

CIR 型金利モデルの統計的検証

刈屋武昭・神薗健次

1. はじめに

金利期間構造をモデル化する方法として、イールドカーブ全体を短期金利の関数で表現する方法がある。このアプローチにおいては、短期金利の変動プロセスが全ての金利を決定する構造になっているため、短期金利プロセスをどのように定式化するかが最も重要な位置を占めていると云える。そのため、これまでに数多くの定式化が提唱され、個々の場合についてモデルの性質が様々な角度から研究されているが、基礎となっている短期金利プロセスの多くは次のクラスに属する。

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma|r_t|^\gamma dw_t \quad (t \geq 0), \quad (1)$$
$$r_0 = \bar{r},$$

ここで r_t は t 期における短期金利である。理論上は r_t は微小時間 $[t, t+dt]$ の間の資金貸借に対して適用される金利であり、 t 期において決定される。 $\{w_t, t \geq 0\}$ は 1 次元の標準ブラウン運動で、 $\kappa, \theta, \sigma, \gamma$ は未知パラメータである。 $\bar{r}$ は与えられた正数とする。以下本稿では (1) のクラスに属するモデルを CIR 型モデルと呼ぶ。CIR 型モデルにおいて $\gamma=0.5$ としたものは CIR モデル (Cox, Ingersoll and Ross (1985)), $\gamma=0$ としたものは Vasicek (1977) モデルであること等は明らかであろう。その他、Merton (1973) モデル、Dothan (1978) モデル、Brennan-Schwartz (1980) モデル等が CIR 型モデルに属する (詳しくは Chan *et al.* (1992) を参照)。

本稿の狙いは CIR 型モデルの現象記述能力をデータを用いて評価することにある。CIR 型モデルに関する実証研究はこれまでにいくつか行なわれている。例えば米国金利に関する実

証研究は、Chan *et al.* (1992), Broze, Scaillet and Zakoïan (1995), 日本金利を含めたデータに関する実証研究は、庄司 (1994), Kii (1995) がある。しかし、これまでの分析では CIR 型モデルに属する個々のモデルのパフォーマンスを比較することが分析の中心であった。これに対し、本稿の問題意識は、そもそも CIR 型モデルが実際に観察される金利変動をどの程度まで記述可能であるかという点にまで遡る。そのため、パラメータに対して制約を加えることによって得られる特殊なモデルの間での比較は、ここでは行なわない。むしろ我々はパラメータに制約をおかない CIR 型モデルの一般形を考えることによって、CIR 型モデルが共通に持つ性質に焦点を当てる。そして、そのような性質を持ったモデルが現実のデータを説明するのにどういう意味を持っているかを考察し、データを用いて検証する。

我々の結論は、CIR 型モデルでは実際に観測される金利変動を表現するためには限界があるということである。具体的には CIR 型モデルは条件付分散が変動する AR (1) モデルに対応しており、経路独立型モデルであるが、実際に観測される金利は、景気循環に伴った循環的変動をする経路依存型変動であるため、CIR 型モデルからは説明されない情報が残っているといえよう。例えば、我々の推定結果から、 κ, θ の推定値は平均回帰パラメータとしての意味を持っていないことが確認された。現在のところ、CIR 型モデルに十分とて代わるモデルを持ち合わせてはいないが、それを追求するために、本稿で得られた結果は重要な第一歩となるだろう。

本稿の構成は以下の通りである。以下第 2 節

ではここで考えるモデルのクラスを特定し、その性質について説明した後、実際の金利データから観測される特徴と対比する。そして、続く第3節では連続モデルを離散近似し、データを用いてパラメータを推定し、さらにモデルがデータから見て妥当であるかを検証する。

2. モデルの構造

t 期における短期金利を r_t で表す。理論上は r_t は微小時間 $[t, t+dt]$ の間の資金貸借に対して適用される金利であり、 t 期において決定される。本稿で取り上げる短期金利プロセスは次のような確率微分方程式に従う。

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dw_t, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$r_0 = \bar{r},$$

但し、 $\{w_t, t \geq 0\}$ は一次元の標準ブラウン運動で、 κ, θ, σ は正の未知パラメータである。(2) はこれまでに提唱されてきた短期金利モデルの大部分を特殊な形として含む一般的な表現である。なおパラメータ κ, θ, σ の一部または全部が時間変数 t の関数になっているモデルも提唱されているが、ここではそのようなモデルは取り上げない。その理由は、そのようなモデルにおいては κ, θ, σ の時間変数 t への依存のさせ方が特定化されてなく、任意であるということである。実際、 κ, θ, σ を時間に依存させる目的は、金利派生証券の価格付けに際し、初期時点におけるイールドカーブとボラティリティカーブを、それぞれ現在観測されるイールドカーブとボラティリティカーブに一致させておくことである。(詳しくは、Cox, Ingersol and Ross(1985), Hull and White(1993))。すなわち、 κ, θ, σ が時間に依存するモデルは、金利派生証券の価格付けに際し金利派生証券の原資産たるイールドカーブの変動を1ファクターモデルで表現するために無限個のパラメータを導入したものと見ることができる。従って、このような無限個のパラメータによって exact fitting を実現できるモデルは統計モデルとして適切ではないので、本稿の考察からは除外する。

(2) のモデルには、金利の平均回帰性(mean-reversion)が組み込まれている。すなわち、 r_t

> 0 のときには $\kappa(\theta - r_t) < 0$ となって金利の瞬間的なドリフトは下向きとなり、 $r_t < 0$ のときには逆に $\kappa(\theta - r_t) > 0$ となって金利の瞬間的なドリフトは上向きとなる。従って、時間を通じて見た場合、短期金利 r_t は「長期的平均」 θ の周りを変動することになる。この仮定は局所的な金利変動パターンを説明する上で直観的には納得しやすいものであること、現実の金利水準が歴史的に見て大体 0~15% で推移していて発散しないことなどからモデルの持つ望ましい性質とされてきた。ところが(2)のモデルにおいて、金利の平均回帰性が次のような特徴を合わせ持っていることはこれまで指摘されていない。まず(2)の解が次のように表現可能であることに注意する。

$$r_t = \theta + (\bar{r} - \theta)e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{\kappa(t-s)} r_s^\gamma dw_s, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

実際、(3)の r_t が(2)の確率微分方程式を満たすことは(3)の確率微分を計算することによって直ちに分かる。ここで、

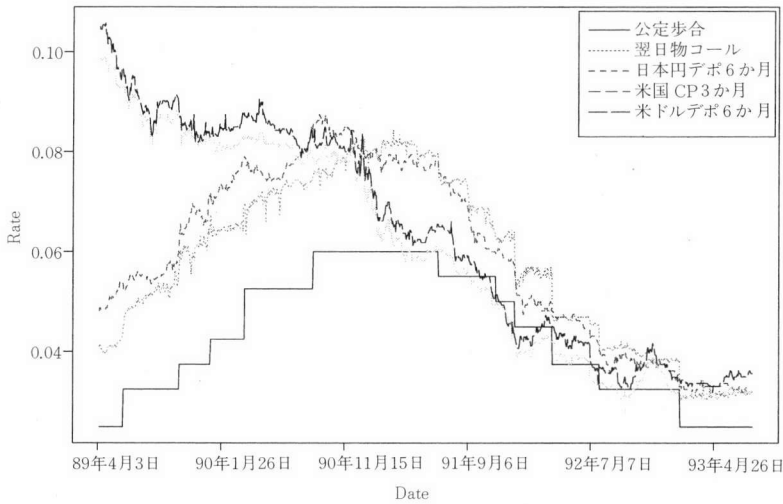
$$A_t = \theta + (\bar{r} - \theta)e^{-\kappa t}$$

$$M_t = \sigma \int_0^t e^{\kappa(t-s)} r_s^\gamma dw_s$$

とおくと、 $\{A_t\}$ は滑らかで非確率的なプロセスで、 $\{M_t\}$ は初期値 0 の局所マルチンゲール、従って一定の条件のもと、平均 0 のマルチンゲールである。また、 $\{A_t\}$ の軌跡は $(\bar{r} - \theta)$ の符号に応じて単調増加もしくは単調減少で、 $t \rightarrow \infty$ のとき指数的に $A_t \rightarrow \theta$ となることは容易に分かる。すなわち、(2)のモデルは金利 $\{r_t\}$ が長期的平均 θ に向かう単調なトレンド+平均 0 のマルチンゲールとなることを表現していることになる。また、 $\{r_t\}$ 自身は離散時間の 1 次の自己回帰過程に対応する連続時間マルコフ過程であり、従ってその確率的変動は非常に単純な構造を持っている。そして t が大きいとき、 A_t と θ の差は指数的に縮小してゆくので、この差を無視すれば、 $\{r_t\}$ 自身をマルチンゲールであると見なすこともできる。

次に、以上のようなモデルの特徴と対比するために、実際に観測される金利変動について要

図1. 金利の時系列プロット



約しておく。図1は、日本および米国を代表する金利について1989年1月3日から1993年7月31日までの日次データの時系列をプロットしたものである。まず、どちらの場合にも共通していえることは、標本期間が約4年と、日次データにしてはかなり多めにとっているにも関わらず、(2)のモデルが表現しているような平均回帰性が表れていないことである。実際、この期間、金利は景気循環と連動しながら変動しており、日本の場合は1990年9月にピークを迎えるまで上昇し、以後は下降している。また米国の場合は標本期間中は一様に下降トレンドにあったといってよい。また、特に金融政策の影響が強く表れると考えられる翌日物コールレートの動きは公定歩合と非常によく連動しており、公定歩合の切り上げ(切り下げ)に敏速に反応する形でジャンプすることが分かる。また、市場性の強い金利の場合も、大まかなトレンドは政策の影響を受けており、モデルが仮定するように、ただ単に長期的な一定水準に指数的に向かっているとは考えられない。さらにその確率的な変動も、1次の自己回帰過程で把握できるような単純な形をしているとは考えにくい。

以上のような観測から、(2)のようなモデルを実際に観測される金利データに当てはめた場合に、次のような結果が予想される。まず、標

本期間の金利にトレンドがある場合、トレンドを反映する形で κ, θ が推定されることが予想される。実際、これまでに述べたことから、 κ, θ はデータの時系列に指数トレンドを当てはめた結果得られるものに過ぎないことが分かるが、モデルの構造上このとき得られる θ は長期的平均として自然に考えられるものに対応していない。例えば、標本期間中に金利上昇局面が支配的である場合には、前半を長期的平均に戻ってゆく局面ととらえ、後半は長期的平均を離れてゆく局面ととらえるのが自然な見方であろう。そしてこの場合、ピークとボトムの間が長期的平均としてふさわしい。しかし、単調な指数トレンドは標本期間中のトレンドを一様に長期的平均に向かってゆく局面ととらえるので、長期的平均の推定値である θ が長期的平均としてあるべき水準よりも大きな値になることが考えられる。金利が下降局面にある時の予想される結果も明らかであろう。次に標本期間が景気循環の周期に比べて相対的に長く、標本期間中の金利が一方向的なトレンドにない場合を考える。この場合、データからも平均回帰性が確認されるであろうから、 θ の推定値としては金利にトレンドがある場合に比べ、直観的にも納得のゆく値が得られよう。しかし、この場合長期的平均からの景気循環に伴うシステムティックな乖

離はモデル上は全てマルチンゲールの項に押し込まれる形となることに注意しなければならない。ところが、前にも述べたようにこの項の確率変動は1次の自己回帰過程に対応したものであるから、景気循環に伴うシステムティックかつ波長の長い変動を表現するには適していない。さらにこのような循環変動を単純な確率過程に押し込めてしまうことで重要な情報を逃す恐れもある。また、平均回帰性が確認される時系列データを得ようとした場合、必要となる標本期間はかなり長くなることが予想され、そのような長期間のデータに対して一定の構造を仮定してモデルを当てはめること自体が困難となる。

次節では、このような点を踏まえた上で、(2)のモデルを離散化したものを観測される金利データに当てはめ、ここでのモデルのもつ一般的特徴を一層明らかにし、またこのクラスのモデルの限界を示す。

3. 実証分析

本節では、(2)の連続時間モデルを離散化し、観測される金利データに離散モデルを当てはめ、モデルの妥当性を検証する。

3.1 モデルの離散化

金利が観測される時点の集合を $D = \{0, h, \dots, Nh\}$, 観測された金利の時系列データを $R_{Nh} = \{r_0, r_h, \dots, r_{Nh}\}$ で表し、このデータに対応するモデルとして(2)を次のように離散化する。

$$r_{t+h} - r_t = \kappa(\theta - r_t)h + \sigma r_t^\gamma \sqrt{h} \varepsilon_{t+h}, \quad t \in D \setminus \{Nh\} \quad (4)$$

但し、 $\{\varepsilon_{t+h}, t \in D \setminus \{Nh\}\}$ は *i. i. d.* 標準正規プロセスである。(4)のような離散近似は、Chan *et al.* (1992), Broze *et al.* (1995) 等にも見られるように、しばしば用いられるものではあるが、近似に伴う誤差がある他、連続モデルにおけるプロセスの性質をある程度切り捨てているという問題点もある。例えば(2)において、 $\gamma=0.5$ としたもの(CIRモデルに対応)は、金利が負の値をとらないという性質を持っているが、これ

に対応する離散近似モデルでは、正の確率で金利は負の値をとる。しかし、実際に観測されるデータは離散的であるために実証においては離散時間データに対応するモデルを考える必要があることと、モデルを複雑にしないために、ここでは(4)のモデルがデータ R_{Nh} を記述する真のモデルであると仮定する。確率微分方程式に対するより精度の高い離散近似方法については、Kloeden and Platen (1992) がある。

(4)のもとでは、 $R_t = \{r_0, r_h, \dots, r_t\}$ が与えられた時の r_{t+h} の条件付分布は平均 $r_t + \kappa(\theta - r_t)h$ 分散 $\sigma^2 r_t^{2\gamma} h$ の正規分布である。したがって、データ R_{Nh} が与えられた時の、パラメータ $\kappa, \theta, \sigma, \gamma$ に対する対数尤度関数は次のように与えられる。

$$l(\kappa, \theta, \sigma, \gamma | R_{Nh}) = \log f_0(r_0 | \kappa, \theta, \sigma, \gamma) + \sum_{t \in D \setminus \{Nh\}} l_{t+h}(\kappa, \theta, \sigma, \gamma | R_t) \quad (5)$$

ここで、 $l_{t+h}(\kappa, \theta, \sigma, \gamma | R_t)$ は次のように与えられる。

$$l_{t+h}(\kappa, \theta, \sigma, \gamma | R_t) = \text{const.} - \log \sigma - \gamma \log r_t - \frac{1}{2\sigma^2 r_t^{2\gamma}} (r_{t+h} - r_t - \kappa(\theta - r_t)h)^2, \quad t \in D \setminus \{Nh\} \quad (6)$$

また、 $f_0(r_0 | \kappa, \theta, \sigma, \gamma)$ は r_0 の周辺分布の密度関数であるが、 f_0 の与え方は無数にあり、また、これを特定化するための何ら先験的な情報は無い。しかも、データ数が多い時には、(5)において、 f_0 の占める相対的な重要性は小さい。従って、我々は f_0 を無視し、(5)の第2項を最大化することで、疑似最尤推定量を求めることにする。なお、(4)の推定法として、Chan *et al.* (1992) は GMM を推奨している。彼らが GMM を推奨する理由として挙げているのは、GMM が ε_{t+h} の分布型に依存しないということであるが、 ε_{t+h} は連続時間モデルにおける標準ブラウン運動の増分の分散を基準化したものに対応するので、*i. i. d.* 標準正規分布を仮定するのが自然であり、その仮定のもとでは最尤法が効率的であるので、我々は最尤法を用いる。

次にモデルの妥当性を検証するための方法(自己整合性の検定)について述べる。(4)の

とでは与えられたパラメータと r の初期値 r_0 のもと、 $\{r_h, \dots, r_{Nh}\}$ と $\{\varepsilon_h, \dots, \varepsilon_{Nh}\}$ は 1 対 1 に対応するから、パラメータの推定値 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\gamma}$ と推定に用いたデータ R_{Nh} から ε_t を次式によって推定できる。

$$\hat{\varepsilon}_{t+h} = \frac{r_{t+h} - r_t - \hat{r}(\hat{\theta} - r_t)h}{\sqrt{h} \hat{\sigma} r_t^{\gamma}}, \quad t \in D \setminus \{Nh\} \quad (7)$$

ここで、モデルの仮定が正しいとすると ε_{t+h} は *i. i. d.* 標準正規プロセスであるから、 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\gamma}$ が一致推定量であれば、 $\hat{\varepsilon}_t$ の分布はデータ数が大きいとき標準正規分布に近くなっているはずである。従って $\hat{\varepsilon}_{t+h}$ が *i. i. d.* 標準正規であるかをチェックすることによって、モデルの仮定を間接的にはあるが検証することができる。そのために我々は、 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ の標本平均 $\bar{\varepsilon}$ 、標本分散 s^2 、歪度 b 、尖度 k を計算する。これらはそれぞれ、

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{\varepsilon}_{jh} \quad (8)$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\hat{\varepsilon}_{jh} - \bar{\varepsilon})^2 \quad (9)$$

$$b = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \frac{(\hat{\varepsilon}_{jh} - \bar{\varepsilon})^3}{s^3} \quad (10)$$

$$k = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \frac{(\hat{\varepsilon}_{jh} - \bar{\varepsilon})^4}{s^4} \quad (11)$$

によって定義される。ここで、 $\{\hat{\varepsilon}_{jh}\}$ が *i. i. d.* 標準正規分布に従うとの仮説のもとでは、

$$\sqrt{N} b \longrightarrow N(0, 6) \quad (12)$$

$$\sqrt{N} (k-3) \longrightarrow N(0, 24) \quad (13)$$

であるので、 b, k に対する仮説 $b=0, k=3$ が棄却されれば $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ の *i. i. d.* 正規分布の仮説は棄却され、 $\{\varepsilon_t\}$ の分布は正規分布でない可能性が高いことを知ることができる。この他に、我々は $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ の独立性を検定するために、 $\{\hat{\varepsilon}_t\}, \{|\hat{\varepsilon}_t|\}, \{\hat{\varepsilon}_t^2\}$ の標本自己相関係数、 $\rho_\tau(\bar{\varepsilon}), \rho_\tau(|\bar{\varepsilon}|), \rho_\tau(\bar{\varepsilon}^2)$ ($\tau=1, \dots, 30$) を計算する。一般にプロセス $\{x_t, t=1, \dots, N\}$ に対し、 $\rho_\tau(x)$ は

$$\rho_\tau(x) = \frac{\sum_{j=1}^{N-\tau} (x_j - \bar{x})(x_{j+\tau} - \bar{x})}{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2} \quad (14)$$

で定義される。そして、 $\{x_t\}$ が独立であるとの仮説のもとでは、 $N \longrightarrow \infty$ のとき

$$\sqrt{N} \rho_\tau(x) \longrightarrow N(0, 1) \quad (15)$$

である。最後に、以上のようなチェックの方法が有効であるためにはパラメータの推定量が一致推定量でなければならないが、その場合最尤推定量を用いることが最も効率的であることは明らかであろう。

3.2 データ

本稿の実証分析で用いたデータは、日本円および米ドルの日次のスポット、先物、およびスワップを含む 44 の金利から成る。標本期間は金利の種類によって異なるが、主に 90 年代前半である。データの種類と標本期間を表 1 にまとめておく。なお、本稿では短期のスポット金利のみに限らず長期債金利、先物金利、スワップなどあらゆる金利に対して、(4) のモデルを当てはめて分析を試みる。本稿で取り上げたモデルは、本来は瞬間的スポットレートモデルであり、従って例えば翌日物コールレートの日次データなどが対応すると考えられる。そのため、多くの場合無裁定を仮定して理論的に求められるタームストラクチャーモデルを長期債その他の金利データに対して当てはめる、しかし(2) のモデルにおいて γ が未知である時のイールドカーブが実証分析に使いやすい形で求められていないことと、1 変量スポットレートプロセスから無裁定を仮定することによって求めたイールドカーブモデルの統計的取り扱いには問題点があることから、ここではそのようなアプローチをとらない¹⁾。また、CIR 型モデルに対して、様々な金利を用いた包括的な実証分析がこれまでには行なわれていないため、本稿において広範囲の金利に関して日次のデータの一般的な特徴を探り出したことは新たな貢献であろう。

3.3 推定結果

上で説明したデータに対して(4) のモデルを推定した結果を表 2~3 に示す。データは全て日次であるので、 $h = \frac{1}{360}$ とした。また、金利は全て小数点表示(すなわち 5% は 0.05 として表示)である。

表からまず、理論モデルにおいてパラメータ

表 1. データ

金 利	期 間	標 本 期 間	標本数
有担保コール	翌日	1989年1月3日～1993年7月30日	1135
手形レート	1 か月	1989年1月3日～1993年7月30日	1126
	2 か月		899
	3 か月		888
日本円 CD	月中	1989年1月3日～1993年7月30日	1126
	1 か月		1069
	3 か月		1131
現先	1 か月	1989年1月3日～1993年7月30日	1125
米国 CD	1 か月	1989年1月3日～1993年7月30日	1164
	3 か月		1166
	6 か月		1187
Banker's Acceptance	6 か月	1989年1月3日～1993年7月30日	1190
米国 CP	3 か月	1989年1月3日～1993年7月30日	1187
T-Bill	3 か月	1989年1月3日～1993年7月30日	1191
	6 か月		1192
	12 か月		1190
T-Bond	30 年物	1989年1月3日～1993年7月30日	1184
ユーロ円先物	3, 6, 9, 12, 15, 18 か月	1992年12月1日～1994年5月31日	388
円デポ	1, 2, 3, 6, 12 か月	1989年4月3日～1995年10月3日	1068
円-円スワップ	2, 3, 4, 5, 7, 10 年	1989年4月3日～1995年10月3日	1068
ドルデポ	1, 2, 3, 6, 12 か月	1989年4月3日～1995年10月3日	1068
ドル-ドルスワップ	2, 3, 4, 5, 7, 10 年	1989年4月3日～1995年10月3日	1068

に対して想定されている符号条件が満たされていない場合が目立つことが分かる。例えば、金利に平均回帰性を持たせるため理論モデルでは

$\kappa, \theta > 0$ が仮定することが多いが、ここでの結果からは κ または θ が負になるケースを無視できない。特に日本円金利においてはこの傾向

表 2. モデルの推定結果

	κ		θ		σ		γ		対数尤度
コール O/N	0.2816	(0.503)	0.0478	(1.465)	0.1027	(4.573)	0.6227	(8.338)	4072.34
手形 1M	0.0542	(0.113)	-0.0176	(-0.025)	0.0079	(5.028)	-0.1975	(-2.878)	4244.49
手形 2M	0.0177	(0.027)	-0.2275	(-0.021)	0.0072	(4.196)	-0.2684	(-3.179)	3300.17
手形 3M	0.0513	(0.073)	-0.0406	(-0.028)	0.0054	(4.067)	-0.3800	(-4.360)	3240.87
日本 CD 月中	0.0565	(0.118)	-0.0186	(-0.029)	0.0370	(4.280)	0.3333	(4.139)	4229.02
日本 CD 1M	-0.1132	(-0.296)	0.0961	(0.599)	0.0804	(4.187)	0.6810	(8.249)	4253.64
日本 CD 3M	-0.2320	(-0.987)	0.0772	(2.420)	0.0662	(4.417)	0.7670	(9.816)	5003.27
現先 1M	-0.2648	(-1.355)	0.0678	(3.345)	0.0993	(3.704)	0.9774	(10.791)	5298.49
米 CD 1M	0.4349	(0.728)	0.0208	(0.301)	0.0176	(7.380)	-0.1183	(-2.503)	3725.70
米 CD 3M	0.5108	(0.683)	0.0344	(1.440)	2.0362	(4.285)	1.5184	(18.481)	3593.76
米 CD 6M	0.3759	(0.758)	0.0165	(0.231)	0.0157	(6.886)	-0.0919	(-1.801)	4027.12
BA 6M	0.4272	(1.001)	0.0201	(0.583)	0.1655	(5.939)	0.7978	(13.646)	4255.88
米 CP 3M	0.2947	(0.886)	0.0017	(0.028)	0.0725	(6.121)	0.5844	(10.307)	4501.02
T-Bill 3M	0.4587	(1.161)	0.0221	(0.983)	0.2914	(6.341)	1.0265	(19.264)	4457.08
T-Bill 6M	0.5138	(1.250)	0.0265	(1.437)	0.3322	(5.865)	1.0737	(18.544)	4455.28
T-Bill 12M	0.8106	(1.263)	0.0399	(3.009)	0.5085	(5.226)	1.0860	(16.578)	3959.38
T-Bond 30Y	0.4173	(0.531)	0.0626	(1.909)	0.6304	(1.575)	1.6630	(6.612)	4919.21

表 3. モデルの推定結果(続き)

	κ	θ	σ	γ	対数尤度
円金利先物 3M	0.6593 (0.489)	0.0070 (0.149)	0.0001 (1.572)	-1.2720 (-7.260)	1723.44
円金利先物 6M	1.8880 (1.010)	0.0220 (2.648)	0.0002 (1.301)	-1.1227 (-5.305)	1628.20
円金利先物 9M	3.4374 (1.528)	0.0259 (6.780)	0.0020 (1.372)	-0.4914 (-2.433)	1525.17
円金利先物 12M	3.2720 (1.505)	0.0274 (6.745)	0.0061 (1.518)	-0.2097 (-1.135)	1493.43
円金利先物 15M	2.8048 (1.380)	0.0292 (6.071)	0.0159 (1.555)	0.0450 (0.245)	1469.96
円金利先物 18M	2.6159 (1.308)	0.0315 (5.823)	0.0147 (1.661)	0.0090 (0.051)	1450.35
円デボ 1M	-0.2431 (-1.038)	0.0828 (1.731)	0.0295 (12.288)	0.2860 (11.577)	6338.76
円デボ 2M	-0.2854 (-1.514)	0.0780 (2.589)	0.0237 (12.447)	0.2836 (11.652)	6680.42
円デボ 3M	-0.2717 (-1.448)	0.0803 (2.483)	0.0205 (11.875)	0.2408 (9.437)	6688.93
円デボ 6M	-0.2718 (-1.476)	0.0814 (2.440)	0.0237 (12.164)	0.2920 (11.767)	6726.92
円デボ 12M	-0.2504 (-1.233)	0.0852 (2.081)	0.0208 (12.248)	0.2303 (9.317)	6611.28
円スワップ 2Y	-0.2806 (-1.216)	0.0819 (2.545)	0.0085 (9.666)	-0.0533 (-1.652)	6592.40
円スワップ 3Y	-0.2663 (-0.990)	0.0824 (2.316)	0.0060 (8.202)	-0.1821 (-4.660)	6521.77
円スワップ 4Y	-0.2553 (-0.855)	0.0816 (2.187)	0.0048 (7.311)	-0.2565 (-5.733)	6534.18
円スワップ 5Y	-0.2311 (-0.729)	0.0824 (1.908)	0.0050 (6.715)	-0.2415 (-4.890)	6563.71
円スワップ 7Y	-0.2122 (-0.617)	0.0816 (1.763)	0.0038 (5.702)	-0.3112 (-5.258)	6687.93
円スワップ 10Y	-0.1918 (-0.535)	0.0825 (1.529)	0.0048 (5.011)	-0.2151 (-3.166)	6756.31
ドルデボ 1M	0.7966 (1.665)	0.0464 (4.822)	0.3809 (7.316)	1.0367 (22.358)	5617.13
ドルデボ 2M	0.6928 (2.060)	0.0442 (4.951)	0.1049 (7.150)	0.7014 (14.736)	6105.86
ドルデボ 3M	0.6730 (2.169)	0.0439 (5.185)	0.1001 (6.928)	0.7177 (14.569)	6249.20
ドルデボ 6M	0.7525 (2.262)	0.0456 (5.533)	0.0873 (6.492)	0.6529 (12.318)	6144.81
ドルデボ 12M	1.0335 (2.343)	0.0508 (6.343)	0.0769 (6.975)	0.5229 (10.425)	5701.91
ドルスワップ 2Y	0.9709 (2.274)	0.0549 (6.767)	0.0447 (5.886)	0.3827 (6.254)	5888.15
ドルスワップ 3Y	0.9011 (2.138)	0.0583 (7.041)	0.0343 (4.836)	0.3298 (4.324)	6049.95
ドルスワップ 4Y	0.9084 (2.031)	0.0614 (7.464)	0.0305 (4.335)	0.2981 (3.449)	6078.17
ドルスワップ 5Y	0.8854 (1.934)	0.0637 (7.537)	0.0221 (3.968)	0.1932 (2.020)	6138.65
ドルスワップ 7Y	0.8337 (1.755)	0.0663 (7.355)	0.0157 (3.564)	0.0831 (0.768)	6217.67
ドルスワップ 10Y	0.8319 (1.651)	0.0692 (8.035)	0.0227 (3.231)	0.2429 (2.009)	6275.41

が強く、手形レートで θ が負、CD では 1 か月物と 3 か月物で κ が負、月中物で θ が負、また現先で κ が負となっている。さらに、自由市場金利を代表するデボ、スワップにおいては、全ての場合で κ が負になっている。これと対照的に、米ドル金利では、 κ , θ とともに正の値をとっている。このことは、第 2 節でも述べたように、金利のトレンドに大きく関係している。すなわち、標本期間が他と異なる先物を除く円金利に関しては標本期間中のトレンドは前半で上昇、後半で下降というものであり、単調でない。従ってモデルが仮定していたような平均回帰性がデータからは確認されず、符号条件を満たさない推定結果になっている。他方、米金利に関しては、標本期間中は全般的に下降トレンドにあったため、あたかも長期的平均が低い水準にあり、この期間の金利がそのような低水準の長期的平均に向かって下降していったかのような

パラメータ推定値が得られている。但し、第 2 節でも指摘したように、ここで得られた θ の値が、本来の意味での長期的平均を必ずしも正しく表していないことに注意しなければならない。実際、CD, CP, T-Bill に対する小さい θ の推定値は金利の長期的平均と考えにくい。

κ , θ の値とデータのトレンドが持つ関係をより詳しく見るため、一部の円金利について標本期間をトレンドの方向に応じて 2 つに分けて推定した結果を示す。表 4~5 は、円デボ、スワップ金利について金利が上昇局面にあった 1989 年 4 月 3 日から 1990 年 9 月 18 日までと下降局面にあった 1990 年 9 月 18 日から 1995 年 10 月 3 日までの 2 つの標本期間でモデルを別々に推定した結果である。まずデボ金利から調べる。この期間のデボ金利の動きを見ると、当初 4% 台半ばだったものが上昇し続け、1990 年 9 月には最高 8.5% を超えるほどまでになり、その後

表 4. モデルの推定結果—(金利上昇期, 1989 年 4 月 3 日~1990 年 9 月 18 日)

	κ	θ	σ	γ	対数尤度
円デポ 1M	1.3331 (0.954)	0.0948 (2.673)	0.0852 (1.382)	0.6246 (2.374)	1335.28
円デポ 2M	1.1340 (1.051)	0.0998 (2.793)	0.0516 (1.519)	0.5335 (2.220)	1424.13
円デポ 3M	0.9783 (0.962)	0.1044 (2.415)	0.0527 (1.506)	0.5659 (2.326)	1446.46
円デポ 6M	0.5311 (0.499)	0.1375 (0.910)	0.2556 (1.499)	1.1253 (4.586)	1422.93
円デポ 12M	-0.0087 (-0.007)	-4.3506 (-0.007)	1.4970 (1.589)	1.7489 (7.544)	1392.77
円スワップ 2Y	-0.8700 (-0.912)	0.0233 (0.553)	1.0384 (1.401)	1.7043 (6.522)	1492.42
円スワップ 3Y	-1.0124 (-1.042)	0.0303 (1.020)	2.0383 (1.321)	1.9610 (7.088)	1505.17
円スワップ 4Y	-1.0180 (-1.025)	0.0314 (1.105)	3.3673 (1.281)	2.1504 (7.558)	1517.81
円スワップ 5Y	-1.0068 (-0.986)	0.0317 (1.093)	4.2371 (1.264)	2.2295 (7.743)	1515.89
円スワップ 7Y	-1.0831 (-1.004)	0.0360 (1.503)	6.6105 (1.196)	2.4005 (7.921)	1535.58
円スワップ 10Y	-1.2118 (-1.089)	0.0399 (2.156)	7.8186 (1.142)	2.4618 (7.774)	1540.49

表 5. モデルの推定結果—(金利下降期, 1990 年 9 月 18 日~1995 年 10 月 3 日)

	κ	θ	σ	γ	対数尤度
円デポ 1M	0.2574 (1.008)	-0.0468 (-0.553)	0.0223 (10.758)	0.2196 (8.111)	5027.69
円デポ 2M	0.2176 (1.032)	-0.0628 (-0.647)	0.0190 (10.899)	0.2316 (8.699)	5277.87
円デポ 3M	0.2419 (1.130)	-0.0527 (-0.655)	0.0172 (10.222)	0.1980 (6.979)	5259.90
円デポ 6M	0.3045 (1.477)	-0.0362 (-0.719)	0.0162 (10.103)	0.1972 (6.892)	5338.81
円デポ 12M	0.4133 (1.944)	-0.0168 (-0.541)	0.0093 (9.497)	0.0252 (0.823)	5306.82
円スワップ 2Y	0.5591 (2.154)	0.0011 (0.050)	0.0053 (7.720)	-0.1840 (-4.728)	5147.29
円スワップ 3Y	0.6352 (2.096)	0.0117 (0.583)	0.0035 (6.552)	-0.3353 (-7.072)	5067.57
円スワップ 4Y	0.6604 (1.965)	0.0181 (0.948)	0.0027 (5.919)	-0.4312 (-8.010)	5071.01
円スワップ 5Y	0.6939 (1.949)	0.0231 (1.347)	0.0025 (5.488)	-0.4508 (-7.635)	5104.09
円スワップ 7Y	0.7657 (2.017)	0.0309 (2.272)	0.0013 (4.694)	-0.6374 (-9.030)	5218.97
円スワップ 10Y	0.7903 (1.988)	0.0341 (2.787)	0.0015 (4.131)	-0.5836 (-7.192)	5276.32

次第に下降してゆき、最終的には 0.5%~0.6% 程度にまでになっている。この動きに対応するかのように、金利上昇期には κ と θ の推定値としては、正の κ に高い θ (0.09~0.14) という組合せと、負の κ に負の θ という組合せの 2 つのパターンが得られた。1 か月物から 6 か月物までは前者のパターンで、この場合、 θ より低い初期値 $\bar{r}$ から出発した時にモデルの示すトレンドは、 θ に向かって上昇かつ傾きは逓減して最終的には θ の水準、すなわちピーク時の金利水準とはほぼ同じ水準に落ち着くというものである。他方 12 か月ものは後者のパターン、すなわち κ, θ とともに負という場合で、この場合もモデルの示すトレンドは上昇トレンドであるが、 $\kappa, \theta > 0$ の場合と異なり、その傾きは時間とともに逓増してゆく。すなわち、負の θ から出発して、傾きを次第に増しながら指数関数的に上方に伸びていくという形で、発散的な性質を持つ。このことはこの期間 12 か月物デポの上昇トレンドが他のデポに比べて相対的に傾きの大

きいものであったことを示している。但し、 t 値は絶対値で見ても非常に小さく、統計的にはこの結果は有意でない。むしろそのトレンドはランダムウォーク的なものであったと考えられる。しかし、いずれにしてもこのモデルの推定結果からは、金利の平均回帰性は確認されない。下降局面におけるデポ金利の κ, θ の推定値はいずれも正の κ と負の θ という組合せである。このことは、この期間の金利が負の金利へ向けてただちに着地してゆくようなトレンドにあったことを示している。もちろん実際の金利が負になることはないと考えられるが、パラメータに制約を課さずに推定した結果として $\kappa > 0$ 、 $\theta < 0$ が下降トレンドにあるデータから得られたということは事実である。考えられる一つの解釈としては、データが単調な下降トレンドにある場合、モデルは金利トレンドの方向をフォローできてはいるが、その傾きの変化の仕方まではうまくフォローできてはいないということであろう。実際モデルの示すトレンドの形状は

第2節で調べたように、あまりにも単純過ぎる。

次にスワップレートの期間別の結果について述べる。まず、観測されたスワップレートの動きはデポ金利の動きとほぼ同じパターンを示すが、上昇局面においてその傾きがよりはっきりと逓増していることがデポ金利のトレンドとは異なる点である。上昇局面におけるスワップレートの κ, θ の推定値は負の κ と値にして小さな θ の組合せが得られている。このパターンは、12 か月デポの時に得られたものと同じ特徴を持っており、低金利から発散してゆくような形で金利が上昇してゆくというトレンドを示すことになる。実際この期間におけるスワップレートの上昇トレンドの傾きは上で述べたように逓増している。一方、下降局面におけるスワップレートに対する κ と θ の推定値は、正の κ と正ではあるが値にして小さな θ という組が得られている。このパターンは全標本期間中で一様に下降局面にあった米金利の示したパターンと同じものである。また θ の符号の違いを除けば、トレンドが下降かつ傾き逓増、すなわちグラフが下に凸という点で下降局面のデポから得られた結果とも共通している。

次にその他のパラメータ σ, γ の推定値について調べる。まず、 γ は多くのモデルにおいては既知の定数と仮定される場合が多いが(例えば、Vasicek モデルでは $\gamma=0$ 、CIR モデルでは $\gamma=0.5$ など)、我々は γ をデータから推定した。また Broze *et al.* は金利に定常性を仮定し、そのための制約として $0 \leq \gamma \leq 1$ のもとでモデルを推定しているが、我々は制約なしで γ の推定を行なった。その結果、金利の種類によってかなり異なる推定値を得た。大別すると、手形、米 CD(3 か月を除く)、ユーロ円先物、円スワップで γ が負となり、コール、日本 CD、BA、米 CP、円デポ、米ドルデポ(1 か月を除く)、米ドルスワップで γ は 0 から 1 の値、また米国債券、すなわち T-Bill と T-Bond では γ は 1 より大きい値が得られた。また、大まかではあるが、同種の金利の中では γ の値がある期間構造を持っていることが確認される。例えば、手形、米ドルデポでは期間が長くなるにつれて γ は

小さくなっており、日本円 CD、米国債券、ユーロ円先物では期間が長くなるにつれて γ が大きくなっている。その他の金利に関しても若干の期間構造が観察されるものの、金利の種類によってその構造は異なっており、一般的な結果は得られない。特にデポ金利とスワップレートはイールドカーブを推計する際に金利の間でしばしば用いられる金利であるが、 γ の値で見た時の構造が全く異なっているという点は注意を引くものである。また、円デポ、円スワップについて金利の局面別に推定した結果からは、金利が上昇局面にある時には γ の期間構造は増加、金利が下降局面にある時には γ の期間構造は減少という傾向が読みとれる。

σ の推定値は γ の推定値と密接な関係にあり、 γ が正の大きい値をとっている時には σ も大きい値をとっており、また γ が負の値をとっている時には σ は小さい値をとっていることが分かる。このことは、金利水準が低い時の金利変化の(条件付)標準偏差と関係があるものと考えられる。まず、モデルの構造上、金利変化の条件付標準偏差 σr_t^2 は図 2, 3 にあるようなパターンを示すが、 $\gamma=0$ となる場合を除いて、 $r_t \rightarrow 0$ のとき $\sigma r_t^2 \rightarrow +\infty$ ($\gamma < 0$ のとき)または、 $\sigma r_t^2 \rightarrow 0$ ($\gamma > 0$ のとき)の 2 種類であって、中間の場合がない。そのため、例えば $\gamma < 0$ となっている場合には、金利が低い場合における金利変化の分散の増大を相殺するように、 σ が相対的に小さい値をとっているものと考えられ、 $\gamma > 1$ となっている場合には逆の効果が働くので σ が相対的に大きい値をとっているものと考え

図 2. 金利の条件付標準偏差 ユーロ円先物

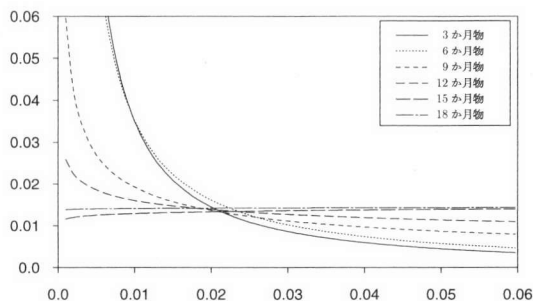
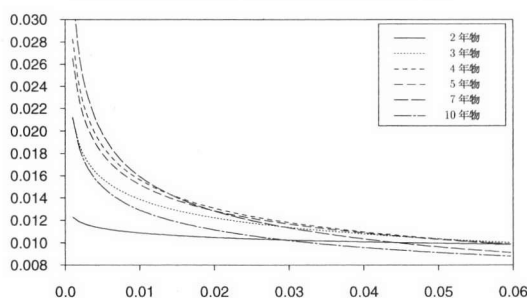


図3. 金利の条件付標準偏差 日本円スワップ



られる。

以上の推定結果から、(4)のモデルは、ある程度、実際に観測される金利の変動を掴むことができるものの、モデルの構造に限界があり、改良の余地は多く残されている。

3.4 自己整合性検定

ここでは、(4)のモデルが $\{\varepsilon_t\}$ に対して仮定していた *i. i. d.* 標準正規性について調べる。そのために第2節で述べたような要約統計量を見る。表6~7は、(7)によって推定された $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ の要約統計量である。表から分かることとして、標本平均はどの金利の場合も0に近く、また、標本分散は1に近いので、平均と分散に関していえば、 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ は求められるべき性質を有していることが分かる。ところが、歪度、尖度を見ると $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ が正規分布から大きく外れている。歪度について T-Bill と米ドルスワップの一部で仮説が棄却されない他は歪度、尖度ともに全て5% 有意で $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ は独立な正規プロセスに従っていないと結論される。歪度に関していえば、負の方向に有意なものが正のものと比べて若干多いが、意味のある構造を示していない。他方、尖度は全ての場合で正規分布の尖度3を圧倒的に超えており、非常に有意である。このことは $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ の分布が正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることを示している。これら高次のモーメントの結果から、モデルの仮定は棄却されると判断して良い。

次に $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ の独立性を調べるために $\{\hat{\varepsilon}_t\}$, $\{|\hat{\varepsilon}_t|\}$, および $\{\hat{\varepsilon}_t^2\}$ の自己相関係数を調べた。紙幅の都合で省略するが低次のラグに対する自己相関が一般に大きい。スポットレートの中で

$\{\hat{\varepsilon}_t\}$ の1次の自己相関が有意でないものは、日本円 CD 月中物、翌月物、T-Bond 30 年物、日本円デボの全てと、米ドルデボ2カ月物、3カ月物であるが、これらの場合も、T-Bond 30 年物を除いて、 $\{|\hat{\varepsilon}_t|\}$, $\{\hat{\varepsilon}_t^2\}$ の自己相関は有意であり、従って $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ が独立でない。また、これらの結果は $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ の非線形構造を示しているとともに、日次の金利系列がマルコフでないことを示唆している。他方、ユーロ円先物に関しては、 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$, $\{|\hat{\varepsilon}_t|\}$, $\{\hat{\varepsilon}_t^2\}$ とともに自己相関は相対的に小さく、有意であるものの個数も少ないので、 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ は独立であると判断することも可能であろう。同様の結果は米ドルスワップレートの3年物以降に関しても当てはまる。また、円スワップレートについては低次のラグを含め $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ の相関は有意でないが $\{|\hat{\varepsilon}_t|\}$ と $\{\hat{\varepsilon}_t^2\}$ の自己相関はかなり高次のラグにおいても有意となっており、典型的な非線型構造を示している。

3.5 シミュレーション結果

データから推定されたモデルがインプライする将来金利の確率分布を見るために、モンテカルロシミュレーションを行なった。推定に用いたデータを $R_{Nh} = \{r_0, r_h, \dots, r_{Nh}\}$ とし、 R_{Nh} を用いて最尤推定したパラメータ推定値をそれぞれ $\hat{\kappa}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\gamma}$ (表2~3) とする。このとき、独立な正規乱数 $\varepsilon_{(N+j)h}^{(1)}$, $j=1, \dots, M$ を発生させることによって、1本のサンプルパス $r_{(N+1)h}^{(1)}$, $r_{(N+2)h}^{(1)}$, $\dots$, $r_{(N+M)h}^{(1)}$ が得られる。そして、その最終時点での金利 $r_{(N+M)h}^{(1)}$ は

$$r_{(N+M)h}^{(1)} = r_{Nh} + \hat{\kappa} \sum_{j=0}^{M-1} (\hat{\theta} - r_{(N+j)h}^{(1)}) h + \hat{\sigma} \sum_{j=0}^{M-1} |r_{(N+j)h}^{(1)}| \hat{\gamma} \sqrt{h} \varepsilon_{(N+j)h}^{(1)} \quad (16)$$

で与えられる。同様の実験を全部で L 回繰り返せば、 M 時点後の金利のランダムサンプル $\hat{R}_M = \{r_{(N+M)h}^{(1)}, r_{(N+M)h}^{(2)}, \dots, r_{(N+M)h}^{(L)}\}$ が得られる。 $M=60$, $L=20,000$ としてこの実験を行ない、 $\hat{R}_M$ の要約統計量を表8~9に示した。また、いくつかの典型的な分布型を図4~7に示した。シミュレーションの結果からまず場合によっては負の金利が発生し得ることが分かる。負の金

表 6. $\{\varepsilon_t\}$ の要約統計量

	平均	分散	標準偏差	t 値	歪度	尖度
コール O/N	0.00004	1.00088	1.00044	0.00134	-1.84183*	23.91606*
手形 1M	0.00003	1.00089	1.00044	0.00092	-1.22733*	17.52300*
手形 2M	-0.00018	1.00111	1.00056	-0.00544	-1.19572*	12.39269*
手形 3M	-0.00025	1.00113	1.00056	-0.00743	-0.84083*	13.81594*
日本 CD 月中	0.00003	1.00089	1.00044	0.00105	-0.72423*	28.17560*
日本 CD1M	0.00007	1.00094	1.00047	0.00218	-1.27113*	23.25675*
日本 CD3M	0.00004	1.00089	1.00044	0.00136	-0.34428*	22.36397*
現先 1M	0.00001	1.00089	1.00045	0.00025	-11.43009*	243.28871*
米 CD1M	0.00033	1.00086	1.00043	0.01134	-0.65279*	54.37101*
米 CD3M	-0.00074	1.00086	1.00043	-0.02515	5.25869*	127.66617*
米 CD6M	0.00023	1.00084	1.00042	0.00794	-0.01676*	31.71730*
BA6M	-0.00027	1.00084	1.00042	-0.00920	0.34208*	29.91496*
米 CP3M	-0.00061	1.00084	1.00042	-0.02104	-1.17885*	11.41789*
T-Bill3M	0.00006	1.00084	1.00042	0.00193	0.01633	46.00368*
T-Bill6M	0.00013	1.00084	1.00042	0.00447	-0.05636	42.93995*
T-Bill12M	0.00003	1.00084	1.00042	0.00107	0.26300*	9.97066*
T-Bond30Y	-0.00015	1.00085	1.00042	-0.00501	0.07596	4.26883*

注) *は有意水準 5% で仮説が棄却されることを意味する(以下の表についても同様)。

表 7. $\{\varepsilon_t\}$ の要約統計量(続き)

	平均	分散	標準偏差	t 値	歪度	尖度
ユーロ円先物 3M	0.00327	1.00258	1.00129	0.06415	-0.91862*	11.83375*
ユーロ円先物 6M	0.00145	1.00259	1.00129	0.02844	0.80510*	8.71650*
ユーロ円先物 9M	-0.00026	1.00259	1.00129	-0.00513	1.50725*	10.27214*
ユーロ円先物 12M	-0.00018	1.00259	1.00129	-0.00351	1.28078*	7.78110*
ユーロ円先物 15M	0.00004	1.00259	1.00129	0.00081	1.33160*	7.60305*
ユーロ円先物 18M	0.00001	1.00259	1.00129	0.00017	1.42590*	8.04314*
円デボ 1M	0.00008	1.00062	1.00031	0.00331	-1.44587*	25.09495*
円デボ 2M	0.00025	1.00062	1.00031	0.01014	-1.40168*	20.96422*
円デボ 3M	0.00015	1.00062	1.00031	0.00594	-1.16687*	18.44998*
円デボ 6M	0.00013	1.00062	1.00031	0.00505	-0.48227*	13.13744*
円デボ 12M	-0.00007	1.00062	1.00031	-0.00295	0.53062*	17.33557*
円スワップ 2Y	-0.00003	1.00062	1.00031	-0.00111	0.47127*	8.43000*
円スワップ 3Y	-0.00006	1.00062	1.00031	-0.00226	0.68171*	11.73300*
円スワップ 5Y	-0.00009	1.00062	1.00031	-0.00369	0.81774*	9.60173*
円スワップ 7Y	-0.00014	1.00062	1.00031	-0.00549	0.64679*	8.22229*
円スワップ 10Y	-0.00008	1.00062	1.00031	-0.00329	0.72757*	9.55800*
米ドルデボ 1M	-0.00001	1.00062	1.00031	-0.00060	0.25689*	55.85595*
米ドルデボ 2M	0.00002	1.00062	1.00031	0.00069	-0.36311*	24.99565*
米ドルデボ 3M	0.00006	1.00062	1.00031	0.00247	-0.58544*	15.14321*
米ドルデボ 6M	0.00012	1.00062	1.00031	0.00483	-0.04680*	8.23079*
米ドルデボ 12M	0.00009	1.00062	1.00031	0.00357	-0.38850*	28.84782*
米ドルスワップ 2Y	0.00007	1.00062	1.00031	0.00291	0.02812	8.85647*
米ドルスワップ 3Y	0.00004	1.00062	1.00031	0.00159	-0.15940*	6.21633*
米ドルスワップ 4Y	0.00002	1.00062	1.00031	0.00072	-0.09505	5.80096*
米ドルスワップ 5Y	0.00001	1.00062	1.00031	0.00028	-0.01516	5.23884*
米ドルスワップ 7Y	-0.00000	1.00062	1.00031	-0.00003	-0.09265	5.43987*
米ドルスワップ 10Y	-0.00000	1.00062	1.00031	-0.00005	-0.08875	5.42165*

表 8. シミュレーションによって求めた金利の要約統計量

金 利	初期値	平均	平均偏差	分散	標準偏差	t 値	歪度	尖度
コール O/N	0.03250	0.03322	0.00390	0.00002	0.00490	1516.42380	0.27411	3.09594
手形 1M	0.03219	0.03176	0.00506	0.00004	0.00636	1116.70318	-0.12381	3.06286
手形 2M	0.03188	0.03114	0.00597	0.00006	0.00752	925.44661	-0.21201	3.19085
手形 3M	0.03219	0.03160	0.00652	0.00007	0.00827	854.40597	-0.37641	3.68545
日本 CD 月中	0.03250	0.03204	0.00383	0.00002	0.00480	1492.64572	0.14500	3.00559
日本 CD 1M	0.03250	0.03130	0.00254	0.00001	0.00318	2199.30311	0.19714	3.04563
日本 CD 3M	0.03200	0.03023	0.00154	0.00000	0.00193	3501.03472	0.13670	3.01729
現先 1M	0.02937	0.02764	0.00102	0.00000	0.00129	4809.69430	0.12611	3.01499
米 CD 1M	0.03180	0.03107	0.00837	0.00011	0.01053	659.55321	-0.14527	3.14598
米 CD 3M	0.03280	0.03295	0.00357	0.00002	0.00454	1621.40531	0.65007	3.78825
米 CD 6M	0.03520	0.03410	0.00677	0.00007	0.00850	897.22939	-0.07374	3.03225
BA 6M	0.03180	0.03101	0.00330	0.00002	0.00414	1673.17547	0.31643	3.14699
米 CP 3M	0.03150	0.03009	0.00302	0.00001	0.00379	1776.18713	0.21445	3.05176
T-Bill 3M	0.03130	0.03063	0.00259	0.00001	0.00325	2105.21373	0.32542	3.16936
T-Bill 6M	0.03320	0.03266	0.00266	0.00001	0.00335	2180.45622	0.33050	3.17730
T-Bill 12M	0.03560	0.03616	0.00419	0.00003	0.00530	1527.08812	0.49296	3.41361
T-Bond 30Y	0.06560	0.06541	0.00214	0.00001	0.00269	5446.32684	0.20422	3.06673

表 9. シミュレーションによって求めた金利の要約統計量(続き)

金 利	初期値	平均	平均偏差	分散	標準偏差	t 値	歪度	尖度
円金利先物 3M	0.02230	0.02070	0.00312	0.00038	0.01949	237.54582	22.47533	17536.77084
円金利先物 6M	0.02460	0.02391	0.00285	0.00002	0.00402	1328.67052	1.86625	470.96768
円金利先物 9M	0.02770	0.02691	0.00298	0.00001	0.00376	1601.68561	-0.24597	3.19355
円金利先物 12M	0.03040	0.02914	0.00324	0.00002	0.00407	1601.49571	-0.09988	3.04108
円金利先物 15M	0.03330	0.03180	0.00359	0.00002	0.00451	1577.85587	0.02273	2.99133
円金利先物 18M	0.03620	0.03454	0.00382	0.00002	0.00479	1611.22263	0.00530	2.99383
円デボ 1M	0.00562	0.00244	0.00201	0.00001	0.00251	217.63760	0.58851	3.29580
円デボ 2M	0.00562	0.00211	0.00163	0.00000	0.00203	232.21782	0.50685	3.18676
円デボ 3M	0.00562	0.00218	0.00179	0.00000	0.00223	217.98104	0.47113	3.14772
円デボ 6M	0.00562	0.00212	0.00156	0.00000	0.00195	244.06803	0.50038	3.17726
円デボ 12M	0.00625	0.00290	0.00200	0.00001	0.00249	260.57835	0.43205	3.07564
円スワップ 2Y	0.00825	0.00474	0.00371	0.00002	0.00468	226.65793	-0.13167	3.03113
円スワップ 3Y	0.01285	0.00972	0.00453	0.00003	0.00579	375.42861	-0.38581	3.47586
円スワップ 4Y	0.01720	0.01442	0.00463	0.00003	0.00590	546.38537	-0.41013	3.72266
円スワップ 5Y	0.02105	0.01866	0.00425	0.00003	0.00537	777.71622	-0.23367	3.28593
円スワップ 7Y	0.02635	0.02438	0.00394	0.00002	0.00495	1100.33927	-0.19323	3.13713
円スワップ 10Y	0.02965	0.02795	0.00343	0.00002	0.00431	1450.46478	-0.09897	3.03410
ドルデボ 1M	0.05870	0.05720	0.00608	0.00006	0.00767	1668.20926	0.42347	3.29728
ドルデボ 2M	0.05870	0.05714	0.00438	0.00003	0.00550	2321.55250	0.20303	3.05115
ドルデボ 3M	0.05930	0.05768	0.00403	0.00003	0.00506	2549.78845	0.18884	3.04331
ドルデボ 6M	0.05930	0.05770	0.00420	0.00003	0.00527	2449.76112	0.17959	3.03638
ドルデボ 12M	0.05930	0.05798	0.00524	0.00004	0.00657	1972.01281	0.18192	3.03275
ドルスワップ 2Y	0.05993	0.05920	0.00459	0.00003	0.00575	2301.99223	0.11390	3.00320
ドルスワップ 3Y	0.06099	0.06064	0.00413	0.00003	0.00518	2618.85638	0.08597	2.99653
ドルスワップ 4Y	0.06197	0.06191	0.00404	0.00003	0.00507	2732.75109	0.07455	2.99445
ドルスワップ 5Y	0.06296	0.06308	0.00394	0.00002	0.00494	2857.41913	0.04595	2.99083
ドルスワップ 7Y	0.06402	0.06433	0.00381	0.00002	0.00478	3008.28344	0.01828	2.99041
ドルスワップ 10Y	0.06561	0.06609	0.00358	0.00002	0.00449	3290.42911	0.05008	2.99181

図4. シミュレーションによって求めた金利分布
(期間構造がよく表れている例1 ユーロ円金利先物)

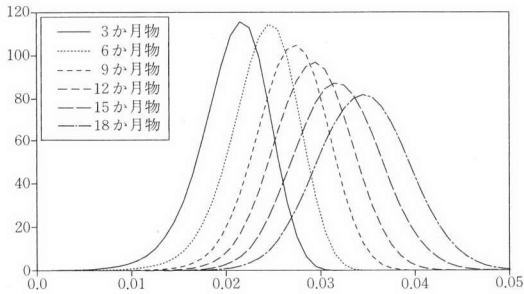


図5. シミュレーションによって求めた金利分布(続き)
(期間構造がよく表れている例2 米ドルスワップ)

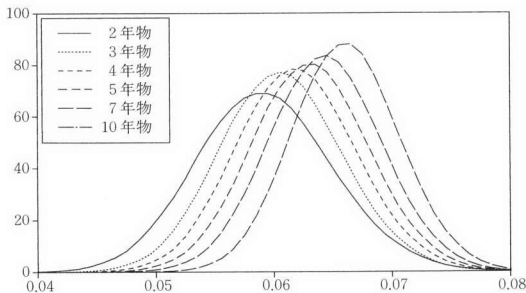
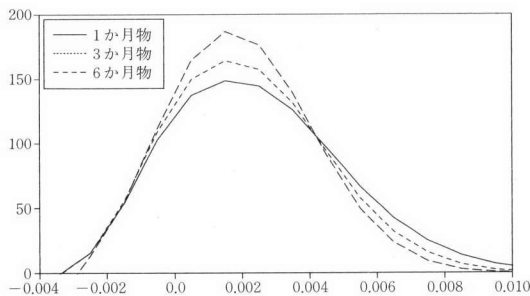
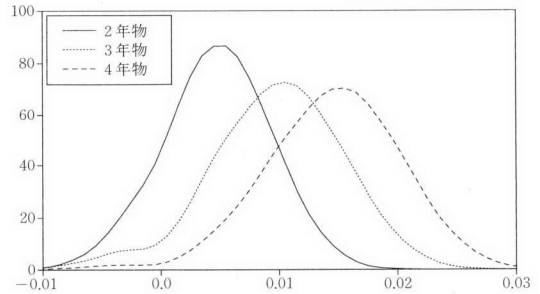


図6. シミュレーションによって求めた金利分布(続き)
(負の金利が発生した例1 日本円デボ)



利が目立つものは日本円デボと円-円スワップ(図6, 7)である。これらの場合、標本期間中金利は下降局面にあったのみならず、推定されたパラメータのもとで生成される下降トレンドは徐々に傾きを急にしてゆくような形であるため、負の金利が発生したことはもっともな結果とい

図7. シミュレーションによって求めた金利分布(続き)
(負の金利が発生した例2 日本円スワップ)



える。また $\hat{R}_M$ の要約統計量を見ると、どれも分散は非常に小さいことが分かる。そして尖度はユーロ円先物3か月、6か月を除き、ほぼ3に等しいことが分かり、 ε_t の尖度が大きいのは対照的である。また、歪度は正にも負にもなるが、全体的な傾向として、 γ が正の時に歪度は正となり、 γ が負の時には歪度も負となっている。このことは、 γ が負の場合には金利が低水準にあるほど金利の条件付分散が大きくなるというモデルの性質によるものと考えられよう。逆にいえば金利の分布の歪度から金利の条件付分散に関して一定の情報が得られることが予想される。

(一橋大学経済研究所・コロンビア大学数学部)

注

本研究は、刈屋については文部省科学研究費(基盤C09630025)の助成を受けた。記して感謝したい。

1) スポットレートアプローチによるタームストラクチャーモデルの統計分析に関する問題点に関しては、刈屋(1995)を参照。

参考文献

- [1] M. J. Brennan and E. S. Schwartz(1980) "Analyzing Convertible Bonds," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, No. 15 pp. 907-929.
- [2] L. Broze, O. Scaillet and J.-M. Zakoïan(1995) "Testing for Continuous-Time Models of the Short-Term Interest Rate," *Journal of Empirical Finance*, No. 2, pp. 199-223.
- [3] K. C. Chan, A. Karolyi, F. A. Longstaff and A. B. Sanders(1992) "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate," *Journal of Finance*, Vol. 47 No. 3, pp. 1209-1227.

- [4] J. C. Cox, J. E. Ingersol and S. A. Ross(1985) "A Theory of Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-407.
- [5] U. L. Dothan(1978) "On the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, pp. 59-69.
- [6] D. Heath, R. A. Jarrow and A. J. Morton (1990) "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, No. 4, pp. 419-440.
- [7] T. S. Y. Ho and S.-B. Lee(1981) "Term Structure Movements and Pricing Interest Rates Contingent Claims," *Journal of Finance*, Vol. 41, No. 5, pp. 1101-1029.
- [8] J. Hull and A. White(1993) "One-Factor Interest-Rate, Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28, No. 2, pp. 235-254.
- [9] T. Kariya(1993) *Quantitative Methods for Portfolio Analysis*. Kluwer Academic Publishers.
- [10] 刈屋武昭(1995)『債券計量分析の基礎と応用』東洋経済新報社.
- [11] M. Kii(1995) "A Comparison of Short-Term Interest Rate Models," 1995 年度 JAFEE 夏期大会 予稿集, pp. 74-93.
- [12] P. E. Kloeden and E. Platen(1992) *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag.
- [13] R. C. Merton(1973) "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, No. 4, pp. 141-183.
- [14] 庄司(1994)「金利期間構造モデルの予測力の比較」, 1994 年度 JAFEE 夏期大会 予稿集, pp. 128-141.
- [15] O. A. Vasicek(1977) "An Equilibrium Characterization of the Term Struncture," *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 177-188.