s) - \xi) ds + \omega\tau(s)^{\eta_{j}/2} dB_{j}(s), \, \eta_{j} \in [1, 2]$$

$$E(\tau^{1}(s)) = w\xi, E(\tau^{2}(s)) = (1 - w)\xi$$

$$Var(\tau^{1}(s)) = w\omega^{2}, Var(\tau^{2}(s)) = (1 - w)\omega^{2}$$

$$0 < w < 1$$

パラメータ	推定值	標準誤差
5	2.3184	0.2145
ω^2	4.4367	1.6419
λ_1	0.0780	0.0281
λ_2	135411.9792	788.0581
w	0.4781	0.2145
Log-likelihood	-2437.96	
LB(10)	6.90	
JB	393583.66***	

- (4) UCモデルのλ₁、№の推定値は0.078と 135412である。このことは,第1ファクタ ーは持続性が高いのに対して,第2ファク ターはほとんど持続性がないことを示して いる。

表 3. ARCH 型モデルの推定結果

サンプル期間:1996年3月12日-2001年1月24日

サンプル数:1,200

(a) GARCH

 $\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2, \ \omega > 0, \ \beta, \ \alpha \ge 0$

パラメータ	推定值	標準誤差
ω	0.0804	0.0297
β	0.8759	0.0221
α	0.0880	0.0176
Log-likelihood	-2100.12	
LB(10)		
$\widehat{\mathcal{Z}}_t$	7.33	
$\widehat{\mathcal{Z}}_t^2$	3.90	

注) 推定は疑似最尤法によって行った。標準誤差は疑似最尤法の標準誤差である。LB(10)は Diebold (1988)の方法により分散不均一性を調整した Ljung-Box (1978)統計量を表し、基準化した残差 $\hat{z}_t = \hat{\varepsilon}_t/\sqrt{\sigma_t^2}$ とその 2 乗それぞれについて計算している。LB(10)の臨界値は 15.99(10%),18.31(5%),23.21(1%)。

 $\begin{array}{c} \text{(b)GJR} \\ \sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2, \ \omega \! > \! 0, \ \beta, \ \alpha, \ \gamma \! \geq \! 0 \end{array}$

パラメータ	Estimates	Standard Errors
ω	0.0763	0.0278
β	0.8820	0.0223
α	0.0266	0.0172
γ	0.1111	0.0311
Log-likelihood	-2090.71	
LB(10)		
$\widehat{\mathcal{Z}}_t$	7.49	
$\hat{z}_t^2 2$	5.15	

注) 推定は疑似最尤法によって行った、標準誤差は疑似最尤法の標準誤差である。LB(10)は Diebold(1988)の方法により分散不均一性を調整した Ljung-Box (1978)統計量を表し、基準化した残差 $\hat{z}_i = \hat{\epsilon}_i / \sqrt{\sigma_i^2}$ とその2乗それぞれについて計算している。LB(10)の臨界値は15.99(10%)、18.31(5%)、23.21(1%)。

(c) EGARCH

 $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi \{ \ln(\sigma_{t-1}^2) - \omega \} + \theta z_{t-1} + \gamma \{ |z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|) \}$

Parameters	Estimates	Standard Errors
ω	0.6589	0.1456
ϕ	0.9667	0.0121
θ	-0.0917	0.0217
γ	0.1492	0.0338
Log-likelihood	-2088.32	
LB(10)		
\hat{z}_t	7.84	
\hat{z}_t^2	5.43	

注) 推定は疑似最尤法によって行った。標準誤差は疑似最尤法の標準誤差である。LB(10)は Diebold (1988)の方法により分散不均一性を調整した Ljung-Box (1978)統計量を表し、基準化した残差 $\hat{z}_t = \hat{\varepsilon}_t/\sqrt{\sigma_t^2}$ とその 2 乗それぞれについて計算している。LB(10)の臨界値は 15.99(10%),18.31(5%),23.21(1%)。

(d) APGARCH $\sigma_t^{\delta} = \omega + \beta \sigma_{t-1}^{\delta} + \alpha (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1})^{\delta}$ $\omega, \delta > 0, \alpha, \beta \ge 0, -1 < \gamma < 1$

Parameters	Estimates	Standard Errors
δ	1.1001	0.3683
ω	0.0509	0.0175
β	0.8996	0.0202
α	0.0819	0.0173
γ -	0.5943	0.2088
Log-likelihood	-2088.00	
LB(10)		
$\widehat{\mathcal{Z}}_t$	7.42	
$\widehat{\mathcal{Z}}_t^2$	6.97	

注) 推定は疑似最尤法によって行った。標準誤差は疑似最尤法の標準誤差である。LB(10)は Diebold(1988)の方法により分散不均一性を調整した Ljung-Box (1978)統計量を表し、基準化した残差 $\hat{z}_i = \hat{\varepsilon}_i / \sqrt{\sigma_i^2}$ とその 2 乗それぞれについて計算している。LB(10)の臨界値は 15.99(10%),18.31(5%),23.21(1%)。

(e) FIEGARCH

 $(1-\phi L)(1-L)^{d}\{\ln(\sigma_{t}^{2})-\omega\} = \theta z_{t-1} + \gamma\{|z_{t-1}|-E(|z_{t-1}|)\}$

Parameters	Estimates	Standard Errors
d	0.2569	0.3052
ω	0.6065	0.2776
ϕ	0.9149	0.0828
θ	-0.0697	0.0247
γ	0.1099	0.0546
Log-likelihood	-2087.50	
LB(10)		
\widehat{z}_t	7.68	
$\widehat{\mathcal{Z}}_t^2$	5.24	

- 注) 推定は Taylor(2001)によって提案されている方法によって行った。詳しくは、渡部・佐々木(2006)の補論 B を参照のこと。標準誤差は疑似最尤法の標準誤差である。LB(10)は Diebold(1988)の方法により分散不均一性を調整した Ljung-Box(1978)統計量を表し、基準化した残差 $\widehat{z}_{\epsilon} = \widehat{\varepsilon}_{\epsilon} / \sqrt{\widehat{\sigma}_{\epsilon}^{2}}$ とその2乗それぞれについて計算している。LB(10)の 臨界値は15.99(10%)、18.31(5%)、23.21(1%)。
- (5) LB(10)の値から、すべてのモデルの残差 に有意な自己相関はないことがわかる。
- (6) JB 統計量の値から、すべてのモデルの残差で正規性は棄却される。特に、RV の対数をとらずそのまま定式化している UC モデルでは、JB 統計量の値は非常に高い値を示している。

表3にはARCH型モデルの推定結果がまとめられている。この表からわかることは以下の通りである。

(1) GJR モデルと APGARCH モデルのγの

推定値が統計的に有意な正の値, EGAR-CH モデルおよび FIEGARCH モデルの θ の推定値が有意な負の値であることから, 価格が上がった日の翌日よりも価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることがわかる.

- (2) APGARCH モデルの δ は δ =1 から有意 に乖離しないが、 δ =2 は有意に下回る.
- (3) FIEGARCH モデルの d の推定値は、有意 な正の値が得られているが、標準誤差が大きいため、d は有意に 0 を上回っていないしたがって、ボラティリティに長期記憶性があると結論づけることはできない。また、d の推定値は 0.5 を有意に下回っていないので、ボラティリティが定常かどうかもわからない。
- (4) すべてのモデルで、基準化したリターンおよびその2乗に有意な自己相関は観測されない.

5.3 ボラティリティの予測精度の比較

本節では、各モデルによってボラティリティ の1期先予測値を計算し、予測精度の比較を行 う. ボラティリティの1期先予測値の計算は以 下のように行った。日次リターン、RVともサ ンプル数は2,475であり、まず最初の1期から 1,200 期までのサンプルを使って各 ARCH 型 モデルと RV のモデルのパラメータを推定し、 その下で1,201期のボラティリティの予測値を 計算する. 次に、2期から1,201期までのサン プルを使って各モデルのパラメータを推定し, その下で1,202期のボラティリティの予測値を 計算する. 以上を繰り返し, 最後に 2,475 期の ボラティリティの予測値を計算する。 これによ って得られた 1,201 期から 2,475 期までのボラ ティリティの予測値を使って予測精度の比較を 行う.

ARCH 型モデルでは、t 期のボラティリティを t-1 期に値のわかる変数だけの(誤差項を含まないという意味で)確定的な関数として表すので、パラメータの値と t-1 期までの情報が与えられれば t 期のボラティリティの予測値は

簡単に計算できる。それに対して、RVのモデルはすべて誤差項を含み、かつ UC モデル以外は、 RV_t ではなくその対数値の変動を定式化しているので、ボラティリティの予測値を計算するには誤差項の分布を仮定する必要がある。前節の結果から誤差項の分布は有意に正規分布から乖離しているが、本稿では、Koopman、Jungbacker and Hol (2005)、渡部・佐々木 (2006) などの先行研究に従い、計算の簡単化のため、正規分布を仮定する。そうすると、対数正規分布の性質より、t-1 期における t 期のボラティリティの予測値 $RV_{t|t-1}$ として次のように計算できる。

$$\widehat{RV}_{t|t-1} = \exp\left[E(\ln(RV_t)|\boldsymbol{I}_{t-1}) + \frac{1}{2}Var(\ln(RV_t)|\boldsymbol{I}_{t-1})\right].$$
(36)

ここで、 $E(\ln(RV_t)|I_{t-1})$ 、 $Var(\ln(RV_t)|I_{t-1})$ はそれぞれ、t-1期における $\ln(RV_t)$ の期待値と分散を表し、前者はパラメータが推定されればモデルから簡単に計算でき、後者は残差分散として推定できる。例えば、ARFIMAX モデルでは、

$$E(\ln(RV_{t})|\mathbf{I}_{t-1})$$

$$= \mu_{0} + (\mu_{1} + \mu_{2}D_{t-1}^{-})|R_{t-1}|$$

$$+ \sum_{k=1}^{t-1} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k} (-1)^{k}$$

$$\{\ln(RV_{t-k}) - \mu_{0} - (\mu_{1} + \mu_{2}D_{t-1}^{-})|R_{t-k-1}|\}$$

$$+ \theta u_{t-1}, \qquad (37)$$

$$Var(\ln(RV_{t})|\mathbf{I}_{t-1}) = \sigma_{u}^{2} \qquad (38)$$

$$\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{S}.$$

以上のように計算されたボラティリティの予測値の精度を比較するためには、ボラティリティの真の値が必要であるが、ボラティリティの真の値は観測できないので、代理変数が必要となる。ボラティリティの代理変数としてこれまでよく用いられていたのは、 R_t (もしくはそれから平均と自己相関を除去した ε_t)の2乗であった(渡部2000, 2.3.3節)。本稿のように、(28)式において $E(R_t|I_{t-1})=0$ と仮定すると、 $R_t^2=\varepsilon_t^2=\sigma_t^2z_t^2$ となり、 R_t^2 (もしくは ε_t^2)はボラ

 F_{τ} リティ σ_{t}^{2} だけでなく, z_{t}^{2} にも依存する. Andersen and Bollerslev (1998) tt, $\subset \mathcal{O}(z_t^2)$ 変動が大きいため、真のボラティリティの代理 変数として R_t^2 (もしくは $\hat{\epsilon}_t^2$)を用いると、ボラ ティリティの予測精度を正しく評価できないこ とを指摘している。彼らは、 R_t^2 (もしくは $\hat{\epsilon}_t^2$) の代わりにRVを用いることを提案している。 また, Hansen and Lunde (2006a) は, 真のボラ ティリティの代理変数として R_t^2 (もしくは $\hat{\epsilon}_t^2$) を用いると、間違ってボラティリティの予測精 度が悪いモデルを良いモデルとして選択してし まう可能性があることを示しており、彼らも R_t^2 (もしくは $\hat{\epsilon}_t^2$)ではなく, RV を用いること を提案している。そこで、本稿でも真のボラテ ィリティの代理変数にRVを用いてボラティ リティの予測精度の比較を行う.

ボラティリティ予測の精度を測る指標には, 先行研究に従い,以下のRMSE(root mean squared error), RMSPE(root mean squared percentage error), MAE(mean absolute error), MAPE(mean absolute percentage error)を用いる.

$$\begin{aligned} \text{RMSE} &= \sqrt{\frac{1}{1,275}} \sum_{t=1,201}^{2,475} (RV_t - \widehat{\sigma}_{t|t-1}^2)^2, \\ \text{RMSPE} &= \sqrt{\frac{1}{1,275}} \sum_{t=1,201}^{2,475} \left(\frac{RV_t - \widehat{\sigma}_{t|t-1}^2}{RV_t} \right)^2, \\ \text{MAE} &= \frac{1}{1,275} \sum_{t=1,201}^{2,475} |RV_t - \widehat{\sigma}_{t|t-1}^2|, \\ \text{MAPE} &= \frac{1}{1,275} \sum_{t=1,201}^{2,475} \left| \frac{RV_t - \widehat{\sigma}_{t|t-1}^2}{RV_t} \right|. \end{aligned}$$

ここで, $\widehat{\sigma}_{t|t-1}^2$ は各モデルによる t-1 期における t 期のボラティリティ σ_t^2 の予測値を表す。例えば, $\ln RV$ -ARFIMAX モデルの $\widehat{\sigma}_{t|t-1}^2$ は (36)式で計算される $\widehat{RV}_{t|t-1}$ とする。

これらの指標をすべてのモデルについて計算したものが表4である。比較のために、RVの対数値を簡単なAR(1)モデルで定式化した場合についても計算を行っている。この表からわかることは以下の通りである。

(1) すべての指標において, RV のモデルはす べて ARCH 型モデルの予測精度を上回る。 最も簡単な lnRV-AR(1)モデルでもすべ

表 4. ボラティリティの予測精度の比較

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
lnRV-ARFIMA	1.0532	0.6117	0.6722	0.4375
lnRV-ARFIMAX	1.0675	$0.6031^{(1)}$	0.6727	$0.4337^{(1)}$
lnRV-HAR	$1.0531^{(1)}$	0.6206	$0.6650^{(1)}$	0.4390
RV-UC(2)	1.1052	0.6163	0.6931	0.5352
lnRV-AR(1)	1.1382	0.8562	0.7533	0.5699
GARCH	1.1743	1.0474	0.8079	0.6866
GJR	$1.1729^{(a1)}$	1.0028	0.7950	0.6554
EGARCH	1.1857	0.9719	0.8081	0.6453
APGARCH	1.1837	0.9911	0.8052	0.6541
FIEGARCH	1.1813	$0.8922^{(a1)}$	$0.7927^{(a1)}$	$0.6012^{(a1)}$

注) (1)はすべてのモデルの中で最も予測精度が高いもの。 (a1)は ARCH 型モデルの中で最も予測精度が高いもの。

ての ARCH 型モデルの予測精度を上回る.

- (2) RV のモデルの中では、それほど予測精度 に差はないが、RMSE と MAE では lnRV-HAR モデルが最も予測精度が高く、 RMSPE と MAPE では lnRV-ARFIMAX モデルの最も予測精度が高い。
- (3) ARCH型モデルの中では、RMSEでは GJRモデルが最も予測精度が高く、それ以 外の指標ではすべてFIEGARCHモデル が最も予測精度が高い。

6. Realized Volatility の研究の発展

6.1 VaR やオプション価格への応用

ボラティリティの予測精度の比較では、真のボラティリティが観測できないという問題点があり、ここでは Andersen and Bollerslev (1998) や Hansen and Lunde (2006a) に従い、RV を真のボラティリティの代理変数として比較を行った。しかし、もし RV に何らかのバイアスがある場合には、この方法は正しくないことになるので、真のボラティリティを必要としない比較も重要である。そうしたものには、例えば、Value-at-Risk (VaR) やオプション価格を用いた比較がある。ただし、それらを行う場合には、リターンの分布をどうするか、また危険中立測度をどのように決めるかといった別の問題が生じる。

VaR を用いて比較を行っているものに, Giot and Laurent (2004) と渡部・佐々木 (2006) がある。前者はフランスの CAC40 株価指数,

アメリカの S&P500 株価指数, 円ドルレート, マルクドルレートを用いて、後者は日経225株 価指数を用いて分析を行っている。前者の結論 は、リターンの分布を skewed-t 分布にすると、 RV の対数値を ARFIMAX モデルで定式化す るのと、日次リターンを APGARCH モデルで 定式化するのとで、ほぼ同じパフォーマンスが 得られるというものである。それに対して、後 者は、日次リターンを FIEGARCH モデルで定 式化すると RV の対数値を ARFIMAX モデル で定式化するよりパフォーマンスが高く、また 日経 225 株価指数のリターンには有意な歪みが ないので、skewed-t 分布を用いるより、通常の t 分布を用いた方がパフォーマンスが高いとい う結果を得ている。ただし、これらの研究では、 lnRV-ARFIMAX モデルによる VaR の計算で、 まず lnRV-ARFIMAX モデルのパラメータを 推定し、それを使って1期先のRVを予測し、 次にリターンをRVの予測値の平方根で割っ たものを使って t 分布や skewed-t 分布の自由 度を最尤推定するという2段階推定法を用いて おり、リターンと RV を同時にモデル化し RV のパラメータとリターンの分布のパラメータを 同時推定すると、InRV-ARFIMAX モデルの精 度が改善する可能性がある。リターンと RV を同時にモデル化しているものに、Takahashi、 Omori and Watanabe(2007)がある.

RVをオプション価格に応用している研究はほとんどなく、唯一の例外が Ubukata and Watanabe (2007) である。そこでは、投資家の危険中立性の仮定の下で、日経 225 オプションについて分析し、RV の対数値を ARFIMA モデルで定式化した方が 日次 リターンをGARCH モデルや GJR モデルで定式化した場合よりもパフォーマンスが高いことを示している。

6.2 ジャンプの導入

これまで資産価格のジャンプについては考えなかったが、Barndorff-Nielsen and Shephard (2004)では、(1)式にジャンプ項 $\chi(s)$ dq(s) を加えたジャンプ拡散過程

$$dp(s) = \mu(s) ds + \sigma(s) dW(s) + \kappa(s) dq(s)$$
(39)

を考えている。ここで、dq(s) はジャンプがあったかどうかを表す変数で、時間 s にジャンプがあれば dq(s)=1、なければ dq(s)=0 である。また、x(s) はジャンプのサイズを表す。

このとき、(3)式を使って RV を計算すると、 ジャンプ項まで含んでしまう。そこで、 Barndorff-Nielsen and Shephard(2004)は、 (2)式で定義される真のボラティリティの推定 量として、新たに次のようなものを定義した。

$$BV_{t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=2}^{n} |r_{t-1+j/n}| |r_{t-1+(j-1)/n}|.$$
 (40)

この BV_t は Bipower Variation と呼ばれ, $n\to\infty$ とすると, ジャンプ項がある場合でも, (2)式で定義される真のボラティリティに確率 収束する.

そこで、(3)式で定義される RV_t と (40)式で定義される BV_t の差 RV_t ー BV_t は、 $n\to\infty$ とすると、第 t 日に起きたジャンプの大きさの 2 乗和 $\sum_{t-1 < s \le t} \chi^2(s)$ に確率収束する。しかし、 $RV_t - BV_t$ は、実際の計算では、負になることがあるので、Barndorff-Nielsen and Shephard (2004)は、ジャンプの 2 乗和を

$$J_t = \max[RV_t - BV_t, 0]$$
 (41)
として推定することを提案している。

Andersen, Bollerslev and Diebold (2003) は, HAR モデルの説明変数に J_t を加えた HAR-RV-J モデルや, RV_{t-1} , RV_{t-1}^w , RV_{t-1}^w , RV_{t-1}^w の代わりに BV_{t-1} , BV_{t-1}^w , BV_{t-1}^w , J_{t-1} , J_{t-1}^w を用いた HAR-RV-CJ モデルを推定している。

6.3 Realized Range-based Volatility

RV は日中のある時間間隔のリターンの2乗を加えたものであったが、Christensen and Podolskij(2006)、Martens and van Dijk (2007)らは、日中のある時間間隔の高値と安値の差の2乗を足し合わせたものを基準化定数で割った Realized Range - based Volatility (RRV)を提案している。

第 t 日を時間間隔 Δ の n 個の区間に分ける。 Δ の時間間隔の中には m 個の価格があり、第 t

日のi番目の区間の高値と安値をそれぞれ $H_{t,i}$, $L_{t,i}$ とすると,RRVは以下のように定義される。

$$RRV_t = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{i=1}^n (\ln(H_{t,i}) - \ln(L_{t,i}))^2.$$
 (42)

ここで、標準ブラウン運動のレンジを

$$\operatorname{range}_{m} = \max_{0 \le s, t \le m} (W_{t/m} - W_{s/m}) \qquad (43)$$

とすると、 $\lambda_m = E(\text{range}_n^2)$ である。 $m \to \infty$ とすると、 $\lambda_m \to 4\ln(2)$ となるので、m が十分大きい場合は、 $\lambda_m \approx 4\ln(2)$ として構わないが、そうでない場合には、 λ_m をシミュレーションによって求める必要がある(Christensen and Podolskij 2006 の Fig. 2 を参照)。m が小さい場合には、 λ_m は $4\ln(2)$ よりもかなり小さいので、 $\lambda_m = 4\ln(2)$ として RRV を計算すると、過小評価してしまう。

マイクロストラクチャー・ノイズがなければ、RRV の分散は RV の分散の約 1/5 であることが示されるので(Christensen and Podolskij 2006, Martens and van Dijk 2007), RRV の方が RV よりも効率的な推定量となる。しかし、RRV はよりマイクロストラクチャー・ノイズを被りやすいことが知られており(Martens and van Dijk 2007), RV 以上にマイクロストラクチャー・ノイズの除去が重要となる(Christensen, Podolskij and Vetter 2007, Martens and van Dijk 2007).

RRV を用いた実証分析はまだほとんど行われていないが、吉田(2006)は日経 225 株価指数の RV と RRV を計算し、それらを ARFIMA モデルで定式化してボラティリティの予測を行い、真のボラティリティの代理変数を RV とした場合 も RRV と した場合 も、RRV を ARFIMA モデルで定式化した方が予測精度が高いという結果を得ている。

6.4 Realized Covariance

2 資産のリターンの高頻度データ $\{(r_{1,t-1+1/n}, r_{2,t-1+1/n}), (r_{1,t-1+2/n}, r_{2,t+2/n}), \cdots, (r_{1,t}, r_{2,t})\}$ がある場合には、それを用いて共分散を以下のように推定することができる。

$$RC_t = \sum_{i=1}^n r_{1,t-1+i/n} r_{2,t-1+i/n}.$$
 (44)

これを Realized Covariance(RC)と呼ぶ.

実際には、2つの資産の価格がつくのは同時 ではなく,一方の資産が価格がついた時刻にも う一方の価格がついていないことがある。 そう した場合に同時点に価格がつくように補間を行 うという方法が考えられるが、この方法はバイ アスを生じさせる可能性がある。 Hayashi and Yoshida(2005)は、そうした補間を行うことな く、2資産の日中リターンを別々に計算し、時 間間隔がオーバーラップしているリターンの積 の和として RC を計算することを提案しており, そうすると真の共分散の一致推定量になること を証明している。ただし、彼らはマイクロスト ラクチャー・ノイズを考えておらず,マイクロ ストラクチャー・ノイズを考慮して彼らの方法 を拡張したものに Voev and Lunde (2007) があ る。また、Ubukata and Oya(2007)は、マイク ロストラクチャー・ノイズを考慮して, Hayashi and Yoshida (2005) の方法に有意なバイア スがあるかどうかを検定する方法を提案してい る.

6.5 RV の非正規性と分散不均一性

表2ではRVの各モデルの残差のJB統計量を計算しており、それによるとすべてのモデルで誤差項の正規性は棄却されている。対数をとらないRVそのものの分布に関しては、Barndorff-Nielsen and Shephard(2002 a, b)が無条件分布について、Forsberg and Bollerslev (2002)が過去のRVを条件とする条件付分布について、いずれもInverse Gaussian(IG)分布でうまく近似できることを示している。Forsberg and Bollerslev(2002)は、具体的には、次のGARCH-IGモデルがフィットが良いことを示している。

$$RV_t|I_{t-1}\sim \mathrm{IG}(\sigma_t^2,a),$$
 (45)

$$\sigma_t^2 = w + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha R V_{t-1} \tag{46}$$

ここで、 $IG(\sigma_t^2, a)$ は IG 分布を表し、その確率 密度関数は次のように与えられる。

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a\sigma_t^2 z^3}} \exp\left[a - \frac{1}{2} \left(\frac{a\sigma_t^2}{z} + \frac{az}{\sigma_t^2}\right)\right]. (47)$$

ここでは、 σ_t^2 は真のボラティリティではなく、 1 期前 の 情報 I_{t-1} に 基 づ く RV_t の 期 待 値 $E(RV_t|I_{t-1})$ を表している。

これに対して、日次リターンを RV で基準化したリターン $R_t/\sqrt{RV_t}$ の分布は標準正規分布に近いことが知られており、もしそれが正しく、かつ上記のように RV の条件付分布が IG 分布であるなら、日次リターンの条件付分布 $f(R_t|I_{t-1})$ は Normal Inverse Gaussian (NIG)分布に従う(詳しくは、Forsberg 2002 参照).

$$f(R_t|\mathbf{I}_{t-1}) = \int f(R_t|RV_t) f(RV_t|\mathbf{I}_{t-1}) dRV_t$$
$$\sim NIG(a, 0, 0, \sigma_t^2). \tag{48}$$

ここで、 $NIG(a, 0, 0, \sigma_t^2)$ は NIG 分布を表し、その確率密度関数は次のように与えられる。

$$f(z) = \frac{a}{\pi} \frac{K_{\rm I} \left(a \sigma_t^2 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{\sigma_t^2}\right)^2} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_t}{\sigma_t^2}\right)^2}}$$
$$\times \exp\left[\sigma_t^2 \left\{ \sqrt{a^2 + \beta \left(\frac{z}{\sigma_t^2}\right) \right\}} \right], a > 0, \sigma_t^2 > 0.$$
(49)

ただし、 $K_1(\cdot)$ は次数1 の第二種修正ベッセル 関数を表す。また、ここでは、日次リターンの 平均は0 であると仮定している。

このことから、Forsberg and Bollerslev (2002)は、日次リターンのモデルとして、以下のような GARCH-NIG モデルを推定し、フィットが良いことを示している。

$$R_t = \sigma_t z_t, z_t \sim NIG(a, 0, 0, 1), \qquad (50)$$

$$\sigma_t^2 = w + \beta \sigma_{t-1}^2 + a R_{t-1}^2. \qquad (51)$$

Forsberg and Bollerslev (2002) では RV の 分散不均一性については考えていないが, RV の非正規性は分散不均一性によってもたらされ ている可能性がある(渡部 2000, 1.4 節). そこ で, Corsi, Kretschmer, Mittnik and Pigorsch (2005) は, RV の分散不均一性と非正規性を両 方考慮したモデルを提案している。 具体的には, 誤差項の分散不均一性を GARCH モデルで定 式化し, 誤差項の分布を NIG (Normal Inverse Gaussian) 分布に した次のような HAR- GARCH モデルを提案している.

$$\sqrt{RV_{t}} = \beta_{0} + \beta_{1} \sqrt{RV_{t-1}} + \beta_{2} \sqrt{RV_{t-1}^{(w)}}
+ \beta_{3} \sqrt{RV_{t-1}^{(m)}} + u_{t},
u_{t} = \sigma_{t}z_{t}, z_{t} \sim NIG(a, b, \mu, \delta),
\sigma_{t}^{2} = w + \beta\sigma_{t-1}^{2} + \alpha u_{t-1}^{2}.$$
(52)

ここで、 $NIG(a, b, \mu, \delta)$ は NIG 分布を表し、 その確率密度関数は次のように与えられる。

$$f(z) = \frac{a}{\pi} \frac{K_{\rm I} \left(a \delta \sqrt{1 + \left(\frac{z - \mu}{\delta}\right)^2} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{z - \mu}{\delta}\right)^2}}$$
$$\times \exp\left[\delta \left\{ \sqrt{a^2 - b^2} + \beta \left(\frac{z - \mu}{\delta}\right) \right\} \right], \quad (53)$$
$$\delta > 0, \ a > 0, \ b \in (-\alpha, \alpha).$$

ただし、 z_t は平均0、分散1なので、

$$\mu = -\frac{b(a^2 - b^2)}{a^2}, \ \delta = \frac{b(a^2 - b^2)^{3/2}}{a^2}.$$

Corsi, Kretschmer, Mittnik and Pigorsch (2005)は HAR を用いているが, これを AR-FIMA(X)モデルにするのは容易である。また, RV の平方根をモデル化しているが, RV そのものや RV の対数値をモデル化することもできる。

7. まとめと今後の研究課題

本稿では、RVの研究のサーベイを行うとともに、日本の日経225株価指数のRVを計算し、これまでに提案されているRVの時系列モデルの推定を行った。合わせて日次リターンを用いたARCH型モデルの推定も行い、ボラティリティの予測精度の比較を行った。

今後のRVの研究課題としては以下のようなものが挙げられる。

(1) 高頻度の資産価格はマイクロストラクチャー・ノイズを含むので、RVの計算ではその影響をいかに小さくするかが重要になる。第2.2.1節で述べたように、マイクロストラクチャー・ノイズを軽減するためのRVの計算方法は既にいくつか提案されているので、それらの中でどの方法が最も有効であるかの比較は重要である(Andersen、Bollerslev and Meddahi 2006)。その場合、これまでに提案されている

ほどんどの方法では、(4)式のように、マイクロストラクチャー・ノイズ $\eta(s)$ には自己相関がなく、真の対数価格p(s)とも相関を持たないと仮定しているので 22 、これらの仮定が正しいのかどうかについても分析する必要がある。

- (2) 本稿で取り上げた RV の変動を表す時系列モデルの中で、UC モデルだけが(19)、(20)式のような連続時間モデルを基礎としており、そうした意味で、このモデルは重要である。その一方で、連続時間モデルを基礎としているために、このモデルを拡張する場合は連続時間モデルから修正しなければならないため、他のモデルと比べて拡張が容易ではない。しかし、今後、例えば、マイクロストラクチャー・ノイズを考慮したモデル、RV そのものではなくその対数値や平方根のモデル、ボラティリティ変動の非対称性を考慮したモデル、RRV のモデルなどへの拡張は不可欠である。
- (3) 本稿では、UCモデル以外、RVの対数値の変動を定式化したが、RVそのものやRVの平方根を定式化した場合と比較し、どれが望ましいのかを分析することも重要である。Gonçalves and Meddahi(2006)は、Box=Cox変換を使って、RVの逆数を定式化をするのが望ましいとの結果を示している。
- (4) 本稿の RV-ARFIMA(X)モデルの推定結 果から、日経 225 の RV も、先行研究同様、長 期記憶過程に従っていることが明らかになった が、こうした長期記憶性は見せかけで、実際は 構造変化によってもたらされている可能性があ る。そこで、RVの構造変化についての分析も 重要である. しかし, Bai and Perron(1998)テ ストのような通常の構造変化のテストは長期記 憶過程に従うデータにはそのまま応用できない ことが知られており(Lavielle and Moulines 2000), また長期記憶過程に従うデータに構造 変化のテストを行うと、構造変化がなくても構 造変化が有意に検出されることが知られている (Diebold and Inoue 2001). そこで, 長期記憶 過程の下でも頑強な構造変化のテストの開発が 望まれる. Liu and Maheu(2006)は HAR モデ ルに Chib (1998) のベイズの手法を応用するこ

とにより、RV の構造変化を分析している。

- (5) 本稿では、先行研究同様、日次リターンを 用いて ARCH 型モデルを推定すると、RV の 時系列モデルを用いるより、ボラティティの予 測精度が悪いという結果が得られた。そこで, 日次リターンではなく、日中リターンを用いて ARCH 型モデルを推定した場合にボラティリ ティの予測精度がどうなるかも興味深い. Deo, Hurvich and Lu(2006)は、S&P500 につ いて、日中の30分ごとのリターンを用いて長 期記憶確率的ボラティリティ変動(longmemory stochastic volatility) モデルを推定し ボラティリティを予測すると、日次 RV を用い て ARFIMA モデルを推定した場合と、ほぼ同 等の予測精度が得られることを示している。た だし、日中リターンのボラティリティには季節 性があるので23)、日中リターンを用いて ARCH 型モデルや確率的ボラティリティ変動 モデルを推定する場合には, 事前に季節性を除 去する必要がある。日中リターンのボラティリ ティの季節性の除去については, Andersen and Bollerslev (1997), Deo, Hurvich and Lu (2006)を参照のこと。
- (6) 本稿では取り上げなかったが、ボラティリ ティにはオプション価格から計算されるインプ ライド・ボラティリティがあり、インプライ ド・ボラティリティの計算方法にも近年大きな 進展があった。ブラック・ショールズモデルは 満期までのボラティリティを一定と仮定するの で、ボラティリティが変動するのであれば、ブ ラック・ショールズモデルを用いて計算された インプライド・ボラティリティは正しくない。 そこで、原資産価格にブラック・ショールズモ デルのような特定のモデルを仮定せず, 単に (39)式のようなジャンプ拡散過程だけを仮定し たモデル・フリー・インプライド・ボラティリ ティ (MFIV) が Britten-Jones and Neuberger (2000)ゃ Jiang and Tian(2005)によって提案 された24)。(39)式のジャンプ拡散過程ではボラ ティリティは確率的に変動しても構わないので, MFIV はボラティリティが変動する場合でも 問題ない²⁵⁾。こうした MFIV と RV の関係の

分析は興味深い。MFIV は現在からオプショ ンの満期までのボラティリティの投資家の予測 値なので、現在や過去の RV には含まれていな い将来のボラティリティに対する情報を含んで いる可能性がある。そこで、RV の時系列モデ ルに説明変数として MFIV を加えることによ り、将来のボラティリティの予測精度が改善す るかどうか分析することは重要である26)。 Bandi and Perron (2006), Christensen and Nielsen(2006)らは、MFIVとRVの分数共和 分(fractional co-integration)関係について分 析を行っており、Bollerslev and Zhou(2006)は リスク・プレミアムやボラティリティ変動の非 対称性といったリターンとボラティリティの関 係をボラティリティに RV と MFIV を用いて 分析を行っている。また、MFIV はフォワード 中立確率測度の下での現在からオプションの満 期までのボラティリティの期待値なので、Bollerslev, Gibbson and Zhou (2006), Bollerslev and Zhou(2007)らは、MFIVとRVの差をボ ラティリティのリスク・プレミアムと定義し分 析を行っている.

(一橋大学経済研究所)

注

- * 本研究は一橋大学 21 世紀 COE プログラム「社会科学 の統計分析拠点構築」および文部科学省特別研究促進費 「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」より助成を受けている。一橋大学経済研究所の定例研究会参加者 から有益なコメントを頂いた。また原稿編集作業では一橋大学経済研究所の羽生朋子さんに大変お世話になった。ここに記して感謝の意を表したい。本稿に残っている誤りは すべて筆者の責任である。
- 1) ARCH 型モデルや確率的ボラティリティ変動モデルについて、詳しくは、Bollerslev、Engle and Nelson (1994)、Ghysels、Harvey and Renault (1996)、渡部(2000)を参照のこと。
- 2) $\eta(s)$ に自己相関がある場合や $\eta(s)$ と dW(s) との間に相関がある場合については,Hansen and Lunde (2006b) を参照.
- 3) Andersen, Bollerslev and Meddahi (2006) はこれらの方法についてサーベイと比較を行っている。
- 4) 休みの日数とボラティリティの関係については,渡 部(2000)の2.4.1節を参照.
- 5) 長期記憶過程や ARFIMA モデルについて詳しくは, Beran(1994)や矢島(2003)を参照。
- 6) より一般的には、d は負の値も取り得るが、本稿では非負の値に限定する。

- 7) $d \ge 0.5$ の場合は、分散や自己共分散が発散するので (9)、(10)式のような自己相関係数を用いた定義とは整合的でない。
- 8) 詳しくは、渡部・佐々木(2006)の補論 C を参照。
- 9) 線形状態空間モデルやカルマン・フィルターについては、Harvey(1989)を参照。
- 10) これは最も簡単な ARCH(1) モデルであり、一般的な ARCH(q) モデルは次のように表される。

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$$

 $w > 0, \alpha_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, ..., q).$

11) これは最も簡単な GARCH(1,1) モデルであり、一般的な GARCH(p,q) モデルは次のように表せる。

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2,$$

 $w > 0, \beta_i, \alpha_j \ge 0 \ (i = 1, 2, ..., p : j = 1, 2, ..., q).$

12) これは最も簡単な $\mathrm{GJR}(1,1)$ モデルであり,一般的な $\mathrm{GJR}(p,q)$ モデルは次のように表される.

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j + \gamma_j D_{t-j}^-) \varepsilon_{t-j}^2,$$

w>0, β_i , α_j , $\gamma_j\geq 0$ (i=1,2,...,p; j=1,2,...,q). ここで, D_{t-j} は ε_{t-j} が負であれば 1, それ以外では 0 になるダミー変数.

13) これは最も簡単な EGARCH(1,0)モデルであり、 一般的な EGARCH(p,q) モデルは次のように表される。 $\ln(\sigma_t^2) = w + \sum_{i=1}^p \beta_i \{\ln(\sigma_{t-1}^2) - w\} + g(z_{t-1}) + \sum_{j=1}^q \phi_j g(z_{t-j-1}).$ ただし、

 $g(z_{t-j-1}) = \theta z_{t-j-1} + \gamma \{|z_{t-j-1}| - E(|z_{t-j-1}|)\}.$

- 14) APGARCH モデルの統計的性質については、Karanasos and Kim(2006)を参照のこと。
- 15) これは最も簡単な APGARCH(1,1)モデルであり、 一般的な APGARCH(p,q) モデルは次のように表される。

$$\sigma_t^{\delta} = w + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^{\delta} + \sum_{j=1}^q \alpha_j (|\varepsilon_{t-j}| - \gamma_j \varepsilon_{t-j})^{\delta},$$

 $w, \delta > 0, \alpha_j, \beta_i \ge 0, -1 < \gamma_j < 1 \ (i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q).$

- 16) 詳細は、渡部・佐々木(2006)および Ding, Granger and Engle(1993)の Appendix A を参照のこと。
- 17) EGARCH モデルの定常性の条件は, $|\beta|$ <1. また,誤差項 z_t の分布が左右対称であるとすると,GJR,AP-GARCH モデルの定常性の条件は,それぞれ以下の通り.GJR: $\alpha+\beta+\gamma/2$ <1,APGARCH: $\beta+\alpha\{(1-\gamma)^{\delta}+(1+\gamma)^{\delta}\}E(|z_{t-1}|^{\delta})/2$ <1.
- 18) これは、FIEGARCH (1,d,0) モデルであり、一般的な FIEGARCH (p,d,q) モデルは次のように表される。

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \beta_{i} L^{i}\right) (1 - L)^{d} \{\ln (\sigma_{t}^{2}) - w\}
= g(z_{t-1}) + \sum_{i=1}^{q} \psi_{i} g(z_{t-j-1}).$$

ただし

 $g(z_{t-j-1}) = \theta z_{t-j-1} + \gamma \{|z_{t-j-1}| - E(|z_{t-j-1}|)\}.$

- 19) 詳しくは, Schoffer (2003)参照。
- 20) 具体的には、一橋大学 COE プログラム「社会科学の統計分析拠点構築」および文部科学省特別研究促進費「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」で購入した NEEDS-TICK データを用いた。
- 21) 東京証券取引所の取引は前場は 11:00 まで,後場は 15:00 までであるが,NEEDS-TICK データでは実際に取引 があった時刻ではなく日経 225 が算出された時刻が入力されているため,東京証券取引所が電子化される前には 11:00 や 15:00 を超えていた。
- 22) 唯一の例外は Hansen and Lunde (2006b)で、彼らはこうした仮定が成り立っていない場合についても考えて

いる.

- 23) 一般的に、市場が開いた時と閉まる時にボラティリティが上昇することが知られており、昼休みのある日本の株式市場では、昼休みの前と後もボラティリティが上昇することが知られている。
- 24) ただし、Britten-Jones and Neuberger(2000)はジャンプは考えていない。
- 25) MFIV は、実際に、シカゴオプション取引所 (CBOE)の S&P500 のボラティリティリティ・インデックス (VIX)やドイツ株価指数 (DAX)のボラティリティイ・ンデックス (VDAX-NEW)の計算に用いられている。しかし、これらの計算方法には問題点があることが、Jiang and Tian (2007) で指摘されている。Nishina、Maghrebi and Kim (2006)、Maghrebi (2007)が日本の日経 225 の MFIVを計算しているが、VIX や VDAX-NEW と同様の方法で計算しているので、やはり Jiang and Tian (2007) の指摘が当てはまる。
- 26) 渡部・山口(2006), Watanabe and Yamaguchi (2007)は、日経225に関して、ブラック・ショールズモデルを用いて計算したインプライド・ボラティリティをARFIMAX モデルの説明変数に加えてもボラティリティの予測精度は改善しないことを示している。

参考文献

- 矢島美寛(2003)「長期記憶をもつ時系列モデル」刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列の統計 その数理的基礎』第2部, pp.103-202, 岩波書店.
- 吉田多尉介(2007)「日経平均株価指数における Realized Range-based Volatility と Realized Volatility の予測力の比較分析」一橋大学大学院経済学研究科修士論文.
- 渡部敏明(2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.
- 渡部敏明・佐々木浩二(2006)「ARCH 型モデルと "Realized Volatility" によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」『金融研究』第 25 巻別冊第 2 号, pp. 39-74.
- 渡部敏明・山口圭子(2006)「日経 225 の "Realized Volatility" とインプライド・ボラティリティ」大阪証券取引所 『先物オプションレボート』 Vol. 18, No. 12, pp. 2-5.
- Aït-Sahalia, Y., Mykland, P. A. and Zhang, L. (2005) "How Often to Sample a Continuous-time Process in the Presence of Market Microstructure Noise," *Review of Financial Studies*, Vol. 18, No. 2, pp. 351-416
- Andersen, T. G. and Bollerslev, T. (1997) "Intraday Periodicity and Volatility Persistence in Financial Markets," *Journal of Empirical Finance*, Vol. 4, No. 2–3, pp. 115–158.
- Andersen, T. G. and Bollerslev, T. (1998) "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts," *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, pp. 885–905.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T. and Diebold, F. X. (2003)
 "Some Like it Smooth, and Some Like it Rough:
 Untangling Continuous and Jump Components in
 Measuring, Modeling, and Forecasting Asset Return
 Volatility," PIER Working Paper No. 03-025.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Ebens, H. (2001) "The Distribution of Realized Stock Return Volatility," *Journal of Financial Economics*, Vol. 61, No. 1, pp. 43–76.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys,

- P. (2003) "Modeling and Forecasting Realized Volatility," *Econometrica*, Vol. 71, No. 2, pp. 579–625.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T. and Meddahi, N. (2006) "Realized Volatility Forecasting and Market Microstructure Noise," Mimeo.
- Bai, J. and Perron, P. (1998) "Estimating and Testing Linear Model with Multiple Structural Changes," Econometrica, Vol. 66, No. 2, pp. 47–78.
- Baillie, R. T., Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. O. (1996) "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol. 74, No. 1, pp. 3–30.
- Bandi, F. M. and Perron, B. (2006) "Long Memory and the Relation between Implied and Realized Volatility," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, No. 4, pp. 636–670.
- Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2006) "Separating Microstructure Noise from Volatility," *Journal of Financial Economics*, Vol. 79, No. 3, pp. 655–692.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Nielsen, B., Shephard, N. and Ysusi, C. (2004) "Measuring and Forecasting Financial Variability Using Realized Variance," in A. C. Harvey, S. J. Koopman and N. Shephard eds, State Space and Unobserved Components Models: Theory and Applications, Chapter 10, pp. 205–235, Cambridge University Press, Cambridge.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2001) "Non-Gaussian OU Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics (with discussion)," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol. 63, No. 2, pp. 167–241.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002a) "Estimating Quadratic Variation using Realized Volatility," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 17, No. 5, pp. 457-477.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002b) "Econometric Analysis of Realized Volatility and its Use in Estimating Stochastic Volatility Models," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol. 64, No. 2, pp. 253–280.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004) "Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps (with discussion)," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 2, No. 1, pp. 1–37, Cambridge University Press.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2006) "Designing Realized Kernels to Measure the Ex-Post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise," unpublished manuscript, Oxford University.
- Beran, J. (1994) Statistics for Long-Memory Processes, Chapman Hall.
- Beran, J. (1995) "Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol. 57, No. 4, pp. 659-672.
- Bollerslev, T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307–327.
- Bollerslev, T., Engle, R. F., and Nelson, D. B. (1994)

- "ARCH Models," in R. F. Engle and D. L. McFadden (eds.) *The Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Amsterdam: North-Holland, pp. 2959–3038.
- Bollerslev, T. Gibbson, M. and Zhou, H. (2006) "Dynamic Estimation of Volatility Risk Premia and Investor Risk Aversion from Option-Implied and Realized Volatilities," Working Paper, Federal Reserve Board.
- Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. O. (1996) "Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, Vol. 73, No. 1, pp. 151– 184.
- Bollerslev, T. and Zhou, H. (2006) "Volatility Puzzles: A Simple Framework for Gauging Return-Volatility Regressions," *Journal of Econometrics*, Vol. 131, No. 1-2, pp. 123-150.
- Bolleslev, T. and Zhou, H. (2007) "Expected Stock Returns and Variance Risk Premia," Mimeo.
- Britten-Jones, M. and Neuberger, A. (2000) "Option Prices, Implied Price Process, and Stochastic Volatility," *Journal of Finance*, Vol. 55, No. 2, pp. 839–866.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W. and Mackinlay, A. C. (1997) The Econometrics of Financial Markets, Princeton: Princeton University Press.
- Chib, S. (1998) "Estimation and Comparison of Multiple Change Point Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 86, No. 2, pp. 221–241.
- Christensen, B. and Nielsen, M. (2006) "Asymptotic Normality of Narrow-band Least Squares in the Stationary Fractional Cointegration Model and Volatility Forecasting," *Journal of Econometrics*, Vol. 133, No. 1, pp. 343-371.
- Christensen, K. and Podolskij, M. (2006) "Realized Range-Based Estimation of Integrated Variance," Journal of Econometrics, forthcoming.
- Christensen, K., Podolskij, M. and Vetter, M. (2007) "Bias-correcting the Realized Range-based Variance in the presence of Market Microstructure Noise," Working Paper, Aarhus School of Business, University of Aarhus.
- Chung, C.-F. (1999) "Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model," Working Paper, Institute of Economics, Academia Sinica.
- Corsi, F. (2004) "A Simple Long Memory Model of Realized Volatility," Working Paper, Institute of Finance, University of Lugano.
- Corsi, F., Kretschmer, U., Mittnik, S. and Pigorsch, C. (2005) "The Volatility of Realized Volatility," CFS Working Paper Series No. 2005/33, Center for Financial Studies, an der Universit"at Frankfurt.
- Deo, R., Hurvich, C. and Lu, Y. (2006) "Forecasting Realized Volatility using a Long Memory Stochastic Volatility Model: Estimation, Prediction and Seasonal Adjustment," *Journal of Econometrics*, Vol. 131, No. 1–2, pp. 29–58.
- Diebold, F. (1988) Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics, Springer-Verlag.
- Diebold, F. X. and Inoue, A. (2001) "Long Memory and Regime Switching," *Journal of Econometrics*, Vol. 105, No. 1, pp. 131–159.
- Ding, Z., Granger, C. W. J. and Engle, R. F. (1993) "A

- Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model," *Journal of Empirical Finance*, Vol. 1, No. 1, pp. 83–106.
- Engle, R. F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, Vol. 50, No. 7, pp. 987-1007.
- Forsberg, L. (2002) On the Normal Inverse Gaussian Distribution in Modeling Volatility in the Financial Markets, Ph. D. Dissertaion, Department of Information Science, Uppsala University.
- Forsberg, L. and Bollerslev, T. (2002) "Briding the Gap between the Distribution of Realized (ETC) Volatility and ARCH Modelling (of the Euro): The GARCH-NIG Model," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 17, No. 5, pp. 535–548.
- Geweke, J. and Porter-Hudak, S. (1983) "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 4, No. 4, pp. 221-238.
- Ghysels, E., Harvey, A. C. and Renault, E. (1996) "Stochastic Volatility," in G. S. Maddala and C. R. Rao (eds.) *Handbook of Statistics*, Vol. 14, Amsterdam: Nort-Holland, pp. 119–191.
- Giot, P. and Laurent, S. (2004) "Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models," *Journal of Empirical Finance*, Vol. 11, No. 3, pp. 379–398.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E. (1993) "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5, pp. 1779–1801.
- Gonçalves, S. and Meddahi, N. (2006) "Box-Cox Transforms of Realized Volatility," Working Paper, Dépatment de sciences économiques, Université of Montréal.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005a) "A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH (1, 1)?" *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 20, No. 7, pp. 873–889.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005b) "A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-frequency Data," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 3, No. 4, pp. 525–554.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2006a) "Consistent Ranking of Volatility Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 131, No. 1–2, pp. 97–121.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2006b) "Realized Variance and Market Microstructure Noise," (with comments) Journal of Business Economic Statistics, Vol. 24, No. 2, pp. 127–218.
- Harvey, A. C. (1989) Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter, Cambridge: Cambridge University Press.
- Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005) "On Covariance Estimation of Nonsynchronously Observed Diffusion Process," *Bernoulli*, Vol. 11, No. 2, pp. 359–379.
- Janacek, G. (1982) "Determining the Degree of Differencing for Time Series via the Long Spectrum," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 3, No. 3, pp. 177–183.
- Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1987) "Test for Normal-

- ity of Observations and Regression Residuals," *International Statistical Review*, Vol. 55, No. 2, pp. 163–172.
- Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2005) "Model-free Implied Volatility and Its Information Content," Review of Financial Studies, Vol. 18, No. 4, pp. 1305–1342.
- Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2007) "Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the VIX Index," *Journal of Derivatives*, Spring, Vol. 14, No. 3, pp. 35–60.
- Karanasos, M. and Kim, J. (2006) "A Re-examination of the Asymmetric Power ARCH Model," *Journal of Empirical Finance*, Vol. 13, No. 1, pp. 113–128.
- Koopman, S. J., Jungbacker, B. and Hol, E. (2005) "Forecasting Daily Variability of the S P 100 Stock Index using Histrical, Realized and Implied Volatility Measurements," *Journal of Empirical Finance*, Vol. 12, No. 3, pp. 445-475.
- Lavielle, M. and Moulines, E. (2000) "Least-squares Estimation of an Unknown Number of Shifts in a Time Series," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 21, No. 1, pp. 33–59.
- Liu, C. and Maheu, J. M. (2006) "Are There Structural Breaks in Realized Volatility?" Working Paper, University of Toronto.
- Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978) "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models," *Biometrika*, Vol. 65, No. 2, pp. 297–303.
- Maghrebi, N. (2007) "An Introduction to the Nikkei 225 Implied Volatility Index," Keizai Riron, The Wakayama Economic Review, No. 336, pp. 35-55.
- Martens, M. and van Dijk, D. (2007) "Meauring Volatility with the Realized Range," *Journal of Econometrics*, Vol. 138, No. 1, pp. 181–207.
- Martens, M. and Zein, J. (2004) "Predicting Financial Volatility: High-Frequency Time-Series Forecasts Vis-a-Vis Implied Volatility," *Journal of Futures Markets*, Vol. 24, No. 11, pp. 1005–1028.
- Meddahi, N. (2003) "ARMA Representation of Integrated and Realized Variances," *Econometrics Journal*, Vol. 6, No. 2, pp. 335–356.
- Mincer, J. and Zarnowitz, V. (1969) "The Evaluation of Economic Forecasts," J. Mincer eds., *Economic Fore*casts and Expectations, National Bureau of Economic Research.
- Nelson, D. B. (1991) "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*,

- Vol. 59, No., pp. 347-370.
- Nishina, K., Maghrebi, N. and Kim, M. (2006) "Stock Market Volatility and the Forecasting Accuracy of Implied Volatility Indices," Discussion Papers in Economics and Business, No. 06-09, Graduate School of Economics and Osaka School of International Public Policy.
- Schoffer, O. (2003) "HY-A-PARCH: A Stationary A-PARCH Model with Long Memory," Technical Report 40/03, Fachbereich Statistik, Universität Dortmunt
- Sowell, F. (1992) "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 53, No. 1-3, pp. 165–188.
- Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2007)
 "Estimating Stochastic Volatility Models using Daily
 Returns and Realized Volatility Simultaneously,"
 Mimeo
- Thomakos, D. D. and Wang, T. (2003) "Realized Volatility in the Futures Markets," *Journal of Empitical Finance*, Vol. 10, No. 3, pp. 321–353.
- Tse, Y. K. (1998) "The Conditional Heteroskedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 13, No. 1, pp. 49-55.
- Ubukata, M. and Oya, K. (2007) "Test of Unbiasedness of the Integrated Covariance in the Presence of Noise," Working Paper, Graduate School of Economics, Osaka University.
- Ubukata, M. and Watanabe, T. (2007) "Pricing Nikkei 225 Options using Realized Volatility," Mimeo.
- Voev, V. and Lunde, A. (2007) "Integrated Covariance Estimation using High-frequency Data in the Presence of Noize," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 5, No. 1, pp. 68–104.
- Watanabe, T. and Yamaguchi, K. (2007) "Measuring, Modeling and Forecasting Realized Volatility in the Japanese Stock Market," Mimeo.
- Zhang, L. (2006) "Efficient Estimation of Stochastic Volatility using Noisy Observations: A Multi-Scale Approach," *Bernoulli*, Vol. 12, No. 6, pp. 1019-1043.
- Zhang, L., Mykland, P. A. and Ai t-Sahalia, Y. (2005) "A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility with Noisy High-frequency Data," *Journal* of the American Statistical Association, Vol. 100, No. 472, pp. 1394–1411.