

整合的選好・順序拡張の存在定理・選択関数の合理化可能性

鈴木興太郎*

無差別関係の推移性は、人間が無限に精密な識別能力をもつことを要求する点で、選好関係の正則性の要請としては明らかに非現実的である。この欠陥を免れた正則性の概念として、鈴木(1976; 1983)は「整合性」(consistency)の概念を導入して、選好と選択の理論でこの概念が果たす中心的な役割を明らかにした。本稿は、二項関係の順序拡張の存在、選択関数の合理化可能性という2つの論脈で、整合的選好の概念が果たす重要な役割を解明した最近の成果を体系的に述べ、その意義を評価することを課題としている。セン(1969; 1970)がつとに導入した「準推移性」(quasi-transitivity)の概念も、無差別関係の推移性を放棄して強意の選好の推移性に焦点を合わせた点では、動機付けの点で鈴木の整合性概念と共通する性格をもっているが、本稿が注目する二項関係の順序拡張と選択関数の合理化の論脈では、準推移性の概念は重要な役割を果たせないことに注意すべきである。

1. はじめに

標準的なミクロ経済学に登場する消費者は、消費集合のうえで定義される弱意の選好順序を予算制約にしたがって最適化するように行動するという意味で、《合理的》(rational)な経済単位と仮定されている。消費者の選好を実数値で表現する効用関数が存在すれば、彼/彼女の弱意の選好関係は、明らかに順序の公理——完備性・反射性・推移性——を満足する。したがって、合理性仮説がしばしば順序仮説と表裏一体であるかに思われてきたことには、それなりの理由があることは認められてよい。とはいえ、消費者の弱意の選好が順序の公理——とりわけ《推移性》(transitivity)——を満足するという要請には、経験的にみれば異論の余地が大きいことも事実である。ダンカン・ルース(1956, p. 179)が挙げた401杯のコーヒーの例は、弱意の選好の推移性によって含意される無差別関係の推移性に的を絞って、この事実を卓抜な論法で示したものである：

Find a subject who prefers a cup of coffee with one cube of sugar to one with five cubes (this should not be difficult). Now prepare 401 cups of coffee with $(1+i/100)x$ grams of

sugar, $i=0, 1, \dots, 400$, where x is the weight of one cube of sugar. It is evident that he will be indifferent between cup i and cup $i+1$, for any i , but by choice he is not indifferent between $i=0$ and $i=400$.

弱意の選好の推移性のもうひとつの重要な含意は、強意の選好の推移性である。選択肢 A は選択肢 B よりも強い意味で好ましく、選択肢 B は選択肢 C よりも強い意味で好ましければ、選択肢 A は選択肢 C よりも強い意味で好ましいことを要請するこの公理には異論の余地が遥かに少なく、この仮説に違反する事例が指摘されても、むしろ反例の方にこそ問題があると切り返されることが多い。この主旨の反論の一例は、ハワード・ライフ(1968, p. 78)が提出したマネー・ポンプの議論である：

It's fun to argue with someone like Jones who registers these choices and obstinately refuses to change his mind.

“Suppose, Mr. Jones, that you have just been given the deed to property A and now the realtor offers you C for a small premium. If your preferences mean anything, they certainly mean that you would be willing to pay

this tiny premium to exchange A for C Okay, now you have C . Next suppose the realtor offers you B for another tiny premium. Certainly you should be willing to pay this premium to get B rather than stay with C Okay, now you have B . But why stay with B when for a small premium you can switch to A ? After all, you say you prefer A to B Okay, now you have A . But why stop here? Do you still insist you prefer C to A ? You do? ... Well, for a small premium ... Are you sure, Mr. Jones, you don't want to change your mind?"

Mr. Jones is known in the vernacular as a "money-pump". Although we can rationalize why Jones acts the way he does, would *you* act this way? Or, more precisely, would you ever maintain a set of intransitive choices, if you were made aware of this and had the opportunity to change?

このような経緯を背景に、弱意の選好の推移性は放棄するが強意の選好の推移性は維持する方向に選好の正則性の仮説を修正して、選好と選択の理論におよぶその影響を検討する主旨の研究が、主として1970年代以降に行われてきている。この主旨の研究の代表例としては、アマルティア・セン(1969; 1970)による《準推移性》(quasi-transitivity)の概念の導入と、鈴木(1976; 1983)による《整合性》(consistency)の概念の導入が挙げられる。本稿は、二項関係の《順序拡張》(ordering extension)と選択関数の《合理化》(rationalization)という2つの論脈で最近収められた成果に照らして、これらの概念の射程距離の比較を行うことを目的としている。まず、本稿で用いられる基本的な概念の定義から本論に入ることにしたい。

2. 推移性・準推移性・整合性・非循環性

以下の考察のキャンバスとして、 X は選択枝の普遍集合であって、少なくとも3つの選択枝を含むものとする。 R 、 R^* などは集合 X 上

の二項関係を表わすものとする。 X の任意の要素 $x, y(x \neq y)$ に対して $(x, y) \in R$ あるいは $(y, x) \in R$ が必ず成立する場合には、 R は《完備性》(completeness)をもつという。 X の任意の要素 x に対して $(x, x) \in R$ が必ず成立する場合、 R は《反射性》(reflexivity)をもつという。 X の任意の要素 x, y, z に対して $(x, y) \in R$ および $(y, z) \in R$ であれば $(x, z) \in R$ が必ず成立する場合、 R は《推移性》(transitivity)をもつという。反射性と推移性を満足する二項関係は《準順序》(quasi-ordering)であるといい、完備性を満足する準順序は《順序》(ordering)であるという。

次に、二項関係 R の非対象成分 $P(R)$ と対称成分 $I(R)$ を、

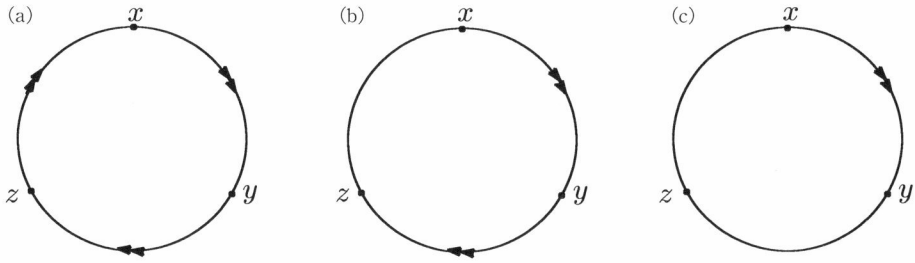
$$(x, y) \in P(R) \Leftrightarrow (x, y) \in R \& (y, x) \notin R;$$

$$(x, y) \in I(R) \Leftrightarrow (x, y) \in R \& (y, x) \in R$$

によって定義する。 R が弱意の選好関係であって、 $(x, y) \in R$ が成立するのは、選択枝 x が選択枝 y と比較して少なくとも同程度に好ましい場合、そしてその場合に限られるときであるならば、 $P(R)$ と $I(R)$ はそれぞれ強意の選好関係と無差別関係を表現することは明らかである。容易に確認できるように、 R が推移性を満足する場合には、 $P(R)$ と $I(R)$ も明らかに推移性を満足する。だが、ルースのコーヒーの例が示すように、 $I(R)$ の推移性は選択主体が選択枝の差異に関して無限に精密な識別能力を備えていることを、暗黙のうちに要求している。この事実から、 R の推移性の要求それ自体も非現実的に過酷な要求を選択主体に課していることが判明する。そこで、セン(1969; 1970)は無差別関係 $I(R)$ の推移性の要求を放棄して強選好関係 $P(R)$ の推移性の要求のみを R に課して、この弱い要求を満足する R は《準推移性》(quasi-transitivity)をもつと定義したのである。彼の目的にとっては、この選択は実り多いものだった¹⁾。

鈴木(1976; 1983)が導入した整合性の概念は、 R の推移性の要求をセンとは異なる方向に弱

図1. 推移性を満足しない選好の例



選択肢 a から選択肢 b に向かう二重の矢印は、 a が b より強い意味で選好されることを示している。また、選択肢 a と選択肢 b が矢印をもたない曲線で連結されている場合には、 a は b と無差別であることが示されている。明らかに、3つの選択肢 x, y, z に対して、完備性をもつが推移性をもたない選好の例は、この図の3つのケースで全部の可能性が尽くされている。

図2. 非循環的選好が排除するサイクル

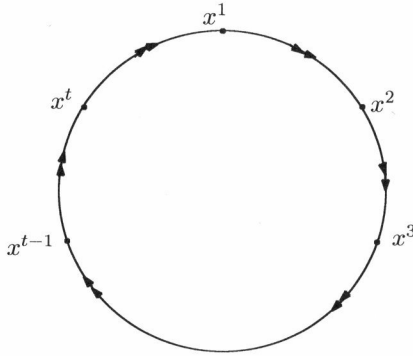
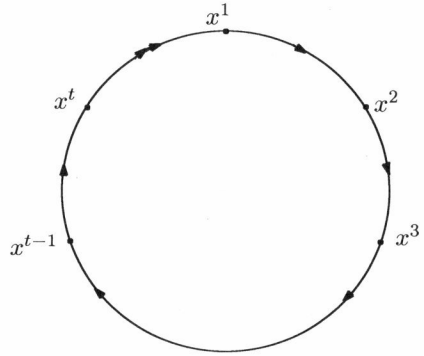
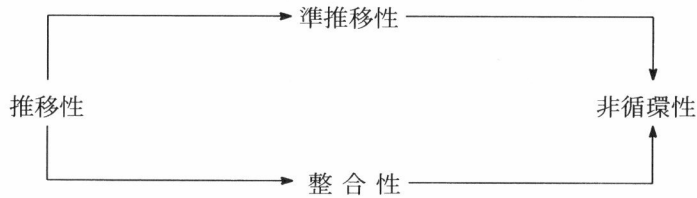


図3. 整合的選好が排除するサイクル



選択肢 x^s から選択肢 x^{s+1} に向かう一重の矢印は、 x^s が x^{s+1} より弱い意味で選好されることを示している。

図4. 推移性・準推移性・整合性・非循環性



めたものであって、その直観的な意味はライフのマネー・ポンプの議論を思い起こせば容易に理解することができる。選択肢の普遍集合 X の部分集合 $\{x^1, x^2, \dots, x^t\} (2 \leq t < +\infty)$ で、

$$(x^1, x^2) \in R, (x^2, x^3) \in R, \dots, (x^{t-1}, x^t) \in R, (x^t, x^1) \in P(R)$$

を満足するものが存在しないとき、二項関係 R は《整合性》(consistency)を満足するという。また、選択肢の普遍集合 X の部分集合 $\{x^1, x^2, \dots, x^t\} (2 \leq t < +\infty)$ で、

$$(x^1, x^2) \in P(R), (x^2, x^3) \in P(R), \dots, (x^{t-1}, x^t) \in P(R), (x^t, x^1) \in P(R)$$

を満足するものが存在しないとき、二項関係 R は《非循環性》(acyclicity)をもつという。推移性、準推移性、整合性、非循環性の概念の相互関係を理解するためには、前頁の図1—図4が有用である。

図1は、完備性をもつ推移的な二項関係のもとでは決して発生しない3つの選択肢の間の循環的な関係を列挙したものである。これに対して、完備性をもつ準推移的な二項関係のもとでは決して発生しない3つの選択肢の間の循環的な関係は、図1のうちで(a)、(b)の2種類のものに限られている。図2は、非循環的な二項関係のもとでは決して発生しない t 個の選択肢の間の循環的な関係を例示したものである。図3は、整合的な二項関係のもとでは決して発生しない t 個の選択肢の間の循環的な関係を例示している。これらの例示からも明らかなように、そして定義に即して厳密に確認することも容易であるように、推移性、準推移性、整合性、非循環性の概念相互間には、図4に示されたような論理的な含意関係が成立する。この図において、性質Aから性質Bに向かう矢印は、性質Aを満足する二項関係は必ず性質Bをも満足することを示しているが、逆向きの論理的な含意関係は一般には成立しない。

3. Szpilrajn の拡張定理とその一般化

選好と選択の理論において基本的な役割を担う分析道具のひとつは、二項関係の拡張定理である。集合 X 上の二項関係 R に対して、 $R \subset R^*$ 、 $P(R) \subset P(R^*)$ を満足する二項関係 R^* は R の《拡張》(extension)であるという。特に、 R の拡張 R^* が順序の公理を満足する場合、 R^* は R の《順序拡張》(ordering extension)であるという。ケネス・アロー(1951)によって最初に経済学に導入されて以来、しばしば重要な役割を果たしてきた順序拡張定理は、以下の古典的な成果である²⁾。

順序拡張定理1 [Szpilrajn(1930)]

準順序に対しては、必ずその順序拡張が存在する。

順序拡張定理1は確かに重要だが、この定理は順序拡張が存在するための十分条件を明らかにするのみで、その必要十分条件を明らかにしてはいない。この欠落を完全に塞いだ成果こそ、鈴木(1976; 1983)による以下の成果である。

順序拡張定理2 [Suzumura(1976)]

二項関係 R に対してその順序拡張が存在するための必要十分条件は、 R が整合性の公理を満足することである。

厚生経済学において順序拡張定理が果たす役割を明らかにするために、アロー(1951)は定理2とは異なる方向を目指す定理1の一般化を試みて、次の重要な成果を得た。

順序拡張定理3 [Arrow(1951, pp. 64-68)]

二項関係 Q は集合 X 上の準順序であり、 S は X の部分集合で $x \neq y, x, y \in S$ に対しては $(x, y) \in Q$ を満足するものとする。さらに、 T は S 上で定義される任意の順序とする。そのとき、 Q の順序拡張 R が存在して $R \cap (S \times S) = T$ を満足する。

定理1は、定理3において $S = \emptyset$ とした特殊ケースである。また、定理3の固有の意義を理解するためには、普遍集合 X は論理的に可能な資源配分状態の集合であり、二項関係 Q は《パレート準順序》(Pareto quasi-ordering)であるものと仮定することが有益である。定義により、 $(x, y) \in Q$ が成立するのは、社会を構成するすべてのひとびとが x は y と比較して少なくとも同程度に望ましい資源配分状態であると考えている場合である。 S に所属する資源配分状態は、パレート準順序によっては優劣の比較ができないものと仮定されている。別の表現をすれば、 S はパレート効率的な資源配分状態の集合である。そのとき、定理3は S に所属する資源配分状態をランク付けるいかなる順序 T ——社会厚生順序——が与えられた場合にも、パレート準順序 Q の順序拡張 R で、 S に限定すれば順序 T と一致するものが存在す

ることを保証しているわけである。

このように、定理3の主張内容は興味深いものではあるが、この場合にも定理をさらに一般化する余地が残されている。この点を明らかにするための準備作業として、任意の2つの二項関係 Q^1, Q^2 に対して、それらの《結合》(composition) $Q^1 \circ Q^2$ を

$$Q^1 \circ Q^2 = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X : (x, z) \in Q^1 \& (z, y) \in Q^2\}$$

で定義する。次に、任意に与えられた X 上の二項関係 Q に対して、 X 上の二項関係の無限列 $\{Q^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ を $Q^{(1)} = Q, Q^{(s)} = Q \circ Q^{(s-1)} (2 \leq s < +\infty)$ によって定義する。そのとき、二項関係 Q の《推移的閉包》(transitive closure) $\tau(Q)$ は

$$\tau(Q) = \bigcup_{s=1}^{\infty} Q^{(s)}$$

によって定義される。よく知られているように、 Q の推移的閉包 $\tau(Q)$ は Q を包含する最小の推移的二項関係であって、 Q それ自体が推移性を持つのは $Q = \tau(Q)$ が成立するとき、そしてそのときのみである。この概念を活用すれば、定理3を一般化して、以下の定理を述べることができる。

順序拡張定理4 [Suzumura (2004)]

Q は集合 X 上の二項関係であり、 S は X の部分集合で $x \neq y, x, y \in S$ に対しては $(x, y) \in \tau(Q)$ を満足するものとする。さらに、 T は S 上の順序とする。そのとき、 Q の順序拡張 R が存在して $R \cap (S \times S) = T$ を満足するための必要十分条件は、 Q が整合性の公理を満足することである。

定理4は二項関係 Q それ自体が推移性をもつ特殊ケースではアローの定理3を含意するし、 $S = \emptyset$ という特殊ケースでは定理2を含意することは明らかである。定理2は定理1の一般化なので、定理4はこれまでに言及した順序拡張

定理をすべて包含する一般定理であることは明らかである³⁾。

定理4の証明は、アローの定理3に対する Inada (1954) の別証明を活用して与えることができる。証明の具体的詳細に興味をもたれる読者には Suzumura (2004) および Bossert and Suzumura (2005, Chapter 2) を参照して戴くことにして、以下では十分性の証明の輪郭のみを説明しておきたい。

【ステップ1】 対角的二項関係 Δ を

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

によって定義して、新たな二項関係 Q^* を

$$Q^* = \Delta \cup \tau(Q)$$

によって定義する。そのとき Q^* は X 上で準順序の公理を満足する。

【ステップ2】 T および Q^* に基づいて、新たな二項関係 Q^{**} を

$$Q^{**} = Q^* \cup (Q^* \circ T) \cup (Q^* \circ T \circ Q^*) \cup (T \circ Q^*) \cup T$$

によって定義する。この Q^{**} も X 上の準順序である。

【ステップ3】 Q^{**} は Q^* の拡張である。

【ステップ4】 任意の $x, y \in S$ に対して、 $(x, y) \in T$ ならば $(x, y) \in Q^{**}$ である。

【ステップ5】 Q の順序拡張 R が存在する。

【ステップ6】 任意の $x, y \in S$ に対して、 $(x, y) \in R$ が成立するのは $(x, y) \in T$ であるとき、そしてそのときのみである。

ステップ2の証明のうちで、推移性の証明は長く多少は手が込んでいるが、基本的には Q^{**} の定義にしたがって可能なケースを丹念に調べることにつきている。■

本節の最後に、二項関係の順序拡張の可能性に対しては、推移性を弱めて強意の推移性のみ

を残した準推移性の概念は、まったく果たすべき役割を持っていないことを指摘しておきたい。順序拡張の存在可能性にとって決定的な分水嶺となる概念は整合性であって、準推移性ではないのである。

4. 選択関数の合理化可能性定理

整合性の概念に関する重要な知見のひとつは、選択関数の《合理化可能性》(rationalizability)を巡って最近発見されている。本節ではこの分析角度から整合性の概念に新たな光を当てておきたい。

経済学の根底にある概念でありつつ、合理性の概念の公理主義的分析が軌道に乗ったのは、意外にも比較的最近のことである。サミュエルソン(1938; 1947; 1948; 1950)、ハウタッカー(1950)の完全競争市場における消費者行動の《顕示選好理論》(revealed preference theory)に基礎を据えつつ、リクター(1966; 1971)は選択行動の合理性に対して、ある目標を最適に達成する行動と理解できる行動こそ、合理的な行動であるという定義を与えて、その公理化の試みの端緒を開いたのである。経済学の歴史を振り返ると、リクターが形式化した合理性の概念は目的合理性の概念として広く採用されてきたものであって、その一例はピグーの《旧》厚生経済学批判の論脈で専ら検討の俎上に載せられてきたロビンズ(1932)の名著『経済学の本質と意義』に発見することができる。

最適化行動としての合理的選択の理論の源泉をリクターに求めることに対しては、恐らく異論の余地がある。例えば、アロー(1959)はサミュエルソン＝ハウタッカーの顕示選好の理論を競争的消費者の行動に関する理論という狭い枠から解放して、顕示選好の理論の公理主義的な再構成に対して決定的な一步を踏み出した先行業績である。とはいえ、アローはサミュエルソン＝ハウタッカーの理論が前提した完全競争市場における予算制約集合という《定義域制約》(domain restriction)を放棄して、普遍集合の有限部分集合はすべて選択行動の定義域に所属するという新たな定義域制約を課したのであっ

て、普遍集合の任意の部分集合族として選択行動の定義域を定めるアプローチは、リクター(1966)によって開始されたものなのである。

アロー、リクター以降の合理的選択の理論の研究は、その大部分がアローの定義域制約を継承して——あるいは僅かに一般化して——行われてきた⁴⁾。現在までのところ、リクターの一般的定義域を継承して行われた合理的選択の理論の研究はハンソン(1968)と鈴木(1976; 1983, Chapter 2, Appendix A)を挙げ得るにすぎない。

最近 Bossert, Sprumont and Suzumura (2005a; 2005b; 2005c)は合理的選択の理論の完成を目指して一連の研究を公開しつつあるが、これらの研究を一層包括的に総合する研究も Bossert and Suzumura (2005a; 2005b)によって準備されている。以下ではこれらの研究の性格を例示するものとして、Bossert, Sprumont and Suzumura (2005a)に依拠して《整合的合理化》(consistent rationalizability)という概念の公理的特徴付けのみを説明することにしたい。

合理的選択の理論の基礎概念を説明するために、選択枝の普遍集合 X の任意の非空部分集合族 K を定義域とする関数 C ——《選択関数》(choice function)——を定義する。任意の $S \in K$ は選択枝の《機会集合》(opportunity set)と呼ばれて、その上で関数 C がとる値 $C(S)$ は、機会集合 S からの《選択集合》(choice set)と呼ばれている。以下では、任意の機会集合 $S \in K$ に対する選択集合は、 $\emptyset \neq C(S) \subset S$ という条件を満足するものと仮定する。次に、与えられた選択関数 C から導出される《顕示選好関係》(revealed preference relation) R_C を

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X : (x, y) \in R_C \\ \Leftrightarrow \exists S \in K : x \in C(S) \text{ and } y \in S \end{aligned}$$

によって定義する。 R_C は選択関数 C によって具体化された選択行動によって顕示される弱意の選好関係なのである。選択関数 C は、その選択行動に内在するある選好関係 R が存在して、その選好を与えられた機会集合の制約下で最適化する行動として統一的に理解できる場合

には、《合理的》(rational)な選択関数であるという。形式的に表現すれば、

$$(G) \quad \exists R \subset X \times X, \forall S \in K: \\ C(S) = \{x \in S \mid \forall y \in S: (x, y) \in R\}$$

を満足する選択関数 C は合理的な選択関数なのである。この概念に関しては、3つの注意が必要である。第1に、選択関数 C を合理化する選好関係 R は、選択環境を指定する機会集合 $S \in K$ がどのようなものであっても一様に、 S からの選択を選好最適化として説明できることが必要である。第2に、選好最適化の表現方法としては、(G)は決してユニークな方法ではなく、経済学ではなじみの深い別の方法がある。厚生経済学において中心的な役割を担うパレート最適性の概念は、この方法を用いて定義されたグループ選好最適化の表現であると考えられる：

$$(M) \quad \exists R \subset X \times X, \forall S \in K: \\ C(S) = \{x \in S \mid \forall y \in S: (y, x) \notin P(R)\}.$$

合理的選択の理論は多くの場合(G)定義に基づいて展開されてきたが、Suzumura (1976a)によって最初に導入された(M)定義に基づく合理的選択の理論には、多くの点で固有の意義がある。本稿では(G)定義に基づく合理的選択の理論に考察の対象を限定する。さらに興味をもたれる読者には Bossert, Sprumont and Suzumura (2005c)および Bossert and Suzumura (2005a)の参照を求めたい。第3に、選択関数の合理性は選択行動に内在する動機——選択を選好最適化と理解することを可能にする内在的選好関係——の存在を問うものであって、内在的選好関係それ自体がもつ性質——例えば完備性、反射性、推移性——を必ずしも要請してはいない。この事実を逆用すれば、われわれは内在的選好関係に課される要請を梃子として、合理性の《程度》(degree)を体系的に列挙して、それぞれの程度の合理的選択関数を公理的に特徴付けるというリサーチ・プログラムを構想することが

できる。

リクター(1966; 1971)の大きな功績は、このリサーチ・プログラムを初めて組み上げた上で、いわばその両端に位置する2つの合理性概念——《完全合理性》(full rationality)と《合理性それ自体》(rationality *per se*)——の公理化に成功したことにある⁵⁾。選択関数 C が完全合理性をもつ場合とは、 C を(G)の意味で合理化する選好関係 R が順序の公理を満足する場合である。また、選択関数 C が合理性それ自体をもつ場合とは、 C を(G)の意味で合理化する選好関係 R が、その他の性質の如何を問わず、ともかく存在する場合である。

リクターの公理化は、以下の2つの公理を用いて行われている。

直接的顯示との一貫性(Direct Revelation Coherence)

任意の $S \in K$ および任意の $x \in S$ に対して

$$\forall y \in S: (x, y) \in R_C \Rightarrow x \in C(S)$$

が成立する。

推移的閉包との一貫性(Transitive Closure Coherence)

任意の $S \in K$ および任意の $x \in S$ に対して

$$\forall y \in S: (x, y) \in \tau(R_C) \Rightarrow x \in C(S)$$

が成立する。

リクターの合理化可能性定理は以下の2つの命題から構成されている。

合理化可能性定理1 [Richter(1966; 1971)]

選択関数 C が合理性それ自体をもつのは、 C が直接的顯示との一貫性をもつ場合、そしてその場合のみである。

合理化可能性定理2 [Richter(1971)]

選択関数 C が完全合理性をもつのは、 C が

推移的閉包との一貫性をもつ場合、そしてその場合のみである⁶⁾。

リクターの2つの定理は、合理的選択の理論の枠組みを明瞭にする上で画期的な業績である。だが、合理性の程度に関するスペクトラムに関しては、リクターの定理がその両端点を特徴付けることに成功してから、準推移性、整合性、非循環性のいずれに関しても、公理化の成功例はまったくなく、整合性に関しては、その試みさえも存在しなかった⁷⁾。最近の論文 Bossert, Sprumont and Suzumura (2005a; 2005b) および Bossert and Suzumura (2005a; 2005b) はこの欠落を完全に補填して、サミュエルソン=ハウタッカーの顕示選好理論に端を発した長い研究史にピリオドを打ったのである。以下では整合的合理化に対する公理化に的を絞って、最近の発展の一側面を報告することにした。

整合的合理化の考察の補助手段として、《整合的閉包》(consistent closure) の概念を新たに導入したい。任意の二項関係 Q に対して、その整合的閉包 $\sigma(Q)$ を

$$\sigma(Q) = Q \cup \{(x, y) | (x, y) \in \tau(Q) \& (y, x) \in Q\}$$

によって定義する。そのとき、 $\sigma(Q)$ は Q を包含する最小の整合的二項関係であって、 Q それ自体が整合性をもつのは $Q = \sigma(Q)$ が成立するとき、そしてそのときのみであるという顕著な性質が成立する。また、推移的閉包との比較においては、任意の二項関係 Q に対して $\sigma(Q) \subset \tau(Q)$ が成立することも、容易に確認することができる。この概念を用いれば、推移的閉包との一貫性の公理の定式化とパラレルに、以下の公理を定式化することができる。

整合的閉包との一貫性 (Consistent Closure Coherence)

任意の $S \in K$ および任意の $x \in S$ に対して

$$\forall y \in S : (x, y) \in \sigma(R_C) \Rightarrow x \in C(S)$$

が成立する。

この公理によって整合的な合理的選択可能性を特徴付ける際には、ひとつの留意すべき点がある。整合的二項関係 Q が完備性をもつ場合には、 Q は推移的でもある——したがって順序である——という点がそれである。順序による合理化の必要十分条件は既にリクターの合理化可能性定理2によって明らかにされているために、われわれに残されている問題は完備性をもたない整合的二項関係による合理化可能性である。次の定理はこの設問に対する完全な解答を与えている。

合理化可能性定理3 [Bossert, Sprumont and Suzumura (2005a)]

選択関数 C が完備性をもたない整合的合理化をもつのは、 C が整合的閉包との一貫性をもつ場合、そしてその場合のみである。

5. おわりに

本稿は、整合性という必ずしもよく知られていない概念を中核において、選好と選択の理論における最近の2、3の発展の輪郭を述べたものである。考察の出発点は、標準的な経済学ではあたかも自明の公理であるかに仮定される推移性の概念である。消費者選択の理論を例にとれば、選好関係の推移性を仮定するということには消費者が選択対象に含まれる微細な差異でも完璧に識別できる能力をもつという非現実的な含意をもっている。そのため、このような含意をもたらず無差別関係の推移性を捨てて、強意の選好関係の推移性のみを仮定する準推移性の概念がセンによって導入されて、大きな影響力を振るってきた。整合性はその動機付けの点では準推移性と共通する点をもっているが、論理的には独立であり、両者共に推移性より弱く非循環性より強いという性質をもっている。しかも、二項関係が順序拡張をもつための必要十分条件はまさしく整合性であるという顕著な性質をもつことから、整合性の概念は選好と選択の理論において重要な機能を担うことが例示

された。また、選択関数の合理化可能性に関する最近の研究においても、整合的な選好関係による選択行動の合理化という問題において、整合的閉包という新たな概念が中核的な機能を果たしていることも示された。これらの例証によって、整合性の概念に対する理解と活用が推進されることを期待したい。

(一橋大学経済研究所)

注

* 本稿の背景にある研究は、ロンドン・スクール・オブ・エコノミクス、京都大学経済研究所、オックスフォード大学オール・ソウルズ・カレッジ、ハーヴァード大学哲学部、ケンブリッジ大学トリニティ・カレッジで行った研究に基礎をおいている。30年の長きに渡って討論や私信で私の研究にさまざまな影響を与えて下さった方々、特に Kenneth J. Arrow, Amartya K. Sen, Prasanta K. Pattanaik, Peter J. Hammond, Walter Bossert, Yongsheng Xu の各氏には、心からの感謝を捧げたい。

1) センが準推移性の概念を導入した目的は、アローの一般可能性定理が社会的選好の無差別関係から推移性を捨てさえすれば回避されることを例示するためだった。彼が定義した《パレート無差別原理》(Pareto indifference principle)は、この事実を例証する目的で導入された社会的選択ルールだった。

2) 本来の Szpilrajn の定理はここで述べる形式の定理とは異なっているが、本稿の目的にとってはアローが与えた形式の取扱いの方が都合なので、以下ではアローの形式に従うことにした。

3) Szpilrajn の順序拡張定理をさらに一般化する別の方向としては、Duggan(1999)を参照せよ。また、普遍集合にトポロジーを導入して二項関係に連続性を要請して、拡張定理を別の方向に拡充する試みについては、Jaffray(1975)および Bossert, Sprumont and Suzumura(2002)を参照せよ。

4) この主旨の研究を代表する数例としては、Blair, Bordes, Kelly and Suzumura(1976), Schwartz(1976), Sen(1971)を挙げることができる。

5) 完全合理性と合理性それ自体という表現はわれわれが選択した用語法であって、リクターによって用いられたものではない。

6) 完全合理性を公理化する同値な条件を発見した貢献として、Hansson(1968)と鈴村(1977)を挙げておきたい。

7) これはリクターの一般的定義域を前提した場合に関する主張であって、普遍集合の有限部分集合はすべて選択行動の定義域に所属するというアローの定義域制約を課した場合には、準推移性と非循環性を課した合理化可能性定理は数多く得られている。代表的な成果の数例としては、Blair, Bordes, Kelly and Suzumura(1976), Schwartz(1976), Sen(1971)を挙げ

ることができる。

参考文献

Armstrong, W. E. (1948) "Uncertainty and the Utility Functions," *Economic Journal*, Vol. 58, No. 1, pp. 1-10.

Arrow, K. J. (1951; second ed. 1963) *Social Choice and Individual Values*, New York: Wiley(長名寛明訳『社会的選択と個人的評価』日本経済新聞社, 1977年).

Arrow, K. J. (1959) "Rational Choice Functions and Orderings," *Economica*, Vol. 26, No. 102, pp. 121-127.

Blair, D. H., Bordes, G., Kelly, J. S., and K. Suzumura (1976) "Impossibility Theorems without Collective Rationality," *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 3, pp. 361-379. Reprinted in Arrow, K. J. and G. Debreu, eds., *The Foundations of 20th Century Economics, Vol. 3, Landmark Papers in General Equilibrium Theory, Social Choice and Welfare*, Cheltenham, Glos: Edward Elgar, 2001, pp. 660-678.

Bossert, W., Sprumont, Y., and K. Suzumura (2002) "Upper Semicontinuous Extensions of Binary Relations," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 37, No. 3, pp. 231-246.

Bossert, W., Sprumont, Y., and K. Suzumura (2005a) "Consistent Rationalizability," *Economica*, Vol. 72, No. 286, pp. 185-200.

Bossert, W., Sprumont, Y., and K. Suzumura (2005b) "Rationalizability of Choice Functions on General Domains Without Full Transitivity," forthcoming in *Social Choice and Welfare*.

Bossert, W., Sprumont, Y., and K. Suzumura (2005c) "Maximal-Element Rationalizability," forthcoming in *Theory and Decision*.

Bossert, W., and K. Suzumura (2005a) "Rational Choice on Arbitrary Domains: A Comprehensive Treatment," Working Paper, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University.

Bossert, W., and K. Suzumura (2005b) *Rational and Coherent Choice*, monograph in progress.

Duggan, J. (1999) "A General Extension Theorem for Binary Relations," *Journal of Economic Theory*, Vol. 86, No. 1, pp. 1-16.

Hansson, B. (1968) "Choice Structures and Preference Relations," *Synthese*, Vol. 18, pp. 443-458.

Houthakker, H. S. (1950) "Revealed Preference and the Utility Function," *Economica*, Vol. 17, No. 66, pp. 159-174.

Inada, K. -I. (1954) "Elementary Proofs of Some Theorems about the Social Welfare Function," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 6, No. 1, pp. 115-122.

Jaffray, J. -F. (1975) "Semicontinuous Extension of a Partial Order," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 2, No. 3, pp. 395-406.

- Luce, R. D. (1956) "Semiorders and the Theory of Utility Discrimination," *Econometrica*, Vol. 24, No. 2, pp. 178-191.
- Raiffa, H. (1968) *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choice under Uncertainty*, Reading, Mass.: Addison-Wesley.
- Richter, M. K. (1966) "Revealed Preference Theory," *Econometrica*, Vol. 34, No. 3, pp. 635-645.
- Richter, M. K. (1971) "Rational Choice," in Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., and H. F. Sonnenschein, eds., *Preferences, Utility, and Demand*, New York: Harcourt Brace Jovanovich, pp. 29-58.
- Robbins, L. (1932; second ed. 1935) *An Essay on the Nature and Significance of Economic Science*, London: Macmillan (中山伊知郎監修, 辻六兵衛訳『経済学の本質と意義』東洋経済新報社, 1957年).
- Samuelson, P. A. (1938) "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour," *Economica*, Vol. 5, No. 17, pp. 61-71.
- Samuelson, P. A. (1947; second ed. 1983) *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press (佐藤隆三[初版]訳『経済分析の基礎』勁草書房, 1967年).
- Samuelson, P. A. (1948) "Consumption Theory in Terms of Revealed Preference," *Economica*, Vol. 15, No. 59, pp. 243-253.
- Samuelson, P. A. (1950) "The Problem of Integrability in Utility Theory," *Economica*, Vol. 17, No. 67, pp. 355-385.
- Schwartz, T. (1976) "Choice Functions, 'Rationality' Conditions, and Variations on the Weak Axiom of Revealed Preference," *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 3, pp. 414-427.
- Sen, A. K. (1969) "Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions," *Review of Economic Studies*, Vol. 36, No. 3, pp. 381-393.
- Sen, A. K. (1970) *Collective Choice and Social Welfare*, San Francisco: Holden-Day (志田基与師監訳『集合的選択と社会的厚生』勁草書房, 2000年).
- Sen, A. K. (1971) "Choice Functions and Revealed Preference," *Review of Economic Studies*, Vol. 38, No. 115, pp. 307-317.
- Suzumura, K. (1976a) "Rational Choice and Revealed Preference," *Review of Economic Studies*, Vol. 43, No. 133, pp. 149-158.
- Suzumura, K. (1976b) "Remarks on the Theory of Collective Choice," *Economica*, Vol. 43, No. 172, pp. 381-390.
- Suzumura, K. (1977) "Houthakker's Axiom in the Theory of Rational Choice," *Journal of Economic Theory*, Vol. 14, No. 2, pp. 284-290.
- Suzumura, K. (1978) "On the Consistency of Libertarian Claims," *Review of Economic Studies*, Vol. 45, No. 140, pp. 329-342. "A Correction," *Review of Economic Studies*, Vol. 46, 1979, p. 743.
- Suzumura, K. (1983) *Rational Choice, Collective Decisions and Social Welfare*, Cambridge University Press.
- Suzumura, K. (2004) "An Extension of Arrow's Lemma with Economic Applications," Working Paper, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University.
- Szpilrajn, E. (1930) "Sur l'Extension de l'Ordre Partiel," *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 16, pp. 386-389.
- Uzawa, H. (1957) "Notes on Preference and Axioms of Choice," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 8, No. 1, pp. 35-40.