
丸 山 徹

『数理経済学の方法』

創文社 1995. 12 xiv+653 ページ

本書は「数理経済学の方法」と題され、最近活発に研究されている数理経済学の問題を非線形及び凸解析学、微分位相幾何学的立場から論じようというものである。

日本の数学、いや世界の数学はどちらかというと物理学あるいは工学に刺激をうけて発展してきた傾向があるが、今や数学は経済学から刺激されて、大きな進歩を遂げようとしている。凸解析学、多価写像の解析学、最適化理論などがそのよい例であろう。一方経済学も数学を刺激するばかりではなく、数学の発展によって大きな成長を遂げているのが現状であるように思える。

著者の丸山氏は少壮の研究者時代から数理経済学と関数解析学の問題を追求してきた人で、本書ではその接点が見事に解説されている。特に最近の話題

である数理経済学と非線形解析学の問題が心にくいばかりに書かれている。

「序」がこの本の方向を決定づけている。「経済分析のために知っておくと便利なたくさんの結果を、要領よく手短かに提供する」といった企ては、私の全く意図するところではない。むしろ逆に、経済学上の重要な意義をもつ比較的少数の数学的原理を選び出し、その全貌を、体系的に注意深く読者に伝えることが私の念願である」と。確かにこれまでの数理経済学の本の多くは「知っておくと便利な結果」がたくさんのってはいるが、本論に入って必ずしもその結びつきや使われ方が、上手に解説されていたとはいいがたい。本書はその結びつきや使われ方が上手に解説されていて、数学のみを学んだものにも読める数理経済学の本であると思う。数学をよく知っている経済学者の説明はむしろ数学的であり、わかりやすい。それは母国語でない人の上手な英語がとてもわかりやすい英語であるのと同じではないだろうか。あれもこれもというのではなく、「Minimum Essentials」を追求し、著者の意図するところを「ごまかし」なく伝えることこそ、その道のプロとしての考え方ではないだろうか。その意味からも「経済学上の重要な意義をもつ比較的少数の数学的原理を選び出し、その全貌を、体系的に伝えたい」という精神には拍手をおくりたい。本書ではこの「比較的少数の数学的原理」として、非線形解析学のいくつかの方法(多価写像の解析学、不動点定理)や微分位相幾何学の考え方が主要なテーマとして選ばれている。確かに経済現象はたくさんあり、それを解明する経済理論も実に多い。もちろん昔からの数理経済学の方法だってとても重要であり、共通に理解し得るものである。しかし現代経済学の動向に鑑みて、著者は非線形解析学の基礎知識と微分位相幾何学の考え方が数理経済学では重要であると思い、それらを本書の主要テーマにしたのであろう。

内容は非常に明快に述べられている。各章の題名をあげておこう。

1. 集合と写像
2. 位相数学の基礎
3. 函数空間論の基礎
4. 凸解析
5. 微分の基礎理論
6. 多変数函数の Riemann 積分
7. 極値問題
8. 多価写像の連続性

9. 不動点定理

10. 均衡分析の基本問題

以下章の順に、書かれている内容と感想を述べることにする。

1章「集合と写像」、2章「位相数学の基礎」、3章「函数空間論の基礎」は一般的には標準的な書き方をしている。下半連続関数や上半連続関数の性質にも気くばりをしている点はさすがに数理経済学者の書いた本であると思える。

4章「凸解析」が前半の読みどころである。著者の丸山氏は凸性を集合の凸性と関数の凸性に分け、どちらも現代経済分析にはかかせない概念であると考え、経済学的及び現代数学的見地からそれを上手に書きあげている。凸集合や凸関数を研究する凸解析学は非線形問題と関連して急速な成長を遂げている分野であるが、凸という概念は線形と非線形の間ということもあって、線形問題を研究している人にとっても、非線形問題を研究している人にとっても非常に興味深いところである。著者の丸山氏は数理経済学者の目から凸性を捉え、数学の本では味わえない凸性の面白さをそこに書きあげている。ただ一つ残念なのは凸集合に関する記述が極めて本質的にかつ上手に書かれているのに対し、凸関数の記述がものたりなく、「Minimum Essentials」を追求して、数理経済学と関連のある基本的結果をもう少し紹介してほしかった点である。

5章「微分の基礎理論」では経済理論の構造を念頭におきながら、微分概念とその基本的性質について論じている。そこでは線形ノルム空間上で定義された写像に対して、微分概念が拡張され、つづいて第7章「極値問題」につながるような結果がいくつか記述されている。この章で特筆したいことは逆関数定理と陰関数定理、Ljusternik の定理が著者独得の新しい数学的センスから見事に書きあげられているという点である。このような書き方であれば将来の見通しもついてこようというものである。

6章「多変数函数の Riemann 積分」では、多変数函数の Riemann 積分の定義から始まり、積分と微分に関する数理経済学と数学で重要となる定理までが、変分法や写像度の不動点定理を意識した形で記述されている。これまでの数理経済学の本では微分法に重点がおかれ、積分法が軽視されていた傾向があるが、ここでは経済分析に必要な Riemann 積分の理論が要領よく解説されている。著者の意気込みからして本来ならば Lebesgue 積分までを書きたか

ったようであるが、これぐらいにおさめておくことも全体の流れからして適当であったと思われる。「ころあい」というものがある。

7章「極値問題」では、極値問題が微分法の観点から論じられている。著者は「極値問題」が好きなのであろう。著者の「熱っぽさ」にこちらがひきずりこまれる思いのする章になっている。Lagrangeの未定乗数法や古典的な変分学の問題といえば、経済学者や数学者にとっては比較的なじみ深い題材であるはずなのに、著者の手にかかるるとこのように力強く、熱っぽくなり、読み手が「うん、うん」と改めて納得してしまうといった具合になるのである。

8章「多価写像の連続性」では、点を集合にうつす写像の連続性が議論されている。点を集合にうつす写像は多価写像、または集合値写像といわれるが、凸関数の劣微分や、2変数関数 $f(x, y)$ に対して、

$$Tx = \{y : f(x, y) \leq c\}$$

で定義される写像 T がその写像になっている。多価写像の理論は経済学における非線形問題を研究する際非常に重要となるものであるが、それはまた著者の丸山氏が得意とする理論の一つでもある。この章では多価写像の連続性の概念と最適化理論の関連などが上手に解説されている。多価写像の理論はtopologicalの意味でのものと、measure theoreticの意味でのものと二つあるが、ここでは前者の記述のみがされており、後者の部分は丸山著「均衡分析の数理」(日本経済新聞社、1985)に委ねたのであろう。

9章「不動点定理」では、非線形問題を解決するためによく用いられる不動点定理について解説している。経済学におけるさまざまな均衡に対する問題は、さまざまな不動点定理に負うところが大きい。この章ではBrouwerの n 次元ユークリッド空間における不動点定理を出発点として、ゲームの理論で重要なminimax定理、Nash均衡、常微分方程式の解の存在までが要領よくまとめられている。さまざまな不動点定理とその応用については、高橋の著書「非線形関数解析学—不動点定理とその周辺—」(近代科学社、1988)でも、この章をワイドにした形で取り扱われている。本書のBrowderの多価写像の不動点定理から始まり、Fanのシステム定理、Sionのminimax定理に至る流れ、及びそれらの証明方法などは、高橋の著書と同じ扱いで書かれているが、それは非常に興味深いことである。この章で書かれている不動点定理は不動点定理の中のごく一部の

のであり、その扱い(応用)もよく知られたものである。欲をいえば数理経済学と関連したコンパクトなしでのさまざまな不動点定理やminimax定理が最近いろいろと研究されているので、そのあたりにも少し触れてほしかった。

10章「均衡分析の基本問題」は本書のしめくりである。経済均衡分析の重要問題をこれまで解説した数学と結びつけて見事に書きあげている。ノーベル賞経済学者Debreuの結果やWalrasの写像、Pareto最適の配分、Edgeworthの極限定理など数理経済学のこれまでのコアとなる部分が、数理経済学を勉強した人ならもちろんのこと、数学的訓練だけをつんだ人でもとてもしたしみやすく、理解しやすい流れで書かれている。

以上が各章の内容と私の感想であるが、私がこの著書を手にしたとき、数学的部分はもうすこし少なく、10章にあたる部分が大部分をしめていると期待した。しかし数学的部分が多くて、数理経済学の部分はその応用という印象をうけた。著書の丸山氏はこの本を通して、著書が冒頭で述べている「経済学を純粋数学と同レベルの厳密さで公理的に考究すべき」の精神を貫き通し、「数理経済学と数学は今や同じなんだよ」といったかったのではないだろうか。「数理経済学者になりたいのなら、数学者以上になれ」といったかったのではないだろうか。いずれにせよ最近数理経済学と非線形解析学に関連した国際会議や研究集会が世界のあちこちで開催されており、またそれらに関連した論文や本もたくさんでている。数理経済学と非線形解析学が世界的にますます重要視されている今日、現代的数学センスで(文の表現はちょっとかたい印象をうけるが)丸山著「数理経済学の方法」が出版されたことは、日本の数理経済学や数学を学ぶものにとってはとてもラッキーなことである。現代数理経済学と非線形解析学のかけ橋となる丸山著「数理経済学の方法」の誕生に心からの拍手をおくりたい。

[高橋 渉]