経済研究
Vol. 43, No. 4, Oct. 1992

統計的債券価格変動モデル

刈 屋 武 昭

1. 本稿の狙い

本稿の狙いは，市場割引関数もしくは市場スポット・レート関数を定式化し，新しい統計的債券価格変動モデルとその推定法を与えることである．またそのモデルによる予測法，モデルによる債券デュアレーションを議論する．ここで，市場割引関数とは，異なるキャッシュ・フローと異なる属性をもつ多くの債券を整合的に価格付けをする市場の割引関数であり，それは，従来の定式化と異なり時間と属性の確率的な関数である．市場割引関数もしくは市場スポット・レート関数を市場での債券価格から推定する方法は，一般に債券価格の変動構造の定式化に依存する．その価格変動構造定式化のアプローチとして

(1) 統計的(実証的)モデル・アプローチ

(2) 規範的モデル・アプローチ

に分類される．(1)のアプローチでは，市場に共通なキャッシュ・フロー割引関数に対して近似モデルとしての実証可能性をもつ統計的モデルを想定し，その推定法，金利の期間構造，意思決定法等を考察する．McCulloch(1975)によるスプライン関数モデル・アプローチがその例である．他方，(2)のアプローチでは，一定の仮説的(理論的)世界を想定して，その世界の中で成立する条件・関係と無矛盾的な確率モデルから価格変動を説明しようとする．例えば，Heath, Jarrow and Morton(1987, 1990)(以下HJMと略)では，不確実性のない世界を想定し，そこで成立するスポット・レートとフォワード・レートの裁定関係からフォワード・レートの変動モデルを無裁定(アビトレ・フリー)条件の視点から定式化する．HJMのモデルは，ゼロ・クーポン債の変動モデルである．

実際の世界では，不確実性を強く伴い，債券価格は銘柄属性(償還条件，ディフォルト・リスク等)，投資プレファランス，外的制度(税，手数料)，景気やファンダメンタルズ等の外的環境の変化の中での人々の予想の変化等，に依存する．従って，(1)(2)のアプローチの相対的優位性は事前に評価することが困難であろう．実際，スポット・レートに興味をもつ理由は，異なるキャッシュ・フローをもつ多くの債券価格を斉合的に理解することにある．現実の世界は，将来のフォワード・レートを予測できる程確実的な世界でない．問題は，現象記述モデルとしてのパフォーマンスであり，実在しているものは種々のキャッシュ・フローと種々の銘柄属性をもつ債券価格の変動であり，その変動を説明するモデルは複数存在するのである．特にゼロ・クーポン債は銘柄としては少なく，ゼロ・クーポン債価格に対するモデルをクーポン債に対するモデルに拡張する方法も多様性をもち，市場全体としての債券価格変動を理解できる近似的構造モデルが必要となろう．なお実際の債券利回りの確率変動は，必ずしもHJMモデルが想定する世界になく，時系列的構造を有していることも実証的に示される．スプライン関数を利用した実際の分析としては，山田(1990)を挙げておく．

本論文の構成としては，2節で基礎概念を確認し，モデル論的視点に基づく債券価格変動構造を一般的に記述する．3節では主観的スポット・レート関数と市場スポット・レート関数を議論する．市場スポット・レート関数は，現在

本研究は，野村奨学基金からの援助を受けた．記して感謝したい．

時点で市場で評価している将来発生するキャッシュ・フローの価格を表現するものであり，それは確率的な期間構造を表現した確率プロセスである．その背後に人々の予想がある．4節，5節ではその確率プロセスの平均値としての平均(期待)市場スポット・レート関数もしくは平均市場割引関数の定式化と推定法を与える．ここまでの議論はクロス・セクション分析である．6節では平均スポット・レート関数の予測法についてふれる．また7節では，統計的モデルのもとでのデュアレーション，債券プシーを議論する．

2. 債券分析の基礎概念構造

クーポン債を含めた一般的議論をするため，債券を将来の特定時点で一定の所得(fixed-incom)系列(キャッシュ・フロー)をもたらす証券と定義する．市場には N 銘柄存在するとし，t 時点を現在時点とする．このとき第 i 債券は，第 t 時点で観測可能な要素

(2.1) $(C_{it}(\cdot), \mathcal{Z}_{it}, P_{it}(0))$

から成るものと記述される．ここで $C_{it}(\cdot)$ はキャッシュ・フロー関数，$\mathcal{Z}_{it}$ は銘柄属性等の変数の集合，$P_{it}(0)$ は第 t 時点の第 i 債券価格である．$\mathcal{Z}_{it}$ には，t に関する時系列変動を想定して過去の債券価格や，外生的変数を含める定式化も実際では重要であろう．以下ではクロス・セクション分析を想定して明示的には含めていない．以下これらの要素を説明する．

I　キャッシュ・フロー関数

$C_{it}(s)$; $0 \leqq s \leqq s_{M(i)}$

キャッシュ・フローの発生する時点を

(2.2) $(t<) \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_m < \cdots < t_{M(i)}$

とし，それを現在時点 t からみた期間で次のように表現する．

(2.3) $s_j = t_j - t \quad (j = 0, \cdots, M(i)), \quad s_0 = 0$

ここで $t_{M(i)} = t + s_{M(i)}$ は第 i 債券の満期時点であり，$s_{M(i)}$ は現時点からみた満期期間となる．従って，$t + s_j$ 時点で発生するキャッシュ・フローは

(2.4) $C_{it}(s_j) \quad (j = 1, \cdots, M_{(i)})$

で表現されるが，$t + s_j$ 時点($j = 1, \cdots, M_{(i)}$)以外では $C_{it}(s) \equiv 0$ とおくと，連続区間 $[0, s_{M(i)}]$ で定義されるキャッシュ・フロー関数

(2.5) $C_{it} : [0, s_{M(i)}] \to [0, \infty), \quad C_{it}(s)$

が与えられる．関数形 $C_{it}(\cdot)$ は各時点 t で既知・確定である．

II　銘柄属性　$\mathcal{Z}_{it} = \{z_{ikt} : k = 1, \cdots, q\}$

各個別銘柄属性に対して，第 t 時点でその属性として q 個の観測可能な非確率的外的変数(関数)

$$z_{ikt} \equiv z_{ikt}(s) \qquad (0 \leqq s \leqq s_{M(i)})$$
$$k = 1, \cdots, q$$

が与えられる．例えば，z_{i1t} は債券の種類，$z_{i2t}(s)$ は $t + s_r$ 時点以降償還可能性を表す変数，z_{i3t} はディフォルト・リスクを表す変数，等である．

III　t 時点価格 $P_{it}(0)$

$P_{it}(s)$ で $t + s$ 時点の価格を表す．$s = 0$ での現時点価格のみが観察可能であり，t 時点での市場価格 $P_{it}(0)$ は確率変数としての実現値とみる．従って将来の価格 $P_{it}(s)$ も t 時点でみた実現不能な確率変数となり

(2.6) $\mathcal{P}_{it} = \{P_{it}(s) : 0 \leqq s \leqq s_{M(i)}\}$

は，各時点 t で $[0, s_{M(i)}]$ 上の確率プロセスを定義する．しかし実際に観測されるものは $P_{it}(0)$ だけであり，プロセスは t とともに変化する．この確率プロセスの変化は債券価格プロセスの期間構造の変化に対応する．なお，満期時点 $t + s_{M(i)}$ では確率1で $P_{it}(s_{M(i)}) = 100$ である．$\mathcal{P}_{it}$ を設定する理由は，債券の途中売却を考える場合，投資家は将来時点での価格 $P_{it}(s)$ を t 時点で予測しなければならないからである．

以上のフレーム・ワークからみると，第 i 債券の t 時点での観測可能3要素(2.1)は確定的な要素 $C_{it}(\cdot)$，$\mathcal{Z}_{it}$ と確率変数の実現値 $P_{it}(0)$ から成る．これをモデル論的視点からみると，$P_{it}(0)$ を(2.6)で定義された t 時点での価格プロセスでおきかえた

(2.7) $(C_{it}(\cdot), \mathcal{Z}_{it}, \mathcal{P}_{it})$

と表現される．この表現形式では，$\mathcal{P}_{it}$ が事前的概念としての価格プロセス・モデルであるこ

とを意味する．

3. 市場スポット・レート関数

多くの場合，スポット・レートをゼロ・クーポン債の現在価格への割引率

(3.1)　$d_{it}(s_{M(i)}) = -[\log P_{it}(0) - \log P_{it}(s_{M(i)})]/s_{M(i)}$

と定義する．$P_{it}(s_{M(i)})=100$ であるから，$P_{it}(0)$ の確率変動構造と $d_{it}(s_{M(i)})$ の変動構造は1対1に対応する．実際(3.2)は

(3.2)　$P_{it}(0) = 100\exp(-s_{M(i)}d_{it}(s_{M(i)})) \equiv 100D_{it}(s_{M(i)})$

ただし

(3.3)　$D_{it}(s) = \exp(-sd_{it}(s)),$
$D_{it}(s_{M(i)}) = P_{it}(0)/100$

と同値である．従って(3.2)の $d_{it}(s_{M(i)})$ は，それ自体価格 $P_{it}(0)$ の1対1変換にすぎない．しかし d_{it} を $[0, s_M]$ 上で定義されたスポット・レート関数

(3.4)　$d_{it}:[0, s_M] \to [0, 1]$　ただし
$M = \max\{M(1), \cdots, M(N)\}$

とみて，t 時点価格を(3.2)の表現のように(3.3)の割引関数 $D_{it}(s)$ の $s=s_{M(i)}$ での値で割り引いた値と理解しようとする．この視点の場合，次の点を注意することが必要である．

i) 割引関数 $D_{it}(s)$（もしくはスポット・レート関数 $d_{it}(s)$）は各 s に対して確率変数である．従って

(3.5)　$\mathscr{D}_{it} = \{D_{it}(s) : 0 \leqq s \leqq s_M\}$

を確率プロセスとみる．$\mathscr{D}_{it}$ を定式化することと $P_{it}(0)$ の確率分布を定式化することと同値である．しかし $\mathscr{D}_{it}$ を $P_{it}(0)$ の変動原因とみる場合が多い．

ii) D_{it}（もしくは d_{it}）は一般に銘柄属性（例えばディフォルト・リスク，償還条件など）に依存する．他方，第 i 銘柄の割引関数 $D_{it}(s)$ の値は(3.3)を通して $s=s_{M(i)}$ に対してのみ観察可能である．従って N 銘柄のデータ $D_{it}(s_{M(i)})$（もしくは $d_{it}(s_{M(i)})$）($i=1, \cdots, N$) から D_{it}（もしくは d_{it}）の関数形の統計的推定可能性をもつためには，何らかの事前的モデルが必要となる．モデルとしては1節で述べたように統計的モデルもしくは規範的モデルに区別されよう．

以上のゼロ・クーポン債のスポット・レート関数の考え方をさらに吟味し，一般の債券の場合に拡張するため，

(1)　主観的スポット・レート関数

(2)　市場スポット・レート関数

に分けて議論する．

(1) 主観的スポット・レート関数

ある投資家が投資期間 $(0, s_L]$ をもち，第 i 債券を購入すると想定しよう．第 i 債券のキャッシュ・フローは，(1.3)のように各 s_j 期間後に発生し，s_L は満期前で $s_m \leqq s_L < s_{m+1} (< s_{M(i)})$ であるとする．このとき

i) 現在 t 時点で確実なもの：(1.1)の $(C_{it}(\cdot), \mathscr{Z}_{it}, P_{it}(0))$

ii) 現在 t 時点で不確実なもの：$t+s_L$ 時点の価格 $P_{it}(s_L)$

である．投資期間が $(0, s_L]$ であるので，$s_1, \cdots, s_m$ 期間後に得られるキャッシュ・フロー $\{C_{it}(s_j)\}$ を $t+s_L$ 時点まで再投資するとし，その予想再投資レート関数を $b_{it}(s)$ とする．$b_{it}(s)$ は t 時点で予想した $t+s$ 時点での再投資レートである．その予想には不確実性を伴う．$b_{it}(s)$ に基づく複利関数を

(3.6)　$B_{it}(s, s_L) \equiv \exp((s_L - s)b_{it}(s))$

とおく（または $(1+b_t(s))^{s_L-s}$ としてもよい）．このとき $t+s_j$ 時点後得られるキャッシュ・フロー $C_{it}(s_j)$ の $t+s_L$ 時点での予想キャッシュ・フローは $C_{it}(s_L)B_{it}(s, s_L)$ となる：

(3.7)　$C_{it}(s_j) \to C_{it}(s_j)B_t(s_j, s_L).$

従って売却時での予想収入は

(3.8)　$\sum_{j=1}^{m} C_{it}(s_j)B_{it}(s_j, s_L) + P_{it}(s_L)$

となる．これを現在価値に直すために，主観的スポット・レート関数を

(3.9)　$\delta_{it}:[0, s_L] \to [0, 1]$

とし，$t+s_L$ 時点での予想収入 $I_{it}(s_L)$ を現在価値に直す主観的割引関数を

(3.10)　$\varDelta_{it}(s, s_L) = \exp(-s_L\delta_{it}(s))$

とする．このとき各 $t+s_j$ 時点で発生し，それ

を予想再投資レート $b_t(s_j)$ で再投資した結果得られる予想所得(3.8)の現在価値は $C_{it}(s_j)\tilde{D}_{it}(s_j)$，ただし

$$(3.11)\qquad \tilde{D}_{it}(s) \equiv \tilde{D}_{it}(s, s_L) = B_{it}(s, s_L)\varDelta_{it}(s, s_L) = \exp((s_L - s)\,b_{it}(s) - s_{is}\delta_{it}(s))$$

となる．その結果予想収入全体の現在価値は

$$(3.12)\qquad Q_{it}(s_L) = \sum_{j=1}^{m} C_{it}(s_j)\tilde{D}_{it}(s_j) + P_{it}(s_L)\tilde{D}_{it}(s_L)$$

となる．ここで $t+s_L$ 時点で共通に発生する予想キャッシュ・フロー(所得)に対して割引関数 $\varDelta_{it}(s, s_L)$ の値が異なる理由は

1) 再投資レートは予測に基づくものであり，遠くに発生する再投資レートの信頼性が低くなること
2) 再投資レートは，将来の外的環境に大きく依存し，一般金利水準に影響を与える外的環境の変動を予想することが必要であること

のためである．このことは，主観的スポット・レート関数 $\delta_{it}(s)$ が，将来の外部環境に依存した主観的確率分布に依存することを意味している．$\tilde{D}_{it}(s)$ の指数部分

$$(3.13)\qquad -s_L[\delta_{it}(s) - b_{it}(s)] - sb_{it}(s)$$

に対して次の 2 つの場合を区別する

(i) $\delta_{it}(s) = b_{it}(s)$ 通常おかれる仮定．このとき

$$(3.14)\qquad \tilde{D}_{it}(s) = \exp(-s\delta_{it}(s))$$

(ii) $\delta_{it}(s) \neq b_{it}(s)$

以下では(i)の場合を考察する．(ii)の場合は別な機会に議論する．

(i)の場合の予想収入の現在価値 $Q_{it}(s_L)$ の評価について

a) 予想再投資レート＝主観的スポット・レート $\delta_{it}(s)$ は予測に基づく

b) $P_{it}(s_L)$ は予測価格である

に注意する．すなわち，(3.12)の $Q_{it}(s_L)$ は，主観的スポット・レート関数 $\delta_{it}(s)$ もしくはそれと 1 対 1 の関係にある割引関数 $D_{it}(s)$ と $P_{it}(s_L)$ の予測値の関数

$$(3.15)\qquad Q_{it}(s_L) \equiv Q_{it}(\tilde{D}_{it}(s_L), P_{it}(s_L))$$

とみることができる．従って，$\delta_{it}(s)$ と $P_{it}(s_L)$ を与えることによって債券の主観的価値 $Q_{it}(s_L)$ を評価し，それを現在時点の市場価値 $P_{it}(0)$ と比較して，第 i 債券の購入についての意思決定が可能となる．しかし実際の意思決定では，上の a), b)に関する不確実性(リスク)を考慮する必要があり，その取り扱いとしては $\delta_{it}(s)$，$P_{it}(s_L)$ を主観的確率分布をもつ確率変数とみることが妥当であろう．これが次の市場スポット・レート関数のテーマである．

(2) 市場スポット・レート関数

上の議論を市場全体としての価格変動モデルに発展させることを考える．各個人の投資スタンス，投資期間，予測法はきわめて多様的であり，多くの債券と多くの投資家が存在し，また外的環境の変化は不確実性を伴うことにより，主観的スポット・レート関数を確率変数とし，市場全体としての市場スポット・レート関数 $d_{it}(s)$ とみる．その場合，市場全体としての割引関数 $D_{it}(s)$ は，市場での現在価格 $P_{it}(0)$ を決めるものとなるから，恒等的に

$$(3.16)\qquad P_{it}(0) \equiv Q_{it}(D_{it}(s)\,;\,P_{it}(s_{M(i)})),$$

ただし $P_{it}(s_{M(i)}) = 100$

$$D_{it}(s) = \exp(-sd_{it}(s))$$

が成立することになる(下記の注意も見よ)．この関係は，恒等式であって，$D_{it}(s)$ の実現と $P_{it}(0)$ の実現は同等である．この視点では，第 i 債券の第 t 時点の(事前的)価格変動モデル

$$(C_{it}(\cdot), \mathcal{Z}_{it}, P_{it}(0))$$

の $P_{it}(0)$ を(3.5)の $\mathcal{D}_{it}$ でおきかえた

$$(C_{it}(\cdot), \mathcal{Z}_{it}, \mathcal{D}_{it})$$

と同一視する．

しかしここでの問題は，$\mathcal{D}_{it}$ の識別可能性の問題である．すなわち(3.16)を満たす割引関数 D_{it} は無数に存在し，従って市場スポット・レート関数も無数に存在する．それゆえ D_{it} もしくは d_{it} に対して特定な構造を前提しない限り，与えられたデータ

$$(C_{it}(\cdot), \mathcal{Z}_{it}, P_{it}(0)) \qquad (i=1, \cdots, N)$$

からそれらを識別できない．ゼロ・クーポン債

の場合，(3.1)でみたように $P_{it}(0)$ と $d_{it}(s_{M(i)})$ が1対1で対応するから，$d_{it}(s)$ の銘柄属性への依存の定式化が必要となった．いずれにしても，市場スポット・レート関数 $d_{it}(s)$ もしくは割引関数 $D_{it}(s)$ を t 時点価格 $P_{it}(0)$ の確率変動構造を与えるものとみる場合，統計的モデルにせよ，規範的モデルにせよ，事前に与えて識別可能性と統計的推定可能性を確保する必要がある．その意味で，スポット・レート関数はモデル論的概念である．

4. ゼロ・クーポン債の市場スポット・レート関数統計的モデル

債券 i の第 t 時点価格変動構造を $(C_{it}(\cdot), \mathcal{Z}_{it}, \mathcal{D}_{it})$ とみる場合，割引関数 $D_{it}(s)$ の確率プロセスのモデルが必要であることを述べた．従って統計的モデルのクラスとしては，

(4.1)　$$P_{it}(0) = \sum_{j=1}^{M(i)} C_{it}(s_j) D_{it}(s_j)$$

を想定する．ここで記号の簡単化のために $C_{it}(s_{M(i)})$ は $C_{it}(s_{M(i)})+100$ を意味するものとする．また(4.1)で $D_{it}(s_j)$ が確率変数である．その確率変動は，銘柄属性 $\mathcal{Z}_{it}$ に依存するであろうし，他の債券の確率変動と相関をもつ．$D_{it}(s)$ の確率構造の定式化で注意する点は

1) 満期期間 $s_{M(i)}$ が短くなると $P_{it}(0)$ の変動が小さくなるということ，
2) 銘柄属性に依存する変動と市場に共通な変動を分離する仕方

である．

以下では

A) ゼロ・クーポン債の統計的モデル
B) クーポン債の統計的モデル

に分けて議論する．本節ではA)を議論し，次節でB)を扱う．

(4.1)で $M=\max M(i)$ とし，$D_{it}(s)$ を $[0, s_M]$ 上の確率プロセスとみて，$D_{it}(s)$ が銘柄に依存する変動と市場共通な変動を分離するモデル化を考える．ゼロ・クーポン債の場合，

$$P_{it}(0) = 100 D_{it}(s_{M(i)}) = 100 \exp(-s_{M(i)} d_{it}(s_{M(i)}))$$

であるから，$d_{it}(s)$ を定式化すればよい．

(1) 市場スポット・レート関数の不等分散・分散分析モデル

(4.2)　$$d_{it}(s) = \mu_t(s) + \gamma_{it}(s) + \varepsilon_{it}(s)$$

i) $\mu_t(s) = \delta_{0t} + \delta_{1t}s + \delta_{2t}s^2 + \cdots + \delta_{pt}s^p$

ii) $\gamma_{it}(s) = \alpha_{1t}(s) z_{i1t} + \cdots + \alpha_{1qt}(s) z_{iqt}$

iii) $\varepsilon_{it}(s)$ は確率的誤差項で平均 $E[\varepsilon_{it}(s)]=0$，分散共分散
$\sigma_{ikt} = \mathrm{Cov}(\varepsilon_{it}(s), \varepsilon_{kt}(s')) = \lambda_{ikt} \min(c_i(s), c_k(s'))$
$c_i(s)$ は s の既知関数，
$c_i(0)=0, c_i(s)>0$，
$\boldsymbol{\Lambda}_t=(\lambda_{ikt})$ は正値定符号行列

このモデルでは，$d_{it}(s)$ の平均値が，銘柄に依存せず共通な平均スポット・レート関数 $\mu_t(s)$ と，銘柄属性 z_{it} に依存する $\gamma_{it}(s)$ の和に分解されることを仮定している．さらに $\mu_t(s)$ は s の多項式で近似可能とする．$\gamma_{it}(s)$ は銘柄属性変数の一次近似可能とし，その係数 $\alpha_{jt}(s)$ は s の簡単な式で表現できるものとする．以下では

(4.3)　$$\alpha_{jt}(s) \equiv \alpha_{jt}$$

と仮定する．

誤差項 $\varepsilon_{it}(s)$ の確率構造の定式化は，N 次元確率プロセス

(4.4)　$$\boldsymbol{\varepsilon}_t(s) = (\varepsilon_{1t}(s), \cdots, \varepsilon_{Nt}(s)), \quad 0 \leqq s \leqq M$$

に関するものであるが，実際の利用可能な観察値は

(4.5)　$$s_{M(1)} \leqq s_{M(2)} \leqq \cdots \leqq s_{M(N)}$$

に対応するものだけであるので，iii)のように

(4.6)　$$(\varepsilon_{1t}(s_{M(1)}), \cdots, \varepsilon_{Nt}(s_{M(N)}))$$

の確率分布の構造を定式化すればよい．iii)で不等分散を仮定するのは，すでに述べたように債券価格の分散が満期に近づくと小さくなることによる．従ってiii)の $c_i(s)$ は s の単調増加関数であると想定し，以下では

(4.7)　$$c_i(s) = s_{M(i)} \qquad (i=1, \cdots, N)$$

と仮定する．また λ_{ikt} をすべて未知とすると推定不能となるので，例えば銘柄属性の関数と

して適当な

(4.8) $a_{ikt} = a_{ikt}(z_{it}, z_{kt}) \exp(-|s_{M(i)} - s_{M(k)}|),$

$\boldsymbol{z}_{it} = (z_{i1t}, \cdots, z_{iqt})'$

をとり

(4.9) $\lambda_{ikt} = \begin{cases} \sigma^2 a_{iit} \\ \sigma^2 \rho a_{ikt} & (i \neq k) \end{cases}$

のような定式化をとる．

なお，$d_{it}(s)$ に対して(4.2)のような定式化ができるのは，$P_{it}(0)$ の変動と $d_{it}(s_{M(i)})$ が1対1対応することによる．これはゼロ・クーポン債の場合であって，クーポン債の場合はそのままでは妥当でない．

推定法

(4.2)のモデルは，回帰式モデルとして

(4.10) $\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{X}_t \boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{\eta}_t$

と表現される．ここで

(4.11) $\boldsymbol{y}_t = (d_{1t}(s_{M(1)})/s_{M(1)}{}^{1/2}, \cdots, d_{Nt}(s_{M(N)})/s_{M(N)}{}^{1/2})' : N \times 1$

$\boldsymbol{X}_t = (x_{ijt}) : N \times (p+q+1)$

$(i = 1, \cdots, N : j = 0, 1, \cdots, p+q)$

$x_{i0t} = s_{M(i)}{}^{-1/2}, x_{ijt} = s_{M(i)}{}^{j}/s_{M(i)}{}^{1/2}$

$(j = 1, \cdots, p)$

$x_{ijt} = z_{ij-pt}/s_{M(i)}{}^{1/2}$

$(j = p+1, \cdots, p+q)$

$\boldsymbol{\beta}_t = (\delta_{0t}, \delta_{1t}, \cdots, \delta_{pt}, \alpha_{1t}, \cdots, \alpha_{qt})' : (p+q+1) \times 1$

$\boldsymbol{\eta}_t = (\varepsilon_{1t}(s_{M(1)})/s_{M(1)}{}^{1/2}, \cdots, \varepsilon_{Nt}(s_{M(N)})/s_{M(N)}{}^{1/2})'$

である．このとき $\boldsymbol{\eta}_t$ の分散行列は，

(4.12) $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t) = \boldsymbol{\Lambda}_t = \sigma^2[(1-\rho)\boldsymbol{J}_t + \rho \boldsymbol{A}_t] \equiv \sigma^2 \boldsymbol{\Lambda}_{0t}(\rho)$

となる．ここで

(4.13) $\boldsymbol{J}_t = \mathrm{diag}\{a_{11t}, \cdots, a_{NNt}\},$

$\boldsymbol{A}_t = (a_{ijt})$

である．従って一般化最小2乗法により

(4.14) $\phi(\rho, \boldsymbol{\beta}_t) = (\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}_t)' \boldsymbol{\Lambda}_{0t}(\rho)^{-1} (\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}_t)$

をニュートン・ラプソン法等で最小化(もしくは繰返し計算 $\rho(0) = 0 \rightarrow \min \phi_t(0, \boldsymbol{\beta}_t) \rightarrow \boldsymbol{\beta}_t(1) \rightarrow \min \phi_t(\rho, \boldsymbol{\beta}_t(1)) \rightarrow \rho(1) \rightarrow \cdots$)とすると，一般化最小2乗推定量 $(\hat{\boldsymbol{\beta}}_t, \hat{\rho})$

(4.15)

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t = (\boldsymbol{X}_t' \boldsymbol{\Lambda}_{0t}(\hat{\rho})^{-1} \boldsymbol{X}_t)^{-1} \boldsymbol{X}_t' \boldsymbol{\Lambda}_{0t}(\hat{\rho})^{-1} \boldsymbol{y}_t$$

を得る．これから $\hat{\delta}_{jt}, \hat{\alpha}_{jt}$ を得る．この推定量が十分有効であるためには

i) N が大きいこと

ii) $s_{M(i)}$ がばらついていること

が望ましい．しかしゼロ・クーポン債はi)ii)を同時に満たさないであろう．

(2) 割引関数 $D_{it}(s)$ のモデル化

ゼロ・クーポン債のもう1つの価格モデル化として，

(4.16) $D_{it}(s) = \exp(-s d_{it}(s))$

を直接モデル化することを考える．その理由として(1)のモデルを(4.16)に代入すると，$\varepsilon_{it}(s)$ が正規分布をすると仮定できる場合でも

(4.17) $E[P_{it}(0)] = 100 E[D_{it}(s_{M(i)})] = 100 \exp[-s\mu_t(s) - s\gamma_{it}(s) + \frac{1}{2}s^2\sigma_{iit}]$

となり，割引関数に $\varepsilon_{it}(s)$ の分散 σ_{iit} の効果がでる．その効果は望ましい場合もあるであろうが，$\gamma_{it}(s)$ の役割と2重になるとも考えられる．そこで

(4.18) $P_{it}(0) = 100 E[D_{it}(s_{M(i)})] + \eta_{it}$

$\eta_{it} = 100\{D_{it}(s_{M(i)}) - E[D_{it}(s_{M(i)})]\}$

と書き替えて，$D_{it}(s_{M(i)})$ の平均値と η_{it} の分散を定式化することを考える．このアプローチは，クーポン債の場合にも適用可能であるので，次節で議論する．

5. クーポン債の市場スポット・レート関数の統計的モデル

利用可能な N 銘柄のクーポン債(含ゼロ・クーポン債)に対する市場スポット・レート関数モデルを定式化しようとする場合，銘柄毎にキャッシュ・フローが発生する時点が異なる．それを明示的に示す場合

(5.1) $s_j = s(i)_j$

$(j=1,\cdots,M(i):i=1,\cdots,N)$

と書く．これらの時点のすべてを小さい順に並べたものを

(5.2) $s_{a1}<s_{a2}<\cdots<s_{aM},\quad M=\max M(i)$

と書く．そして $C_{it}(s)$ を $0\leqq s\leqq M$ で定義された関数とみる．満期時点の額面 100 円も $C_{it}(s)$ の中に組み込まれているとする．以下で考察するモデルは

(5.3) $P_{it}(0)=\sum_{j=1}^{M}C_{it}(s_{aj})D_{it}(s_{aj})=\boldsymbol{C}_{it}'\boldsymbol{D}_{it}$

$\boldsymbol{C}_{it}=(C_{it}(s_{a1}),\cdots,C_{it}(s_{aM}))':M\times 1$

$\boldsymbol{D}_{it}=(D_{it}(s_{a1}),\cdots,D_{it}(s_{aM}))':M\times 1$

である．$\boldsymbol{D}_{it}$ は確率変数である．$s_{ak}=s(i)_j$ でない限り $C_{it}(s_{ak})=0$ に注意せよ．

(1) 割引関数のモデル化

割引関数 $D_{it}(s)$ を直接モデル化する場合，(5.3)を

(5.4) $P_{it}(0)=\boldsymbol{C}_{it}'\bar{\boldsymbol{D}}_{it}+\eta_{it},\ \bar{\boldsymbol{D}}_{it}=E(\boldsymbol{D}_{it})$

$\eta_{it}=\boldsymbol{C}_{it}'\boldsymbol{\nu}_{it}\qquad \boldsymbol{\nu}_{it}=\boldsymbol{D}_{it}-\bar{\boldsymbol{D}}_{it}$

と変形し，$\bar{\boldsymbol{D}}_{it}(s)=E(\boldsymbol{D}_{it}(s))$ と ν_{it} の確率構造を定式化する．$\bar{D}_{it}(s)$ の定式化として McCulloch(1971)のようにスプライン関数や 4 節のように多項式を仮定できる．その場合の議論は以下の議論と同じである．いずれの場合も問題は，銘柄属性変数の取り扱いであり，ここでは次の多項式の係数がそれらの変数に依存する場合を考える．

(5.5) $D_{it}(s)=1+\delta_{1t}(\boldsymbol{z}_{it})s+\cdots+\delta_{ip}(\boldsymbol{z}_{it})s^{p}$

$\delta_{jt}(\boldsymbol{z}_{it})=\delta_{j0t}+\delta_{j1t}z_{i1t}+\cdots+\delta_{jqt}z_{iqt}$

$\mathrm{Cov}(\eta_{it},\eta_{kt})=\lambda_{ikt}\boldsymbol{C}_{it}'\boldsymbol{\Phi}_{ikt}\boldsymbol{C}_{kt},$

$\boldsymbol{\Phi}_{ikt}=\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\nu}_{it},\boldsymbol{\nu}_{kt})$

ここで $\boldsymbol{\Phi}_{ikt}=(\phi_{ikt\cdot jr})$ とおくと，$\phi_{ikt\cdot jr}$ は $D_{it}(s_{aj})$ と $D_{kt}(s_{ar})$ の共分散で，それを例えば

(5.6) $\phi_{ikt\cdot jr}=f(s_{aj},s_{ar})=\exp(-|s_{aj}-s_{ar}|)$

と定式化する．このもとに以下では

(5.7) $f_{ikt}=\boldsymbol{C}_{it}'\boldsymbol{\Phi}_{ikt}\boldsymbol{C}_{kt}\qquad \boldsymbol{F}_t=(f_{ikt})$

の記号を用いる．また，λ_{ikt} として(4.9)の形のものを用いる．そのときモデルは，回帰モデルとして

(5.8) $\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}_t+\boldsymbol{\eta}_t$

$\boldsymbol{y}_t=(y_{it}),\quad y_{it}=P_{it}(0)-\sum_{j=1}^{M}C_{it}(s_{aj})$

$\boldsymbol{\beta}_t=(\boldsymbol{\delta}_{1t}',\cdots,\boldsymbol{\delta}_{qt}')',$

$\boldsymbol{\delta}_{kt}=(\delta_{k0t},\cdots,\delta_{kqt})'$

$\boldsymbol{X}_t=(X_{ijt}),\quad x_{ijt}=\sum_{k=0}^{p}z_{ikt}s_{aj}^{k}C_{it}(s_{aj}),$

$z_{i0t}=1$

$\boldsymbol{\eta}_t=(\eta_{1t},\cdots,\eta_{Nt})',\quad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t)=\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_t$

$=\sigma^2(\sigma_{ijt})$

$\sigma_{iit}=a_{iit}f_{iit},\quad \sigma_{ijt}=\rho a_{ijt}f_{ijt}$

とおく．このとき

(5.9) $(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}_t)'\boldsymbol{\Sigma}_t(\rho)^{-1}(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}_t)$

を $\boldsymbol{\beta}_t$ と ρ に関して最小にすることで，$\boldsymbol{\beta}_t$ の一般化最小 2 乗推定量

(5.10) $\hat{\boldsymbol{\beta}}_t=(\boldsymbol{X}_t'\boldsymbol{\Sigma}_t(\hat{\rho})^{-1}\boldsymbol{X}_t)^{-1}\boldsymbol{X}_t'\boldsymbol{\Sigma}_t(\hat{\rho})^{-1}\boldsymbol{y}_t$

を得る．

(2) 市場スポット・レート関数のモデル化

$D_{it}(s)=\exp(-sd_{it}(s))$ において $d_{it}(s)$ をモデル化する．$d_{it}(s)$ のプロセスとして(4.2) i)ii)iii)を仮定し，誤差項 $\varepsilon_{it}(s)$

(5.11) $\varepsilon_{it}(s)\sim N(0,\sigma_{iit}(s,s'))$

$\mathrm{Cov}(\varepsilon_{it}(s),\varepsilon_{kt}(s'))$

$=\sigma_{ikt}(s,s')$

$=\sigma_{ikt}(s',s)$

を仮定する．ここで $\sigma_{ikt}(s,s')$ として例えば

(5.12) $\sigma_{ikt}(s,s')=\lambda_{ikt}\exp(-|s-s'|)$

をとる．この場合

(5.13) $E[D_{it}(s)]=\exp(-s\bar{d}_{it}(s)$

$+\frac{1}{2}s^2\sigma_{iit}(s,s))$

$=h_{it}(s,\boldsymbol{\theta}_t)$

であるから

$\boldsymbol{h}_{it}(\boldsymbol{\theta}_t)=(h_{it}(s_{a1},\boldsymbol{\theta}_t),\cdots,h_{it}(s_{aM},\boldsymbol{\theta}_t))'$

とおくと

(5.14) $E(y_{it})=\boldsymbol{C}_{it}'\boldsymbol{h}_{it}(\boldsymbol{\theta}_t)$

となる．ここで $\boldsymbol{\theta}_t$ はモデルに含まれる未知パラメータのベクトルである．また

(5.15) $\phi_{ikt\cdot jr}=\mathrm{Cov}(D_{it}(s_{aj}),D_{kt}(s_{ar}))$

$=g_{ik}(s_{aj},s_{ar},\boldsymbol{\theta}_t)h_{it}(s_{aj},\boldsymbol{\theta}_t)$

$h_{kt}(s_{ar},\boldsymbol{\theta}_t)$

$g_{ik}(s_{aj},s_{ar},\boldsymbol{\theta}_t)=\exp(s_{aj}s_{ar}$

$\sigma_{ikt}(s_{aj},s_{ar}))-1$

であるから，$\boldsymbol{\Phi}_{ikt}=(\phi_{ikt\cdot jr})$ とおくと

$$(5.16)\quad \mathrm{Cov}(y_{it}, y_{kt}) = \boldsymbol{C}_{it}'\boldsymbol{\Phi}_{ikt}\boldsymbol{C}_{kt} \equiv \omega_{ikt}(\boldsymbol{\theta}_t)$$

となる．そこで

$$(5.17)\quad \boldsymbol{\tau}_t(\boldsymbol{\theta}_t) = (h_{1t}(\boldsymbol{\theta}_t), \cdots, h_{Nt}(\boldsymbol{\theta}_t))',$$
$$\boldsymbol{\Omega}_t(\boldsymbol{\theta}_t) = (\omega_{ikt}(\boldsymbol{\theta}_t))$$

とおき，

$$(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\tau}_t(\boldsymbol{\theta}_t))'\boldsymbol{\Omega}_t(\boldsymbol{\theta}_t)^{-1}(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\tau}_t(\boldsymbol{\theta}_t))$$

を $\boldsymbol{\theta}_t$ に関して最小にし，市場割引関数の平均値(5.13)を求め，理論価格(5.14)を推定する．

6. 市場スポット・レート関数の予測

3節から5節の何れの場合でも，市場割引関数もしくは市場スポット・レート関数は，構造パラメータ $\boldsymbol{\theta}_t$ をクロス・セクションデータで推定される．その推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t$ は，$\boldsymbol{z}_{it}$ と価格 $P_{it}(0)$ $(i=1, \cdots, N)$ の関数であり，推定量は互いに相関をもった時系列プロセスを作る．そこでその予測法としては，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_t, t=1, \cdots, T$ に対して MTV モデル，もしくは VAR モデルを適用し，将来のパラメータ $\boldsymbol{\theta}_{t+k}$ を予測できる．従って将来の市場スポット・レート関数を予測でき，投資戦略を考察できる．実際には，$\mathcal{Z}_{it}$ の中に過去の種々の変数を含めておいて時系列構造を表現したモデルの定式化をしておくことも重要であろう．

他方，すでに議論したように，t 時点で観測される価格 $P_{it}(0)$ に対してその変動構造として市場割引関数のプロセス $\mathcal{D}_{it}$ を想定する場合，その定式化には多くの多様性があり，データはそのプロセスを識別する能力をもたない．そこで多くのクーポン債，ゼロ・クーポン債に対して，内部収益率を求め，その内部収益率の時系列変動構造を分析することで，異なるキャッシュ・フロー系列と銘柄属性をもつ債券の市場評価モデルと予測可能性が得られる．そこでも MTV モデル等が役にたつであろう．そこでの期間構造はインプリシットであるが，モデルの係数等を通じて一定の解釈が可能となろう．Litterman and Scheinkman(1988)，刈屋(1991)がその例である．

さらに HJM(1989)でも，初期フォワード・レート関数を主成分分析で推定し，それを3項確率プロセスで攪乱させ，t 時点でのフォワード・レート関数を与えている．

7. 統計的モデルでのデュアレーション

クーポン債に対するモデル(5.4)(5.5)について，時間 t の経過に対する価格変動，市場スポット・レート関数の変化を考察しよう．時点 t が $t+h$ に移行した場合，第 i 債券の $t+h$ 時点価格は，

$$(7.1)\quad P_{it+h}(0) = \sum_{j=1}^{M(i)} C_{it+h}(s_j-h) \times \bar{D}_{it+h}(s_j-h)+\eta_{it+h}$$

となる．キャッシュ・フローが発生する時点は，$t+h$ 時点からみると s_j-h 期間後 $(j=1, \cdots, M(i))$ であるが，時点で表現すると，$t+h+s_j-h=t+s_j(j=1, \cdots, M(i))$ であるので，

$$(7.2)\quad C_{it+h}(s_j-h) = C_{it}(s_j) \qquad j=1, \cdots, M(i)$$

が成立する．時間経過の中で，$P_{it+h}(0)$ の変動構造の変化は

(1) 市場割引関数の平均値としての関数 $\bar{D}_{it+h}(s)$ の変化と，時間の経過による評価時点の変化($s=s_j$ から $s=s_j-h$ への変化)

(2) 誤差項 η_{it+h} の確率的変動構造の変化

に分解される．以下この2つについて述べる．

(1) 債券プシー $\boldsymbol{\Psi}_t$

これまで $\bar{D}_{it}(s)$ のように t と s を区別して議論してきた理由は，その割引関数が各時点 t に対して s の関数として金利の期間構造を内蔵するからであり，時点 t の変化による関数形 $\bar{D}_{it}(\cdot)$ の変化を表現させるためであった．従って以下では，これを t と s の関数として

$$(7.3)\quad G(t, s) = \bar{D}_{it}(s) \qquad (t, s) \in [0, \infty)\times[0, \infty)$$

と表現し，$G(t, s)$ はテイラー展開可能，すなわち

$$(7.4)\quad G(t+h, s+k) = G(t, s)+G_t(t, s)h+G_s(t, s)k +\frac{1}{2}[G_{tt}(t, s)h^2+2G_{ts}(t, s)hk$$

$$+G_{ss}(t,s)k^2]+\cdots$$

と表現されるものとする．ここで G_t, G_{ts} はそれぞれの変数に関する偏微分である．従って $t \to t+h$ による平均割引関数 $\bar{D}_{it}(s)$ の変化は，$k=-h$ とおいて

(7.5) $$\bar{D}_{it+h}(s-h)=\bar{D}_{it}(s)+\psi_{it}(s)h+\frac{1}{2}\phi_{it}(s)h^2+\cdots$$

ただし，

$$\psi_{it}(s)=\frac{\partial}{\partial t}\bar{D}_{it}(s)-\frac{\partial}{\partial s}\bar{D}_{it}(s)$$

(7.6) $$\phi_{it}(s)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{D}_{it}(s)-2\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\bar{D}_{it}(s)+\frac{\partial^2}{\partial s^2}\bar{D}_{it}(s)$$

となる．通常債券のデュアレーションを考えるときは，t の変化に対する割引関数の変化は小さいとし，固定利回り(内部収益率) $d_{it}(s)\equiv r$ のパラレル・シフトに関する変化として種々のデュアレーション，あるいはコンベキシティを考える．しかし割引関数あるいは金利の期間構造カーブ(市場スポット・レート関数)は一定でないので，その関数形の変化と，そのもとでの割引値の値の変化を考慮に入れた(7.5)の表現がより一般的であり，実際的でもある．実際，(7.5)の表現のもとでは，いわゆるコンベキシティは一般に云えないので通常の分析がそのままでは成立しない．また多くの通常の分析では確率的変動を考慮していない．

(7.5)から価格に対する平均割引関数の変化の割合を表現するために $\bar{P}_{it}(t)=E[P_{it}(0)]$ とおくと，(7.2)(7.5)より

(7.7) $$\bar{P}_{it+h}(0)=\bar{P}_{it}(0)+\sum_{j=1}^{M(i)}C_{it}(s_j)\psi_{it}(s_j)h+o(h)$$

$$\lim_{h\to 0}o(h)/h=0,$$

と表現される．従って時間経過 $t\to t+h$ の中での市場平均割引関数の変化による平均価格の変化は

(7.8) $$d\bar{P}_{it}(0)/dt=\sum_{j=1}^{M(i)}C_{it}(s_j)\psi_{it}(s_{ji})$$

となる．これが金利期間構造を内蔵する割引関数の変化による平均価格の変化であり，通常の $dP_{it}(0)/dr$ に対応するもので，期間構造(市場スポット・レート関数)の変化とそのもとでの割引率の変化を表現したものである．将来の修正デュアレーションに対応するものとして

(7.9) $$\Psi_{it}=(d\bar{P}_{it}(0)/dt)/P_{it}(0)$$

を定義すると，時間経過の中での期間構造の変化による価格変化の割合を表現できる．これは時間変化の中での価格変化率をみる測度であるし，債券投資の1つの測度となろう．(7.9)の Ψ_{it} を**債券プシー**とよぶことにする．(7.9)を実際に評価するためには，平均割引関数 $\bar{D}_{it}(s)$ の定式化が必要である．以下では例示的な目的から

(7.10) $$\bar{D}_{it}(s)=\exp(-sd_t(s)),\quad d_t(s)=\delta_{0t}+\delta_{1t}s+\delta_{2t}s^2$$

の場合を考察しよう．このとき $\psi_{it}(s)$ は

(7.11) $$\psi_{it}(s)=\bar{D}_{it}(s)\Big[-s\frac{\partial}{\partial t}d_t(s)+\delta_{0t}+2\delta_{1t}s+3\delta_{2t}s^2\Big]$$

となる．もし δ_{jt} が前節までの方法で t 時点で推定され，かつ $t+h$ 時点の δ_{jt+h} が予測されていれば，

(7.12) $$\delta_{jt}/dt\approx(\delta_{jt+h}-\delta_{jt})/h=r_{jt}$$

が得られる．従って

(7.13) $$\psi_{it}(s)=\bar{D}_{it}(s)[\delta_{0t}+(\delta_{1t}-\gamma_{1t})s+(2\delta_{2t}-\gamma_{1t})s^2-\gamma_{3t}s^3]$$

となり，債券プシーが評価される．

(2) $\boldsymbol{\eta_{it}}$ の変化

時間経過の中での誤差項 $\eta_{it}=\boldsymbol{C}_{it}'[\boldsymbol{D}_{it}-\bar{\boldsymbol{D}}_{it}]$ の変化，$\eta_{it}\to\eta_{it+h}$ は，η_{it} が確率変数であるので，直接それを評価できない．しかしその変化の把握の方法の1つとして，価格変化 $P_{it+h}(0)-P_{it}(0)$ の標準偏差を考えることができよう．すなわちその分散

(7.14) $$\theta_t(h)=\mathrm{Var}(P_{it+h}(0)-P_{it}(0))=\mathrm{Var}(\eta_{it+h}-\eta_{it})$$

を評価することである．(7.14)の評価は η_{it} の t についての時系列プロセスの定式化が必要となる．前節までは，t を固定して $D_{it}(s)$ の s に関する確率プロセスを考察した．その構造を保

存しながら t についてのプロセスの定式化は，多様性をもつ．この問題は別な機会にゆずりたい．

（一橋大学経済研究所）

参 考 文 献

［1］ Bierwag, G. O.(1986). *Duration Analysis*. Ballinger Publishing Co.

［2］ Heath, D., Jarrow, R. and Morton(1987). Bond pricing and the term structure of interest rates: a continuous time approach. Cornell University.

［3］ ──(1989). Contingent claim valuation with a random evolution of interest rates. Cornell University.

［4］ ──(1990). Bond pricing and the term structure of interest rates: a discrete time approach. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **25**, 419-440.

［5］ Litterman, R. and Scheinkman, J.(1988). *Common factors affecting bond returns*.

［6］ McCulloch, J. H.(1971). Measuring the term structure of interest rates. *Journal of Business*, 19-31.

［7］ 刈屋武昭(1991).「可変パラメータ・非線形MTVモデルと金利変動分析への応用」一橋大学経済研究所 Discussion paper.

［8］ 山田雅章(1990).「債券価格変動分析」,『金融証券計量分析の基礎と応用』東洋経済新報社.