

不完全情報と複数のベイジアン均衡

深 尾 京 司

1. はじめに

規模の経済性や外部経済効果が作用する状況では、複数の均衡が存在する。このときどの均衡が選ばれるかは、多くの場合「期待」に依存する。

たとえばある産業でマーシャル的な外部経済効果が作用しているものとしよう。各企業のこの産業への参入についての意思決定は、他企業が参入するか否かの期待に依存する。このとき政府は、将来多くの企業がその産業に参入し、このため高い収益率が得られるという予想を企業のあいだに広めることができれば、予想は自己実現的に達成され、経済厚生を高めることができる。このようなモデルはビッグ・プッシュ (big push) の理論と呼ばれている (Okuno 1988, Murphy, Shleifer and Vishny 1989 および Krugman 1991)。複数の均衡が存在し、そのうちどれが成立するかは他者の行動についての人々の期待によって決まるという現象は、バンク・ランの理論 (Diamond and Dybvig 1983)、サーチモデルおよびその応用としての貨幣理論 (Diamond and Fudenberg 1989, Iwai 1989, および Kiyotaki and Wright 1991)、世代重複モデル (Tirole 1985) などでも、注目されている。

他者の行動を推測する場合、しばしば各個人は他者のタイプ (選好, 費用関数, 個別情報など) についての情報の不完全性に直面するものと思われる。しかしながら、複数均衡モデルに

おいて、情報の不完全性の程度が均衡の数や経済厚生にどのような影響を与えるかについては、まだ十分な研究がなされていない¹⁾。本稿では、マーシャル的な外部経済効果が作用する非常に単純な静学マクロモデルを想定してこの問題について研究してみる。結論を先どりすれば、完全情報下では複数の均衡が存在するような経済において、ノイズが入ることにより均衡が単一になる場合がある。この場合、完全情報下で悲観的な期待にもとづく均衡におちこんでいる状況では、政府が民間情報を攪乱することにより厚生を高めうる。

論文の構成はつぎのとおりである。第2節では、モデルを提示する。第3節では、情報の完全性の程度が均衡の数にどのような影響を与えるかをしらべる。第4節では各主体の反応曲線を使って、第3節の結果を解釈する。第5節では厚生分析をおこなう。最後に第6節では、主な分析結果をまとめ、残された課題について述べる。なお本稿では、反応曲線等を使って分かりやすく分析を進めるため、経済主体は2人と仮定する。補論2で述べるように、本稿のほとんどすべての結論は、無数の経済主体がいる場合にもなりたつ。

2. モデル

2人の同質な労働者AとBがいるとする。生産要素は労働のみであり、生産物も1種類とする。資産はなくまた世界は1期で終わるため各労働者が消費する財の量は彼の生産量に等しい。働かない場合の効用をゼロとする。生産活動においてはマーシャル的な外部経済効果が作用するため、働く労働者がふえると生産性が高まる。このため、労働者が得る効用は、

論文の作成にあたって、箱根コンファランスと一橋大学経済研究所定例研究会の出席者から有益なコメントを頂いた。また、西島益幸氏 (横浜市立大学) と鈴村興太郎氏 (一橋大学) から貴重な助言を頂いた。あわせて深く感謝したい。なおこの研究には、財団法人清明会の援助を受けた。その資金援助にも謝意を表したい。

働かない場合, 0

働いた場合, $\rho + s^* + L$

とする。Lは働く労働者の割合であり、労働者が2人の場合には3つの値(0, 1/2, 1)をとりうる。s*は供給ショックをあらわす。確率変数は*をつけて区別する。Lが生産性に影響するのはマーシャル的外部経済効果のためである。情報構造については次のように仮定する。

労働者 $i[i=a, b]$ は s^* について、ノイズ ε_i^* つきで観測する。

$$\theta_i^* = s^* + \varepsilon_i^* \quad (1)$$

s^* と ε_i^* は互いに独立な正規分布に従いそれぞれ平均ゼロ、分散 $\sigma_s^2, \sigma_\varepsilon^2$ とする²⁾。異なった個人AとBが被るノイズ $\varepsilon_a^*, \varepsilon_b^*$ も互いに独立と仮定する。また $0 < \sigma_s^2 < +\infty, 0 < \sigma_\varepsilon^2 < +\infty$ とする。労働者 i は、生産による所得だけでなく、他の労働者の得た個別情報や行動についてまったく情報なしに、自らの情報 $\theta_i^* = \theta_i$ のみにもとづいて、どの部門で働くかを決定する必要があるものとしよう。つまり、時間的な経過としては、まず個別情報 θ_i が入手され、つぎに各労働者が働くか否かを同時に決定し、最後に生産活動が行われるものと考えている。労働者は合理的に行動し、自らの情報にもとづいて、働いた場合の期待効用を推測し、それが働かない場合の効用0よりも高いときのみ働く。従って、労働者 i は、

$$\rho + E[s^* | \theta_i^* = \theta_i] + E[L^* | \theta_i^* = \theta_i] > 0 \quad (2)$$

なら働き、

$$\rho + E[s^* | \theta_i^* = \theta_i] + E[L^* | \theta_i^* = \theta_i] < 0 \quad (2')$$

なら失業することを選ぶ。

なお、以上述べてきた経済構造は、人々の共通認識(common knowledge)とする。

(2), (2')式からも明らかなように、人々の選択は他の人々の行動についての推測に決定的に依存する。このような意思決定問題を、不完全情報(incomplete information)下のゲームにおける、ベイジアン均衡(Harsanyi 1968)の考え方を使得て定式化しよう。

労働者 i の戦略をその労働供給関数 $R_i(\theta_i)$ であらわす。 $R_i(\cdot)$ は、 $(-\infty, +\infty)$ 上で定義され、2つの値0と1をとる関数である。 R_i

(θ_i)=0は個別情報 $\theta_i^* = \theta_i$ のもとで失業すること、 $R_i(\theta_i)=1$ は働くことを、それぞれあらわすものとする。

労働者Bの戦略 $R_b(\theta_b)$ が与えられたとき、労働者Aの最適労働供給関数 $R_a(\theta_a)$ はどのようなものか考えてみよう。なお、労働者は同質だから、以下の議論は、AとBとを逆にしてもなりたつ。

労働者Aが $\theta_a^* = \theta_a$ を観察したとき、彼が予想する働いた場合の期待効用は、合理的な予測のもとで

$$\begin{aligned} \rho + E[s^* | \theta_a^* = \theta_a] + E[L^* | \theta_a^* = \theta_a] &= \rho \\ &+ E[s^* | \theta_a^* = \theta_a] + \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_b(\theta_b) g(\theta_b | \theta_a^* = \theta_a) d\theta_b \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $g(\theta_b | \theta_a^* = \theta_a)$ は、労働者Aが θ_a を観測した場合の、労働者Bの観測値 θ_b の条件付分布をあらわす。(3)式右辺第4項は、労働者Bが働くことによる生産性の増加に対応している。なお、われわれの情報構造と供給ショックについての仮定のもとで、 θ_a^* と θ_b^* は多変量正規分布にしたがうから、 $g(\theta_b | \theta_i^* = \theta_i)$ も正規分布となる。また次式が成り立つ³⁾。

$$E[\theta_j^* | \theta_i^* = \theta_i] = \frac{\sigma_s^2 \theta_i}{(\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2)} \quad (4)$$

$$\text{Var}[\theta_j^* | \theta_i^* = \theta_i] = \frac{(2\sigma_s^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^4)}{(\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2)} \quad (5)$$

このモデルにおけるベイジアン均衡は、つぎの条件をみたす戦略の組合せ $\{R_a(\theta_a), R_b(\theta_b)\}$ で定義される。

(1) あたえられた労働者Bの戦略 $R_b(\theta_b)$ のもとで、 $R_a(\theta_a)$ はつぎの値をとる。

$$\begin{aligned} \rho + E[s^* | \theta_a^* = \theta_a] + \frac{1}{2} \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_b(\theta_b) g(\theta_b | \theta_a^* = \theta_a) d\theta_b \geq 0 \end{aligned}$$

となるすべての θ_a について、 $R_a(\theta_a)=1$ 。上式が負となるすべての θ_a について、 $R_a(\theta_a)=0$ ⁴⁾。

(2) あたえられた戦略 $R_a(\theta_a)$ のもとで、 $R_b(\theta_b)$ も(1)と同様の条件をみたす。

3. 情報の不完全性と均衡の数

われわれのモデルにおいて、情報の不完全性の程度、つまり σ_ϵ^2 が、均衡の数にどのような影響を与えるか調べてみよう。

労働者 i が観測値についてある臨界値 $\underline{\theta}_i$ を設定し、実際の観測値がこれより低いなら失業し、これより高いなら働くという戦略、すなわち、

$$\underline{\theta}_i \text{ より小さなすべての } \theta_i \text{ について, } R_i(\theta_i) = 0$$

$$\underline{\theta}_i \text{ と等しい } \theta_i \text{ について, } 0 \leq R_i(\theta_i) \leq 1$$

$$\underline{\theta}_i \text{ より大きなすべての } \theta_i \text{ について, } R_i(\theta_i) = 1$$

を、単調な戦略という意味で、M-戦略と呼ぶことにしよう。また、均衡における戦略が、すべての労働者について M-戦略となっているようなベイジアン均衡を、M-均衡と呼ぶことにする。以下では、 σ_ϵ^2 の変化が、M-均衡の数にどのような影響を及ぼすかを分析する。

なお、補論 1 で示すように、のちに定義する関数 $G(\underline{\theta})$ が $\underline{\theta}$ について単調な場合(この論文では、専らその場合にかぎって分析を進める)には、M-均衡以外のベイジアン均衡は存在しない。

労働者 B が臨界値 $\underline{\theta}_b$ の M-戦略をとっているとき、労働者 A が $\theta_a^* = \theta_a$ というデータを得たものとしよう。このような状況で労働者 A が予想する、働いた場合の期待効用を $J(\theta_a, \underline{\theta}_b)$ とあらわす。(3), (4), (5)式より

$$\begin{aligned} J(\theta_a, \underline{\theta}_b) &= \rho + \frac{1}{2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\epsilon^2} \theta_a \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\underline{\theta}_b}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_m^2} \left(\theta_b - \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\epsilon^2} \theta_a\right)^2\right] d\theta_b \\ &= \rho + \frac{1}{2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\epsilon^2} \theta_a \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sigma_m}(\underline{\theta}_b - \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\epsilon^2} \theta_a)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \end{aligned} \quad (6)$$

最後の式は積分変数を、 $u = (\theta_b - \sigma_s^2 \theta_a / (\sigma_s^2 + \sigma_\epsilon^2)) / \sigma_m$ と変換することにより導出される。

また、 σ_m^2 は $\text{Var}[\theta_b^* | \theta_a^* = \theta_a]$ をあらわす。つまり

$$\sigma_m^2 = \frac{(2\sigma_s^2\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^4)}{(\sigma_s^2 + \sigma_\epsilon^2)} \quad (7)$$

(6)式より関数 $J(\theta_a, \underline{\theta}_b)$ は、 θ_a と $\underline{\theta}_b$ について連続であり、またすべての $\theta_a, \underline{\theta}_b$ について

$$\frac{\partial J(\theta_a, \underline{\theta}_b)}{\partial \theta_a} > 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial J(\theta_a, \underline{\theta}_b)}{\partial \underline{\theta}_b} < 0 \quad (8')$$

さらに、すべての $\underline{\theta}_b$ について、

$$\lim_{\theta_a \rightarrow +\infty} J(\theta_a, \underline{\theta}_b) = +\infty \quad (9)$$

$$\lim_{\theta_a \rightarrow -\infty} J(\theta_a, \underline{\theta}_b) = -\infty \quad (9')$$

(8), (9), (9')式と、 $J(\cdot)$ 関数の連続性より、すべての $\underline{\theta}_b$ について、

$$J(\theta_a, \underline{\theta}_b) = 0 \quad (10)$$

をみたす θ_a が一つ存在する。また(8)式より、与えられた $\underline{\theta}_b$ のもとで、(10)式の解 θ_a を境にして、これより小さな θ_a のもとでは $J(\cdot)$ は負、これより大きな θ_a のもとでは $J(\cdot)$ は正となる。したがって、労働者 B が M-戦略をとっているとき、労働者 A にとってすべての戦略(M-戦略だけでなく他の戦略を含む)のなかで最適な戦略は、(10)式の解 θ_a を臨界値とする M-戦略であることがわかる。

以上の分析より、それぞれの臨界値 $\underline{\theta}_a, \underline{\theta}_b$ がつぎの条件をみたす M-戦略の組合せはベイジアン均衡であることがわかった。

$$J(\underline{\theta}_a, \underline{\theta}_b) = 0 \quad (11)$$

$$J(\underline{\theta}_b, \underline{\theta}_a) = 0 \quad (11')$$

さて、(11), (11')式で規定される M-均衡はいくつ存在するかを調べる準備として、M-均衡はすべて対称均衡であることを示そう。仮に非対称な M-均衡が存在したとする。われわれは一般性を失うことなく $\underline{\theta}_a > \underline{\theta}_b$ と仮定できる。このとき(8), (8'), (11)式より、 $J(\underline{\theta}_b, \underline{\theta}_a) < 0$ 。これは(11')式に反する。したがって、M-均衡はすべて対称均衡である。

対称均衡を求めるには、臨界値を労働者毎に区別する必要はない。均衡臨界値を $\underline{\theta}$ とする

と、均衡条件は次のような $\underline{\theta}$ の方程式としてあらわされる。

$$G(\underline{\theta}) = J(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = \rho + \frac{1}{2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2} \underline{\theta} + \frac{1}{2} \int_{D\underline{\theta}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du = 0 \quad (12)$$

ただし D は

$$D = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\{2\sigma_s^2\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^4\}^{\frac{1}{2}} \{\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

をあらわす。均衡の数は、新しく定義された $G(\cdot)$ 関数の形状に依存する。(12)式より

$$\lim_{\underline{\theta} \rightarrow +\infty} G(\underline{\theta}) = +\infty$$

$$\lim_{\underline{\theta} \rightarrow -\infty} G(\underline{\theta}) = -\infty$$

$$G(0) = \rho + \frac{3}{4}$$

$$\frac{dG(\underline{\theta})}{d\underline{\theta}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2}$$

$$-\frac{D}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(D\underline{\theta})^2\right]$$

$$\frac{d^2G(\underline{\theta})}{d\underline{\theta}^2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} D^3 \underline{\theta} \exp\left[-\frac{1}{2}(D\underline{\theta})^2\right]$$

最後の式より、 $\underline{\theta} < 0$ なら $d^2G(\underline{\theta})/d\underline{\theta}^2 < 0$ 、 $\underline{\theta} > 0$ なら $d^2G(\underline{\theta})/d\underline{\theta}^2 > 0$ 、 $\underline{\theta} = 0$ なら $d^2G(\underline{\theta})/d\underline{\theta}^2 = 0$ 。したがって、 $dG(\underline{\theta})/d\underline{\theta}$ は、 $\underline{\theta} = 0$ のとき最小値

$$G'(0) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2} - \frac{D}{2\sqrt{2\pi}} \quad (13)$$

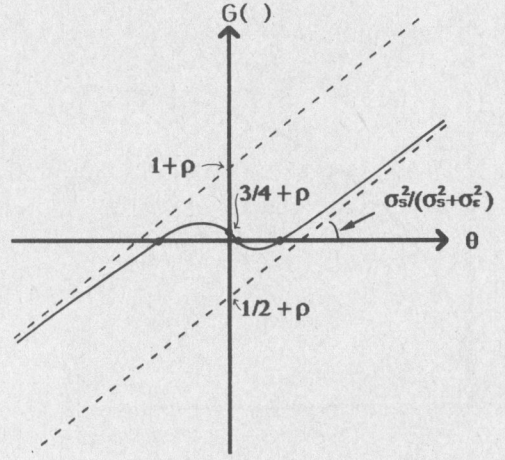
をとる。またすべての $\underline{\theta}$ について

$$G(\underline{\theta}) - G(0) = -\{G(-\underline{\theta}) - G(0)\}$$

以上より、 $G(\cdot)$ 関数のグラフは、点 $(0, \rho + 3/4)$ を中心に点対称であり、それより右では下方に凸、左では上方に凸、また(13)式が正なら強単調増加だが、負なら2つの頂点をもつことがわかる。

図1は、 $G'(0) < 0$ の場合の、 $G(\cdot)$ 関数のグラフである。平行な2つの直線は、 $G(\cdot)$ 関数の漸近線をあらわす。図からわかるように、縦軸の切片 $\rho + 3/4$ がゼロに十分に近ければ、均衡臨界値 $\underline{\theta}$ が、負、ゼロ、正、の3つの M-均衡が存在する。(6)式によれば、 $\rho + 3/4 = 0$ というのは、労働者 A が平均的な観測値 $\theta_a = 0$ を観測し、さらに他の労働者が $1/2$ の確率で働くこと

図1 $G(\cdot)$ 関数の形状 [$G'(0) < 0$ の場合]



予想した場合の、働くことの期待効用である。臨界値が負の均衡では、2人の労働者は共に、観測データが少しぐらい悪くても、働くことを選ぶ。これは、他の労働者の行動に関する楽観的な期待に支えられた均衡である。すなわち、各労働者は、他の労働者が低い臨界値の戦略をとると予想するために、自らも低い臨界値の戦略を選ぶ。互いにこのように予想して行動することにより、楽観的な期待が自己実現されるわけである。

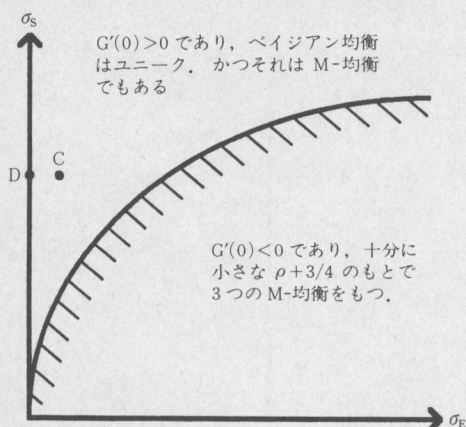
一方、 $G(\cdot)$ 関数が強単調増加の場合には、M-均衡は常に1つである。パラメーター ρ が上昇すると $G(\cdot)$ 関数は上方に平行移動し、均衡臨界値 $\underline{\theta}$ は低下する。高い ρ は、働いた場合の効用が平均的に高いことをあらわす。このとき労働者は、供給ショックについて比較的悪い情報を入手しても働くことを選ぶわけである。 $G(\cdot)$ 関数が強単調増加の場合、 $\rho + 3/4 = 0$ であれば、均衡臨界値 $\underline{\theta}$ はゼロに等しい。M-均衡が3つある場合と比べると、悲観的な均衡と楽観的な均衡が消え、中央の均衡のみが残る。

M-均衡が単一、したがって補論1よりベイジアン均衡が単一に定まるための条件 $G'(0) > 0$ はつぎのように書き直すことができる。

$$\sigma_s z \sqrt{\frac{1-2z^2}{1+z^2}} > \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \quad (14)$$

ただし、 $z = \sigma_s/\sigma_\varepsilon$ である。パラメーター σ_s 、 σ_ε の値と M-均衡の数の関係は、図2のようにま

図2 情報の不完全性の程度と均衡の数



とめられる。供給ショックの変動 σ_s が大きく、ノイズ σ_e が小さい場合には、ベイジアン均衡は単一に定まる。逆に、供給ショックの変動 σ_s が小さく、ノイズ σ_e が大きい場合には、十分に小さい $\rho + 3/4$ のもとで、必ず 3 つの M-均衡が存在する。なお、この場合には、M-均衡以外のベイジアン均衡が存在する可能性を否定できない。

均衡が単一になるための条件(14)がどれほど強いかを量的に評価しておこう。 $\sigma_s = 0.1$ としよう。これは、1 標準偏差だけのマイナスの供給ショックが、労働供給が完全雇用水準より 10 % 低下したときにマーシャル的外部経済効果によって起きる平均生産性の低下と、おなじ効果をもつことを意味する。このとき(14)式より σ_e が 0.065 以下であれば、つまりノイズの標準偏差が供給ショックの標準偏差の約 2/3 以下であれば、均衡は単一になる。外部効果に比べて供給ショックが大きく $\sigma_s = 0.5$ であれば、 σ_e が 1.33 以下のとき均衡は単一になる。

M-均衡が 3 つあるケースというのは、われわれのような外部性を入れたモデルでは、ごく一般的に起きることであり、特に興味深い現象とはいえない。たとえば、モデルの構造を変えノイズがない場合 ($\sigma_e = 0$) のゲームを考えてみよう。この場合にも 3 つのナッシュ均衡が存在する。ノイズがないゲームでは、労働者は供給ショックを知ったうえで、働くか否かを同時に決めることになる。つまり、同時決定のため相

表1 ノイズがない場合のゲーム：ノーマル・フォーム

		労働者 B の戦略	
		働く	働かない
労働者 A の戦略	働く	$(\rho + s + 1, \rho + s + 1)$	$(\rho + s + 1/2, 0)$
	働かない	$(0, \rho + s + 1/2)$	$(0, 0)$

ただし、(労働者 A の利得, 労働者 B の利得)

変わらず相手の行動は知りえないが(imperfect information)、自然がどの s を選んだかは既知である(complete information)。このゲームは、表1のようなノーマル・フォームであらわすことができる。表1からわかるように、供給ショックの実現値 s が $-\rho - 1 < s < -\rho - 1/2$ の範囲では、ナッシュ均衡として、1) 2 人とも“働く”を選ぶ、2) 2 人とも“働かない”を選ぶ、3) 2 人とも、 $-2\rho - 2s - 1$ の確率で“働く”を選び、 $2\rho + 2s + 2$ の確率で“働かない”を選ぶ、混合戦略をとる、の 3 つがやはり存在することになる。

むしろ、ノイズの導入によって初めて生じる興味深い現象は、ベイジアン均衡が単一に定まるケースであろう。図2の点Cと点Dの状況を比較してみよう。2つの点において、 σ_s は同じ値をとり、 σ_e はわずかに異なる。微少なノイズがある点Cでは、ベイジアン・ナッシュ均衡は単一に定まる。点Dでは、ゲームの情報構造が点Aとは全く異なるが、表1で分析したように、 s^* の実現値が $-\rho - 1 \leq s \leq -\rho - 1/2$ の範囲にあると、3つの対称なナッシュ均衡が存在する。

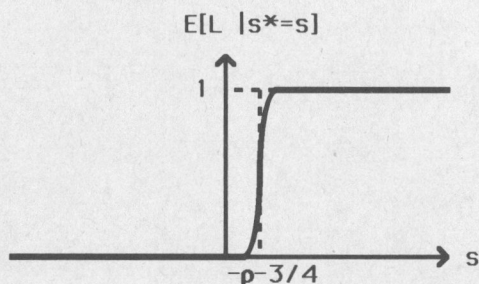
点Cと点Dを比較するため、2つの場合について各 s の実現値のもとで労働供給量 L がどのように決まるかを考えてみよう。図3-iは、微少なノイズがある点Cの場合の、労働供給量をあらわす。縦軸は、与えられた s のもとでの労働供給量の条件付き期待値

$$E[L^* | s^* = s] = \frac{1}{2} \sum_{i=a,b} \int_{\theta}^{+\infty} g(\theta_i | s^* = s) d\theta_i \quad (15)$$

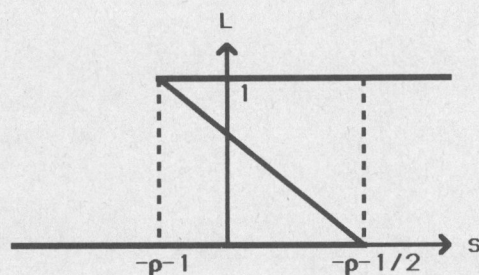
をあらわす。ただし、 $g(\cdot)$ は期待値 s 、分散 σ_e^2 の正規分布である。 σ_e^2 は十分に小さいと仮定しているため、グラフは均衡臨界値 θ を境に、0 から 1 へと段状に上昇する。なお(12)式

図3 微少なノイズがある場合とない場合の労働供給

3-i 微少なノイズがある場合



3-ii ノイズがない場合



からわかるように、 σ_e^2 が小さいとき均衡臨界値 $\underline{\theta}$ は $-\rho - 3/4$ にほぼ等しくなる。

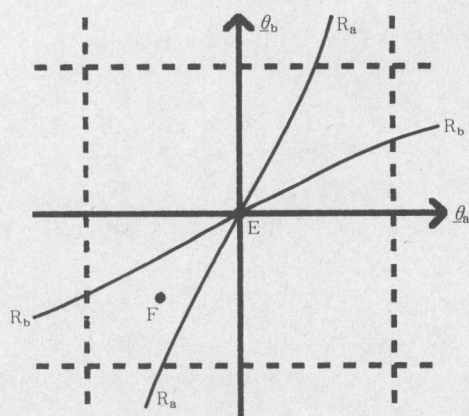
図3-iiは点Dの場合の労働供給量を図示している。右下がりの直線は、混合戦略がとられた場合の、期待供給量をあらわす。各 s のもとで、 L は3つの値を取りうる。図が示すように、人々が悲観的な場合には、 $-\rho - 1/2$ より小さな全ての s のもとで、労働供給が0になり外部経済効果が享受できない、ということがありうる。このような状況では、政府が民間情報を攪乱し、各労働者がノイズつきでしか供給ショックについての情報を入手できなくすれば、労働供給のスケジュールを図3-iのように誘導できる。第5節で示すように、この政策により、政府は経済厚生を高めることができる。

4. 反応曲線

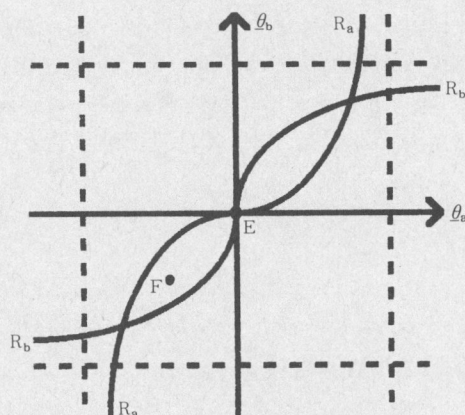
ノイズの大小により均衡の数が変わるのはなぜだろうか。この節の前半では、反応曲線を使って、ノイズが微少なとき均衡が単一になり、ノイズが大きいとき均衡が複数になるのはなぜかを考察する。後半では、ノイズが全く無いゲームにおいて均衡が複数あるのに対し、微少なノイズの導入により均衡が単一になるのはなぜ

図4 反応曲線

4-i ノイズが小さい場合



4-ii ノイズが大きい場合



かを考察する。

労働者Bの臨界値 $\underline{\theta}_b$ が与えられたとき、労働者Aの最適臨界値 $\underline{\theta}_a$ は(11)式から求められる。

$$J(\underline{\theta}_a, \underline{\theta}_b) = 0$$

ただし $J(\cdot)$ 関数は(6)式で定義された。

$\rho + 3/4 = 0$ の場合について、2人の労働者の反応曲線を描いたのが、図4-i, 4-iiである。図4-iは、ノイズが小さくベイジアン均衡が単一に定まる場合((14)式が成り立つ場合)をあらわし、図4-iiは、ノイズが大きくM-均衡が3つある場合をあらわす。2つの図において、 $R_a R_a$ 曲線は、上式で規定される自国の最適反応を、 $R_b R_b$ 曲線は同様にして導出される外国の最適反応をあらわす。労働者Aにとって、非常に良い、または悪いデータを手に入れた場合には、労働者Bの行動に関する予想にかかわりなく

最適行動は、それぞれ、“働く”、“働かない”になる。このため、 $R_a R_a$ 曲線は、十分に高い θ_a と低い θ_a のもとでほぼ垂直になる。

図からわかるように、均衡が単一か否かは、中央の均衡点 E ((12)式より $\rho+3/4=0$ の場合には、その座標は $\theta_a=0, \theta_b=0$ になる)のまわりで、 $R_a R_a$ 曲線の傾きが、1 より大か、小かに依存する。別の見方をすれば均衡の数は、労働者 A にとって、点 E のような相手方の戦略 $\theta_b=0$ と自らの観測値 $\theta_a=0$ のもとで働いた場合の期待効用(これはゼロに等しい)と、点 F のように相手方の臨界値 θ_b と自らの観測値 θ_a がともに点 E よりも微少に同額 $\Delta\theta$ だけ小さな値の時に働いた場合の期待効用のうちどちらが大きいかに依存する。図 4-i のように点 F での期待効用が点 E での期待効用より低い場合には、与えられた労働者 B の臨界値 $\theta_b=\Delta\theta$ のもとで、労働者 A にとって最適な臨界値 θ_a は点 F よりも右方にくる。このとき、 $R_a R_a$ 曲線の傾きは点 E の近傍で 1 より大きくなり、均衡は単一になる。

点 E と点 F における労働者 A の働いた場合の期待効用を比較しよう。2 点における期待効用は、(6)式を微分すればわかるように次の 3 つの理由により異なる。

(I) A 自身の観測値の違い

点 F では点 E に比べ、A の観測値 θ_a が小さい。このため、A の予想する働くことの期待効用は、点 F のほうが

$$\frac{\sigma_s^2}{(\sigma_s^2 + \sigma_e^2)} \Delta\theta$$

だけ低くなる。

(II) 相手方の臨界値の違い

点 F では点 E に比べ、B の臨界値 θ_b が小さい。このため、A の予想する B が働く確率は高くなる。これは点 F での期待効用を

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_m} \Delta\theta$$

だけ高くする。

(III) 相手方の観測値についての推測の違い

A と B の観測値には(1)式より正の相関がある。したがって、A は自分が悪いデータを得たと

き、B も悪いデータを得ていると推測する。このため、A の予想する B が働く確率は低くなる。これは点 F での期待効用を

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_m} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2} \Delta\theta$$

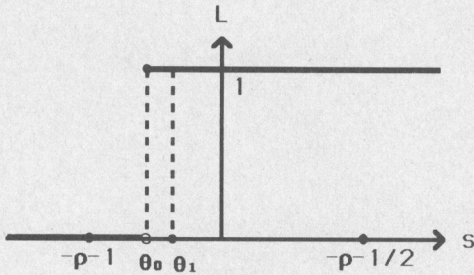
だけ低くする。

ただし、さきに定義したように σ_m^2 は $(2\sigma_s^2\sigma_e^2 + \sigma_e^4)/(\sigma_s^2 + \sigma_e^2)$ をあらわす。3 つの効果のうち(II)の効果が大きい場合に、 $R_a R_a$ 曲線の傾きが 1 より小さくなり均衡が複数になる。

(II)と(III)を比較するとわかるように、供給ショック σ_s^2 に比べノイズ σ_e^2 が小さい場合には、(III)は(II)をちょうど相殺するほどまで大きくなる。このとき(I)の効果のみが残るため、 $R_a R_a$ 曲線の傾きが 1 より大きくなり、均衡は単一になる。ノイズ σ_e^2 が小さい場合に(III)が(II)を相殺する理由は、直観的には次のように理解できよう。ノイズ σ_e^2 が大きい場合には、A が悪いデータを入手しても、これはたまたまノイズのために自分のデータだけが悪いと A は判断する。したがって(III)の効果は小さい。これに対して、ノイズ σ_e^2 が十分に小さい場合には、A は自分の入手したデータの良否にかかわらず、自分は平均的なデータを入手していると考え、相手方が自分より良いデータを得ている確率と、悪いデータを得ている確率は、半々と推測する。したがって、B の臨界値 θ_b がどのような値であっても、A がちょうどこの θ_b に等しいデータ θ_a を得た場合には、A は、相手方が 1/2 の確率で働くことと予想する。つまり、 $\theta_b = \theta_a$ のとき、この値の大きさにかかわらず(6)式右辺最後尾の積分項は、1/2 で一定になる。このとき $\theta_b = \theta_a$ の変化は、(6)式右辺第 3 項のみをつうじて期待効用に影響することになる。すなわち(I)の効果が他を圧倒するわけである。

要約しよう。マーシャル的外部経済効果の作用するわれわれのモデルで均衡が複数になるのは、たとえば労働者が 2 人とも低い臨界値 θ の戦略(かなり悪いニュースでも働くという戦略)をとった場合には、相手の働く確率が高まるため予想される生産性が高くなり、実際、悪いニ

図5 ノイズがない場合の労働供給パターンの一例



ユースを得た場合にも働く動機が生じるためであった。ところが供給ショックに比べノイズが小さい状況では、二人の選んだ臨界値が高いか低いかにかかわらず、臨界値すれすれのデータを得た労働者は相手方が $1/2$ で臨界値より悪いデータを得ていると推測するため、上記のような楽観的な予想にもとづいた均衡は支えられないのである。

以上の議論は、ノイズが全くないゲームにおいて均衡が複数あるのに対し、微少なノイズのもとで均衡が単一になる差異の説明にも同じように適用できる。

ノイズがない場合には、図 3-ii でみたように各 s のもとで、3つの均衡があった。したがって、たとえば図 5 のように、 θ_0 を境に、 $\theta_i = s$ (ただし、 $i=a, b$) がそれより低いとき労働供給がゼロ、 $\theta_i = s$ がそれより高いとき労働供給が 1 という労働供給パターンがありうる。ここで θ_0 は、 $-\rho-1 \leq \theta_0 < -\rho-1/2$ の範囲ならどんな値でもよい。

これに対して微少なノイズが導入されると図 3-i でみたように、労働供給[厳密にはあたえられた s のもとでのその期待値]のパターンは、 $-\rho-3/4$ を境に段状となるもの 1 つに限られる。たとえば図 5 のように $-\rho-3/4$ より低い θ_0 を境に労働供給が 0 から 1 へと移行するパターンが、ノイズの導入により消える理由は、次のように理解できる。ノイズがない状況で観測値が図 5 の θ_1 のとき労働供給が 1 になりうるのは、データが θ_1 のとき、供給ショックは低いものの、 $\theta_a = \theta_b = \theta_1 \geq \theta_0$ のため、各労働者にとって相手も労働供給することが確実であり、

高い外部効果が期待できるためである。

これに対して微少なノイズが導入されたものとしよう。このとき、 θ_0 を臨界値とする均衡は存在しえない。これは次のような理由による。

いま仮に、 θ_0 を臨界値とする M-均衡が存在したとする。A が $\theta_a = \theta_1$ を観察した場合を考えると、微少なノイズのため A は、B が $1/2$ の確率で自分より悪いデータを得ていると推測する。したがって θ_1 が θ_0 に十分近いとき(ただし、 $\theta_1 \geq \theta_0$)には、A は、B が確率 $1/2$ で臨界値 θ_0 より低いデータを入手し、このため働かないと推測する。こうして、十分な外部経済効果が期待できないため A は働く誘引をもたず、 θ_0 を臨界値とする均衡は支えられないのである。

5. 厚生分析

第 3 節でみたように、ノイズがない状況 ($\sigma_\epsilon^2 = 0$) においては、人々が他者の行動について悲観的な予想をたてて行動し、このため供給ショックがかなり高い値でも失業を選択する可能性がある。図 3-ii) によれば、 s が $-\rho-1/2$ より低い範囲では、労働供給がゼロになりうる。この節では、上記のような状況に経済が落ち込む場合には、政府は民間の情報をわずかに攪乱し、小さなノイズがある状況を人工的に創り出すことにより、経済厚生を高めることができることを示す。ただし、経済厚生は、効用の無条件期待値を全ての個人について単純平均した値で評価する。すなわち政府がどちらの状況が望ましいかを判断するのは、供給ショックを知る前と仮定する。

なお、われわれは 1 回限り市場の開かれる静学的なモデルを想定しているから、ノイズがない場合のように均衡が複数ある経済では、政府はどの均衡が生起するか前もって知ることはできない。政策決定問題について結論を出すには、このような不決定性に政府がどのように対処するかについて定式化する必要がある。したがって厳密にいえば、以下で示すことにもとづいて、われわれはたとえば次のように主張できるにすぎない。政府がマクシ・ミニ原理にもとづいて、すなわち最悪の場合の期待損失を最小にするよ

うに意思決定をしている場合には、政府はノイズがないため複数の均衡が存在する状況よりも、微小なノイズにより均衡が単一に決まる状況を選ぶ。

まずノイズのない、 $\sigma_\epsilon^2=0$, $\sigma_s^2>0$ の場合につき考えよう。第3節で分析したように、この場合には、 s の各実現値のもとで、それぞれ3つの均衡がありうる。われわれは単純化のため、図5のようにある観測値 θ_0 を境にして、それより高い観測値のもとでは、全ての労働者が働く均衡が成立し、それより低い観測値のもとでは、全ての労働者が働く均衡が成立しているものとしよう(ただし、 $-\rho-1<\theta_0<-\rho-1/2$)。このとき、経済厚生、すなわち、効用の無条件期待値を全ての個人について単純平均した値は、 θ_0 の関数として次のようにあらわされる。

$$W(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{+\infty} (\rho+s+1)f_s(s) ds \quad (16)$$

また

$$W(0) = \frac{1}{2}(\rho+1) + \frac{\sigma_s}{\sqrt{2\pi}} \quad (17)$$

なお、 $\theta_0>-\rho-1$ をみたす θ_0 について $dW(\cdot)/d\theta_0<0$ 、 $\theta_0<-\rho-1$ をみたす θ_0 について $dW(\cdot)/d\theta_0>0$ であることからわかるように、 $s>-\rho-1$ のとき全ての労働者が働き、 $s<-\rho-1$ のとき全ての労働者が働かないという資源配分のもとで、経済厚生は最大になる。

次に、微小なノイズがある場合の経済厚生について考えよう。いま、単一なベジアン均衡における臨界値を $\underline{\theta}$ とあらわす。あたえられた σ_s^2 , σ_ϵ^2 のもとで $\underline{\theta}$ は(12)式によって定まる。

ある s^* の実現値 s のもとでの労働供給量 L は、(15)式のように決まる。これを s の関数としてあらわそう。条件付き期待値の定義より

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_{\underline{\theta}}^{+\infty} g(\theta_i^* = \theta_i | s^* = s) d\theta_i \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{+\infty} \frac{g(s^* = s | \theta_i^* = \theta_i) f_\theta(\theta_i)}{f_s(s)} d\theta_i \end{aligned} \quad (15')$$

ここで、 $f_\theta(\theta)$, $f_s(s)$ はそれぞれ θ^* と s^* の無条件分布をあらわす。また、 θ_i は代表的個人の観測値である。ベジアン均衡における経済厚

生を V とすると、(15')式より

$$\begin{aligned} V &= E[L(s^*)\{\rho+s^*+L(s^*)\}] \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \{\rho+s+L(s)\} \right. \\ &\quad \left. g(s^* = s | \theta_i^* = \theta_i) ds \right] f_\theta(\theta_i) d\theta_i \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{+\infty} \left[\rho + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\epsilon^2} \theta_i \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_\epsilon \left(\frac{\theta}{\sigma_s^2 + \sigma_\epsilon^2} - \theta_i \right) \sqrt{2\pi}} \right. \\ &\quad \left. \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du \right] f_\theta(\theta_i) d\theta_i \end{aligned} \quad (18)$$

3行目は、(6)式と同様に積分変数の変換により導出される。

(16)式と(18)式を使って、ノイズがない経済において悲観的な期待にもとづく均衡に落ち込んでいる場合には、政府がノイズを導入することによって経済厚生を高めることができることを示そう。

与えられた供給ショックの変動 σ_s^2 に比べて導入されるノイズの変動 σ_ϵ^2 は十分に小さく、このため導入後の $G(\cdot)$ 関数は強単調増加とする。また単純化のため、 $-\rho-3/4=0$ とする。第3節でみたように、このとき導入後のベジアン均衡は、臨界値が $\underline{\theta}=0$ のM-均衡1つに限られる。なお、以下の議論は ρ が他の値をとる場合にも容易に拡張できる。 $\sigma_\epsilon^2 \rightarrow 0$ のとき $\sigma_m \rightarrow 0$ より、(18)式は

$$\frac{1}{2}(\rho+1) + \frac{\sigma_s}{\sqrt{2\pi}}$$

に収束する。したがって(17)式より、ノイズがない場合の境界値 θ_0 がゼロより大きい場合には、十分に小さなノイズを導入することにより経済厚生を高めうることがわかった。

6. おわりに

最後に、残された問題、および本稿の分析を今後どのように拡張できるかについて述べておこう。

第1に、本稿の仮定を緩めた場合について、調べる必要がある。

供給ショックやノイズが正規分布でなく、より一般的な分布に従うとき、本稿と同様の結果

がえられるだろうか。

また、本稿では労働者間の情報交換はないものと仮定したが、情報交換がある場合には、何が起きるだろうか。ただし情報交換自体が戦略的な側面をもつため、分析はかなり複雑になるだろう (Crawford and Sobel 1982, および Okuno, Postlewaite, and Suzumura 1990)。

第2に、本稿ではマーシャル的な外部経済効果のために複数均衡が生じる場合について考えたが、同様の分析を、サーチモデル、世代重複モデル等、他の複数均衡モデルに応用できるか否か調べることは興味深い。たとえば、バンク・ランの理論に適用すれば、銀行の支払い能力に関する情報を公開しないことにより、むしろバンク・ランを起きなくすることができるということが示せるかも知れない。

第3に、モデルを動学化し、ベイジアン学習過程について分析することはできないだろうか⁶⁾。仮に、当初人々の情報は不完全であり、均衡は単一に決まるものとしよう。時間の経過につれ人々は情報を蓄積していくが、このことは、均衡を複数にする働きをもつ。しかし、ある均衡においてしばらくの間経済活動が営まれるとサンクコストの働きのため、経済はその均衡から他の均衡へと動きにくくなる可能性がある。たとえば、投資活動や、その均衡に固有の情報の収集活動が行なわれれば、ちょうど川の流れがしだいに川底をえぐるように、当初の均衡からはずれた行動を人々はとらなくなる。前者の、均衡を複数化する効果よりも、後者の、均衡を固定化する効果の方が強い場合には、経済は当初の均衡にとどまる。われわれはこのようにして、完全情報下で複数の均衡がある経済において、学習過程により均衡が単一にしばらくすることを示せるかも知れない。

(一橋大学経済研究所)

補論 1

この補論では、労働者が2人の場合に、(12)式で定義された $G(\theta)$ 関数が $\underline{\theta}$ の強単調増加関数であれば、ベイジアン均衡が M-均衡に限られることを示す。

(3)式であらわされる、労働者 A が $\theta_a^* = \theta_a$

を観察した場合に予想する働いたときの期待効用は、B のすべての戦略のもとで、 θ_a の連続関数である。また(3)式は、B の戦略にかかわらず十分に大きな θ_a および小さな θ_a のもとでそれぞれプラスおよびマイナスになる。以上より、もしあるベイジアン均衡において、(3)式をゼロにする θ_a と、(3)式と同様にして導出される B にとっての働くことの期待効用をゼロにする観測値 θ_b が、ともに単一であれば、この均衡は M-均衡に他ならない。したがってわれわれの命題を証明するには、すべてのベイジアン均衡において、このような θ_a, θ_b が単一であることを示せばよい。

背理法を使う。与えられたパラメーターのもとで、 $G(\theta)$ 関数は強単調増加関数とし、方程式 $G(\theta) = 0$ の解を $\underline{\theta}_E$ とあらわす。あるベイジアン均衡を考えよう。均衡における2人の戦略を $\{R_a(\theta), R_b(\theta)\}$ とする。また(3)式をゼロにする(すなわち A にとって働くか否か無差別となる) θ_a の集合を Θ_a 、B にとって同様の集合を Θ_b とあらわす。また、 Θ_a と Θ_b の合併集合を Θ とあらわす。(3)式の連続性より Θ は閉集合である。 Θ の要素が1つであれば、これは本文中で分析した M-均衡に他ならない。仮に Θ の要素が2つ以上あると想定してみる。すなわち $\inf(\Theta) \neq \sup(\Theta)$ とする。2つの場合、 $\underline{\theta}_E > \inf(\Theta)$ と $\underline{\theta}_E \leq \inf(\Theta)$ に分けて考える。

$\theta_E > \inf(\Theta)$ の場合。

労働者が同質であることより、われわれは、一般性を失うことなく観測値が $\inf(\Theta)$ に等しいとき働くか否か無差別になるのは、労働者 A の方である(つまり $\inf(\Theta) \in \Theta_a$)と仮定できる。

Θ が閉集合であること、および $\inf(\Theta) \in \Theta_a$ より

$$\begin{aligned} & \rho + \frac{1}{2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2} \inf(\Theta) \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_b(\theta_b) g(\theta_b | \theta_a^* = \inf(\Theta)) d\theta_b \\ & = \rho + \frac{1}{2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2} \inf(\Theta) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\inf(\Theta)}^{+\infty} R_b(\theta_b) g(\theta_b | \theta_a^* = \inf(\Theta)) d\theta_b \\ & = 0 \end{aligned} \quad (A1)$$

第1式から第2式への変形には、 $\inf(\theta)$ より小さな観測値 θ_b についてはBにとって働くことの期待効用が負であり、このため $R_b(\theta_b)$ がゼロとなることを使っている。

一方(12)式で定義された $G(\theta)$ 関数の強単調増加性と $\underline{\theta}_E > \inf(\theta)$ の仮定および(6)式より

$$\begin{aligned} \rho + \frac{1}{2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2} \inf(\theta) \\ + \frac{1}{2} \int_{\inf(\theta)}^{+\infty} g(\theta_b | \theta_a^* = \inf(\theta)) d\theta_b < 0 \end{aligned} \quad (A 2)$$

いま、 $R_b(\cdot) \leq 1, g(\cdot | \cdot) > 0$ より、(A 1)と(A 2)は矛盾する。

$\underline{\theta}_E \leq \inf(\theta)$ の場合

やはり一般性を失うことなく、観測値 $\sup(\theta)$ のもとで働くか否か無差別なのはAの方であるとする ($\sup(\theta) \in \theta_a$)。

$\sup(\theta)$ の定義より

$$\begin{aligned} \rho + \frac{1}{2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2} \sup(\theta) \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_b(\theta_b) g(\theta_b | \theta_a^* = \sup(\theta)) d\theta_b = 0 \end{aligned} \quad (A 3)$$

一方 $\inf(\theta) \neq \sup(\theta)$ より、 $\underline{\theta}_E < \sup(\theta)$ 。したがって $G(\cdot)$ 関数の強単調性より

$$\begin{aligned} \rho + \frac{1}{2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2} \sup(\theta) \\ + \frac{1}{2} \int_{\sup(\theta)}^{+\infty} g(\theta_b | \theta_a^* = \sup(\theta)) d\theta_b > 0 \end{aligned} \quad (A 4)$$

$\sup(\theta)$ より大きな観測値 θ_b についてはBにとって働くことの期待効用が正であり、このため $R_b(\theta_b)$ が1となることより、(A 3)式左辺は(A 4)式左辺より小さいことはない。これは、(A 3)、(A 4)式と矛盾する。

以上より、労働者が2人の場合に(12)式で定義された $G(\theta)$ 関数が θ の強単調増加関数の場合には、ベイジアン均衡がM-均衡に限られることが示された。

補論 2

この補論では、労働者が無数にいる場合に、本稿の結果がどのように変わるかについて簡単に述べておく。

区間 $[0, 1]$ の実数に対応した無数の労働者がいるものとする。労働者が2人の場合と同様に労働者の期待効用は、

働かない場合、0

働いた場合、 $\rho + s^* + L$

とする。ただし L は働く労働者の割合をあらわす。情報構造についても2人の場合と同じとする。

労働者 i が、 $\theta_i^* = \theta_i$ を観察したとき、彼が予想する期待効用は

$$\begin{aligned} \rho + E[s^* | \theta_i^* = \theta_i] \\ + \int_0^1 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} R_j(\theta_j) g(\theta_j | \theta_i^* = \theta_i) d\theta_j \right\} d_j \end{aligned}$$

(3)式と異なり定数項 $1/2$ がないのは、 i 自身が働くか否かは生産性に影響をおよぼさないためである。

このモデルにおいて、対称なM-均衡における臨界値 $\underline{\theta}$ は(12)式と同様に、

$$\begin{aligned} \rho + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2} \underline{\theta} + \int_{\underline{\theta}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du = 0 \end{aligned}$$

から求められる。したがって、均衡が単一になるための条件も、(14)式の右辺が2倍に変わるだけである。また、 $G(\cdot)$ 関数の縦軸の切片は $\rho + 3/4$ ではなく、 $\rho + 1/2$ になる。

対称なM-均衡以外のベイジアン均衡が存在しないことは、補論1と同様にして証明できる。厚生分析の結論も2人の場合と変わらない。

注

1) この問題は、他者のタイプについての情報を含め経済構造についての情報が不完全な状況で人々が学習しながら経済が進行するとき、どのような合理的期待均衡に行きつくかというより一般的な問題の特殊ケースと考えることができる(Lucas 1986)。人々の合理的行動を仮定すると、この動学過程(ベイジアン学習過程とよばれる)の分析は非常にむずかしくなり、あまり多くのことは知られていない(Townsend 1983, および Feldman 1987)。一方、最適化行動の仮定を緩めアドホックな学習過程を想定した場合には、複数の合理的期待均衡のうちどれが動学的に安定な均衡か等について、かなり詳しい分析が可能である(Woodford 1987, および Evans and Honkapohja 1990)。本稿では、最適化行動の仮定を守る代価として、一期間のみの静学的なモデルを想定している。

2) われわれは、供給ショック s^* や外部効果 L を

効用単位で仮定しているが、このような状況を生み出す生産技術と効用関数を考え出すことは容易にできる。たとえば、労働の平均生産性を、 $\delta^* \exp(L + \rho)$ 、効用関数を $\ln(h + \text{賃金所得})$ 、ただし働かない場合 $h=1$ 、働く場合 $h=0$ とし、 δ^* が対数正規分布に従う、と仮定すれば、本文中の議論はそのままなりたつ。

3) 一般に Y^* と Z^* が多変量正規分布にしたがうとき次式が成り立つ (Hoel 1962, pp. 200)。

$$\begin{aligned} E[Y^*|Z^* = Z] &= E[Y^*] \\ &+ \text{Cov}[Y^*, Z^*] \frac{\{Z - E[Z^*]\}}{\text{Var}[Z^*]} \\ \text{Var}[Y^*|Z^* = Z] &= \text{Var}[Y^*] \\ &- \frac{\{\text{Cov}[Y^*, Z^*]\}^2}{\text{Var}[Z^*]} \end{aligned}$$

4) (3)式がちょうどゼロになるようなデータ θ_a のもとでは、A にとって働くか否かは無差別になる。このとき A はある確率 $R_a(\theta_a)$ [$0 < R_a(\theta_a) < 1$] で働き、確率 $1 - R_a(\theta_a)$ で失業するという混合戦略 (behaviorally mixed strategy, Aumann 1964) を採用するかもしれない。しかしとりうる戦略の集合に混合戦略を含むようにモデルを拡張した場合でも、ベイジアン均衡において (3)式がゼロになるようなデータが入手される確率はメジャーゼロであることが示せる。たまたま観測値が臨界値と等しくなるという、確率ゼロの事象で、労働者がどのような行動をとるかは、他の労働者の最適戦略や、均衡における経済厚生に影響しない。そこでわれわれは、単純化のため、(3)式がちょうどゼロになるようなデータのもとでは労働者は働く」と仮定して分析を進める。

5) 労働者 A の反応曲線の $\theta_a = 0$ における傾きは

$$\frac{d\theta_b}{d\theta_a} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2} (2\sqrt{2\pi}\sigma_m + 1)$$

(14)式がなりたつ時、そしてその時のみ上式は 1 より大きい。なお、 $\sigma_e^2 \rightarrow 0$ の時 $\sigma_m \rightarrow 0$ より、反応曲線の傾きは 1 に収束する。詳しい分析は略すが、 σ_e^2 が十分に小さい時図 4-i の 2 人の反応曲線は $-\rho - 1 < \theta_a < -\rho - 1/2$ の範囲でほぼあい接するようになる。すなわち、たとえば A は B が θ_b を正に設定した時自分は θ_a を θ_b よりわずかに小さな正の値に設定する。

なおノイズがなく均衡が複数あるケースというのは、 $\sigma_e^2 \rightarrow 0$ のため、2 人の反応曲線が $-\rho - 1 < \theta_a < -\rho - 1/2$ の範囲で接するようになった極限として理解できるかもしれない。

6) 本稿に似た協力問題 (coordination problem) についての動学モデルとして、Farrel and Saloner (1985) がある。

参考文献

- [1] Aumann, R. J., "Mixed and Behavior Strategies in Infinite Extensive Games," in M. Dresher, L. Shapley, and A. Tucker (eds.), *Advances in Game Theory*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1964.
- [2] Crawford, V., and J. Sobel, "Strategic Information Transmission," *Econometrica*, Vol. 50 (1982), pp. 1431-51.
- [3] Diamond, D. W., and P. H. Dybvig, "Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity," *Journal of Political Economy*, Vol. 91 (1983), pp. 401-19.
- [4] Diamond, P., and D. Fudenberg, "Rational Expectations Business Cycles in Search Equilibrium," *Journal of Political Economy*, Vol. 97 (1989) pp. 606-20.
- [5] Evans G. W., and S. Honkapohja, "Learning, Convergence and Stability with Multiple Rational Expectations Equilibria," mimeo. London: London School of Economics and Political Science (1990).
- [6] Farrell, J., and G. Saloner, "Standardization, Compatibility, and Innovation," *Rand Journal of Economics*, Vol. 16 (1985), pp. 70-83.
- [7] Feldman, M., "Bayesian Learning and Convergence to Rational Expectations," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 16 (1987), pp. 297-313.
- [8] Harsanyi, J. C., "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players II: Bayesian Equilibrium Points," *Management Science*, Vol. 14 (1968), pp. 320-334.
- [9] Hoel, P. G., *Introduction to Mathematical Statistics*, New York, 1962.
- [10] Iwai, K., "A Bootstrap Theory of Money," mimeo. Tokyo: University of Tokyo (1989).
- [11] Kiyotaki, N., and Wright, R., "A Contribution to the Pure Theory of Money," *Journal of Economic Theory*, Vol. 53 (1991), pp. 215-35.
- [12] Krugman, P., "History vs. Expectations," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 106 (1991), pp. 651-67.
- [13] Lucas, R. E. Jr., "Adaptive Behavior and Economic Theory," *Journal of Business*, Vol. 59, Supplement (1986), pp. 401-26.
- [14] Murphy, K., Shleifer, A., and Vishny, R., "Industrialization and the Big Push," *Journal of Political Economy*, Vol. 97 (1989), pp. 1003-26.
- [15] Okuno-Fujiwara, M., "Interdependence of Industries, Coordination Failure and Strategic Promotion of an Industry," *Journal of International Economics*, Vol. 25 (1988), pp. 25-43.
- [16] Okuno-Fujiwara, M., A. Postlewaite, and K. Suzumura, "Strategic Information Revelation," *Review of Economic Studies*, Vol. 57 (1990), pp. 25-47.
- [17] Tirole, J., "Asset Bubbles and Overlapping Generations," *Econometrica*, Vol. 53 (1985), pp. 1071-100.
- [18] Townsend, R. M., "Equilibrium Theory with Learning and Disparate Expectations: Some Issues and Methods," in Frydman R. and E. S. Phelps (eds.), *Individual Forecasting and Aggregate Outcomes*, Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
- [19] Woodford, M., "Learning to Believe in Sunspots," *Econometrica*, Vol. 58 (1987), pp. 277-307.