経済研究
Vol. 41, No. 3, Jul. 1990
特集　計量経済学の方法と応用

同時方程式モデルにおける全システム推定量について

森棟公夫

Haavelmo(1943)は単一回帰式ではなく互いに関連のある複数の回帰式の統計的分析を提案したが，当初の論文は非常に理解しにくいものであった．いわゆる同時方程式あるいは同時連立方程式の統計的あるいは推定上の定式化が実証分野での研究者にもはっきりしたのはおそらくGirshik & Haavelmo(1947)ではなかろうか．もちろん当時シカゴ大学にあったCowles Comissionから出版されたモノグラフシリーズの内第10番と第14番は同時方程式モデルに関するものであり，特にそこでは最尤推定法が導出され，またこの推定法の漸近的な性質もほとんど解明された。当時は理論的な解析力よりも数値計算能力がおとっていたため最尤推定法は実際の計算にはあまり利用されることがなかった．しかしながらCowlesに集まった研究者達の心意気は非常に高いものでAndersonの言葉をかりれば「経済現象の様々な面を同時方程式分析の手法により統計的に解析すれば分析の精度は飛躍的に向上するだろう」(1986, p. 256)と考えられたのであった．

その後の操作変数推定法あるいは二段階および三段階最小2乗法の開発と普及により応用面での利用度も高まってきた．計算能力に関しては最近のコンピュータの発達によって，昔はその計算が不可能に近いと考えられた完全情報最尤法がまさに卓上でさえ楽々と計算できる時代になった．ところが分析の正確さについては当初の期待とは大きく違ってあまり大きな成果がえられたとはいえないのではなかろうか．いわゆるマクロモデルにしても，精度の点から評価すれば大した進歩は得られておらず，逆に分析対象を広める事によってその意義が確立されているようである．

ところで同時方程式モデルはその理論的な枠組みが厳密でありかつ複雑であるために，統計的な解析はCowles以来徐々に進歩してきている．計量経済学の他の分野と比べればおそらく理論的にはもっとも進歩した分野であるといえるかもしれない．特に推定法および検定法の性質が小標本の状況でさえ理解されている分野は計量経済学では同時方程式モデルの分野以外に見あたらないといってよいだろう．

本稿では同時方程式システムおよびこのシステムに固有な識別性の問題をまず解説する．つぎにこのシステムに含まれる未知係数を一括して推定する方法である完全情報最尤法を導出し，最後に完全情報最尤法と他の推定量の関係をあきらかにしていく．

1. 同時方程式モデル

経済的な変数がM個あり，この有限個の変数に関する観測値が第1期$(t=1)$からT期$(t=T)$まで得られるとしよう．変数間の相互依存関係がG本の式で表現されるとするとt期における関係は次式によって表現できる．

$$(1)\quad \phi_{it}\,(Y_{1t}, \cdots, Y_{Mt}, Y_{1t-1}, \cdots, Y_{Mt-1}, \cdots, Y_{11}, \cdots, Y_{M1}) = u_{it} \quad i=1, \cdots, G$$

この様な表現はKoopmans, Rubin and Leipnik(1950)による定式化であるが，明らかなようにt期におけるG本の関係式は，M個の変数に関するt期以前の変数値によって定まっている．未知係数は記されていないが，最大ではG本の式に含まれる変数の数だけ存在する．

未知係数については時間的な変化を考慮せず時間的にその値は固定されているとする．等号の右辺は誤差項で，$u_t=(u_{1t}, \cdots u_{GT})$ とするとその数学的期待値は 0，共分散行列は

$$(2) \quad Cov(u_t)=\Sigma$$

と仮定される．さらに観測時点の異なる誤差項間の共分数は 0 と仮定される．より強い仮定として u_t が平均 0 共分散行列Σの正規分布に従うと仮定されることもあるがこの場合は観測時点の異なる誤差項ベクトルは独立に分布する．

ある t 時点において観測できる変量は M 個，しかしながら式の数は M より小さい G 本である．実際 M 個の変数は G 個の内生変数と $K=M-G$ 個の外生変数に二分され，K 個の外生変数は G 本の式システムの外でその値が定まると考えられる．あるいは K 個の外生変数の値はすべての観測時点について既知である非確率変数と扱っても分析上は支障が生じない．内生変数と外生変数を表現上区別するために，t 期における外生変数の値を $Z_{1t}, Z_{2t}, \cdots, Z_{Kt}$，と記そう．

外生変数の値がシステム外で定まるのに対して内生変数はシステム内で値が定まると考えられる．実際，誤差項ベクトル u_t の値が与えられれば関数形と外生変数の値および内生変数と外生変数の過去の値の影響を通して t 期の内生変数の値が定まる．この際，値が一意に定まるには変換のヤコビアン行列が正則であることが必要である．

ある時点における回帰式のシステムにはその時点以前の内生変数および外生変数が含まれているが，このような過去の変数(あるいはラグ付き変数)と外生変数を総じて先決変数とよぶ．また第 1 時点より前の先決変数の値は既知であると仮定される．これはいわゆる初期値の問題であるが分析をもっとも簡単に行うための仮定でもある．

未知係数の存在および関数内での作用の仕方は明示されていないが，非線型回帰式が並んだシステムでは最尤推定法の応用はかなりむずかしい．理論的にも誤差項の分布が正規分布でない時に誤って正規分布をあてはめて得た疑似最尤推定法は，不一致推定量になることが示されている．他方ある種の操作変数推定量は誤差項の分布にかかわらず一致推定量になる．これらの非線型同時方程式モデルにおける結果は Amemiya (1985) の第 8 章でわかりやすく紹介されている．

非線型モデルの意味合いは直感的に理解しにくい．実際の計量モデルとしても非線型モデルは複雑で直感的理解を重視する統計的な数量分析の目的にもそぐわないわけで，実証的に意味合いの明白な線型モデルをここで導入する．

誤差項ベクトル u_t と同様に内生変数ベクトルを $Y_t=(Y_{1t}, Y_{2t}, \cdots, Y_{Gt})$，外生変数ベクトルを $Z_t=(Z_{1t}, Z_{2t}, \cdots, Z_{Kt})'$ と定義しよう．システム(1)の G 本の式がいずれも線形ならばシステム全体は

$$(3) \quad Y_tB_0 + Y_{t-1}B_1+\cdots+Y_{t-\tau}B_\tau + Z_t\Gamma_0+Z_{t-1}\Gamma_1+\cdots+Z_{t-e}\Gamma_e=u_t$$

とかける．ラグは内生変数についても外生変数についても有界であるとする．かつ内生変数に関する未知係数行列 B_0 から B_τ は $G\times G$ で，特に B_0 は非特異とする．外生変数に関する未知係数行列 Γ_0 から Γ_e はいずれも $G\times K$ とする．このようなシステムを特に構造式と呼ぶが，それは各式が経済的な意味づけによって想定されるからである．つまり消費関数，投資関数，生産関数などを線形に表現したものが(3)に含まれる各式にあたる．係数行列は B にしろ Γ にしろすべて未知係数からなっているというわけではなく，特定の構造式から排除される変数については係数値は 0 とする．また通常，各線形式に含まれる変数の内一個の係数は 1 とおいて係数の標準化を行なう．(係数の標準化は誤差項 u_t の分数のスケールを定めるために必要であるが標準化の方法は自由である．）さらに時系列回帰式特に多変量時系列回帰式は(3)式の特殊形になっていることも理解できよう．つまり B_0 行列が恒等行列になっていれば外生変

数を説明変数として含む自己回帰モデルである．もっとも形式的な類似性はともかくも，同時方程式モデルの考え方としてはシステム中の各式は構造式であり，その想定は経済的な意味によって支えられている．ところが時系列モデルは単にベクトル確率変数 Y_t とそのラグ付きベクトルがシステムに含まれているだけであり，構造という意味合いは考えられていない．また構造方程式では多くの零要素が係数行列に先験的にはめこまれているが，時系列分析においては係数行列中に零要素は含まれないのが普通である．誤差項ベクトル u_t に関する仮定は共通である．

線型なシステムは，時系列モデルの色彩が表現上失われるが，より簡単には

$$(4)\quad YB+Z\Gamma=U$$

とかかれる．ここで Y は Y_{1t} から Y_{Gt} を行として並べた $T\times G$ 行列，Z はすべての先決変数を行として並べた $T\times K^*$ 行列，B は先の B_0 行列，Γ は $B_1,\cdots,B\tau,\Gamma_0,\cdots,\Gamma_e$ を Z の構成に応じて行ブロックとして並べた $K^*\times G$ の係数行列である。一期から T 期までの誤差項ベクトルを行として並べれば誤差項行列 U が定義できる．

(4)式を Y について解けば，$\Pi=-\Gamma B^{-1}$，$V=UB^{-1}$ として

$$(5)\quad Y=Z\Pi+V$$

となる．この(5)式は誘導型回帰式とよばれる．

2. 識別可能性

一般に確率変数ベクトルを y_t と記し，y_t の分布は構造 S(structure)に依存しているとしよう．S は条件の集合で特定の S に対して y_t の分布が定まるとする．あきらかなように S は単に未知パラメータの値を定めるのみでなく，線型同時方程式モデルでは変数の取捨，誤差項の分布などが構造に含まれる．しかし本稿ではそのもっとも簡単な場合のみを扱い，構造とは未知パラメータの集合に一組の値を与えたものと理解しよう．また構造が定まれば y_t の分布は定義により一意に決ってくる．そして識別性の問題ではその逆，つまり y_t の分布が所与とされる際に逆に構造が一意に定まるかどうかを分析する．計量モデルの例では，$Y_t, t=1,\cdots,T$ の観測値が所与であるとして所与の観測値から構造が一意に定まるかどうか，あるいはより実際的に未知係数の推定値が一意に決められるかどうかの問題であると理解すればよい．

構造 S が m 次元空間の部分空間 A に属する実ベクトル α であると単純化して考えると，y_t の同時密度関数は $f(y_t,\alpha)$ と記すことができよう．この密度関数に関して，もし二つの異なる構造 α_1 と α_2 が同じ密度関数 $f(y_t,\alpha_2)=f(y_t,\alpha_2)$ をもたらすならば，二つの構造 α_1 と α_2 は観測上同等(observationally equivalent)であるといわれる．逆に構造 α に対して，同じ密度関数 $f(y_t,\alpha)$ をもたらす構造が他にないとすれば，α は識別可能である(identifiable)といわれる．識別可能な場合は二種類考えられる．α の近傍のみを考慮する場合は局所で識別可能とされ，パラメータ空間あるいは構造空間内全域で識別可能であれば大域で識別可能であるとされる．識別性に関して以上の議論は Koopmans, Rubin, and Leipnik (1950)によるが，1950年代では計量経済学の大問題であり数多くの論文が書かれている．本稿では以下 Rothenberg (1971)に依拠して説明を進めよう．証明は除くが，Rothenberg の方法によれば識別性の問題を個別的にではなくかなり一元的に解くことができる．

密度関数 $f(y_t,\alpha)$ は連続かつ $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ に関して微分可能であるとしておく．ここで大きさ $m\times m$ の情報行列を

$$(6)\quad R(\alpha)=E\left(\frac{d\log f}{d\alpha_i}\quad\frac{d\log f}{d\alpha_j}\right),\qquad i,\mathrm{j}=1,\cdots,m$$

と定め，$R(\alpha)$ は α に関して連続であるとする．ここで Rothenberg は次の定理を導く．

定理1：α^0 が識別可能であるための必要十分条件は $R(\alpha)$ が α^0 において正則であり，またその階数が変わらない α^0 の近傍が存在することである．

構造に関しては制約が課せられる場合が多い．制約は既知の関数 ψ_i によって

$$(7)\quad \psi_i(\alpha)=0, \qquad i=1,\cdots,k$$

と表現できるが，このような制約が存在する場合は構造空間が(7)によって縮小されていると考えればよい．したがって $k\times m$ のヤコビアン行列を

$$(8)\quad \psi(\alpha)=\left(\frac{d\psi_i}{d\alpha_j}\right), \qquad i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,m$$

とすれば局所での識別性の条件は行列

$$(9)\quad V(\alpha)=\begin{pmatrix}R(\alpha)\\ \psi(\alpha)\end{pmatrix}$$

の階級が α^0 近傍で m であることに等しい．

大域での識別条件は(9)式の階級に関する条件が特定の構造 α^0 に依存していなければよい．m 次元空間の部分空間になっている構造空間 A の全域において R あるいは V の階数が m であれば，構造は大域で識別可能となる．そのための十分条件は次の定理で与えられる．

定理2：密度関数 $f(y_t,\alpha)$ が指数族であるとする．もし $R(\alpha)$ が A において正則であれば A に含まれるすべての構造は大域で識別可能である．

また分布に関する制約とは全く異なる十分条件として，次の定理がある．

定理3：既知の関数 $\phi_i(y_t), i=1,\cdots,m$ が存在し，A に属するすべての α について $\alpha_i=E\{\phi_i(y_t)\}, i=1,\cdots,m$ が満たされれば，α は大域で識別可能である．

大域の識別性に関する十分条件は上述の二定理しか知られていないが，同時方程式モデルの識別性にとってはいずれの定理も有用である．

ここで識別性の一般論を終わり構造方程式システム(4)の識別性条件を考えてみよう．また簡単化のためにシステムには先決内生変数が含まれないとしよう．(4)式の識別問題では構造 α は $(B\Gamma)$ の要素を縦に積み重ねたベクトルと考えればよい．誘導形係数行列 Π は $-\Gamma B^{-1}$ と定義されるが，Π 行列の識別性を分析すると，誘導形誤差項の期待値が0であれば，$E(Y)=Z\Pi$ あるいは $E\{(Z'Z)^{-1}Z'Y\}=\Pi$ であるから定理3により Π 行列は大域で識別可能である．とすると識別可能性の定義により，構造 α あるいは $(B\Gamma)$ と誘導形係数行列 Π が一対一で対応しておれば $(B\Gamma)$ は識別可能である．したがって同時方程式システムの識別性は大域での識別性であり，かつ $(B\Gamma)$ と Π の間の変換の一意性の問題に帰着することがわかる．また変換の一意性はヤコビアン行列の階数の問題である．

先決内生変数が含まれる場合は誤差項に正規性の仮定を加えて定理2が利用できる．システムは $Y_t=Z_t\Pi+V_t, \Pi=-\Gamma B^{-1}$ かつ V_t の分布は $\mathrm{N}(0,\Omega)$ また異なる時点に関して独立とする．簡単化のため Ω には制約が含まれないとすれば，対数尤度関数は $\Pi=-\Gamma B^{-1}$ として

$$(10)\quad \log L\propto\sum_{t=1}^{T}(Y_t-Z_t\Pi)\Omega^{-1}(Y_t-Z_t\Pi)'$$

となる．π を $\mathrm{Vec}(\Pi)$ ただし $\mathrm{Vec}(\Pi)$ は Π の列を積み重ねた列ベクトルとすれば情報行列は

$$(11)\quad R(\alpha)=-\left(\frac{d\pi'}{d\alpha}\right)E\left(\frac{d^2\log L}{d\pi d\pi'}\right)\left(\frac{d\pi}{d\alpha'}\right)$$

となる．ここで $E(\cdot)$ は $(G\times K)\times(G\times K)$ の正方行列で，ラグ付き内生変数も含めた先決変数行列を Z と記せば $\{\Omega^{-1}\otimes E(Z'Z)\}$ と計算

できる．また，$J=(d\pi'/d\alpha)$とすればJの行数はαの要素，列数はπの要素の数できまっている．ところでこの$E(\cdot)$の前と後からかかるJ行列はΠから$(B\Gamma)$への変換のヤコビアン行列であるから，先決内生変数が含まれない場合と同様Jの階数によって識別可能性が定まる．

以上の分析では$(B\Gamma)$に関する制約を一切明示的に述べていないが，$(B\Gamma)$の要素に関して

$$(12)\quad \psi_i(B,\Gamma)=0, \qquad i=1,\cdots,R$$

という制約を置くことにする．ここでαを

$$(13)\quad \alpha=\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{vec}\,B\\ \mathrm{vec}\,\Gamma\end{pmatrix} \quad : G\times(G\times K)$$

$$(14)\quad \psi=\left(\frac{d\psi_1}{d\alpha},\cdots,\frac{d\psi_R}{d\alpha}\right):[G\times(G\times K)]\times R$$

と記せば制約付きのヤコビアン行列は

$$(15)\quad J=\left(\frac{d\pi'}{d\alpha};\begin{matrix}\psi_b\\ \psi_r\end{matrix}\right):[(G\times(G+K)]\times(GK+R)$$

となる．ただしヤコビアンはβ係数に関する微分を行列ψ_bで，またγ係数に関する微分を行列ψ_rで表現する．したがってこの行列Jが行に関して階数がおちていなければ情報行列は正則となり識別可能となる．

以下，Jのうちとくに$(d\pi'/d\alpha)$を計算していって識別性条件を導いていくのであるが，ここでは簡略化のため結論のみを記そう．まずJが行に関して階数落ちしないためには制約の数RがG^2以上でないといけない．このことは(15)式の行列の大きさによりわかる．さらに

$$(16)\quad W=(I_G\otimes B')\psi_b+(I_G\otimes\Gamma')\psi_r \qquad G^2\times R$$

の階数がG^2であればαは小域で識別可能となる．ただし制約が線形の場合は制約に関するヤコビアンがαの値に依存しないので大域の識別可能性が導かれる．

制約が複数の構造式にかかわらず単一式の係数のみに限られる場合は，(16)式中の行列の積がさらに計算することができ表現そのものを簡略化できることが知られている．例として二本の構造式からなるシステムを考えてみられたい．

$$\beta_{11}y_1+\beta_{12}y_2+\gamma_{11}X_1+\gamma_{12}X_2+\gamma_{13}X_3=u_1$$

$$\beta_{21}y_1+\beta_{22}y_2+\gamma_{21}X_1+\gamma_{22}X_2+\gamma_{23}X_3=u_3$$

ただし制約として1）$\beta_{11}=1$, 2）$\beta_{22}=1$, 3）$\gamma_{11}+\gamma_{12}=1$, 4）$\gamma_{21}=\gamma_{13}$，とする．制約は4，$G$は2である．

制約が係数に関して非線型である場合には局所的な識別しか問題にならないが，識別性の条件は(15)式の階数の問題に帰着する．ただし係数に関して非線型制約がある場合には，識別性の条件が満たされていなくともシステムが識別されることは可能である．その場合，推定量の漸近分布は正規分布にはならないことがわかっている(Sargan(1983))．

システムに含まれる変数が非線型である場合は(11)式の情報行列の計算が困難になり，(16)式の階数を容易に検討することができない．(統計学辞典10・5節)

3.　完全情報最尤(FIML)推定量

この節ではDurbin(1963, 1988)，Hausman(1975)そしてHendry(1976)に沿って最尤推定量を導く．次に最尤推定量の変形としての三段階最小2乗法，修正3段階2乗法，および制限情報最尤法を導き諸推定量間の関係を明らかにする．

システム全体を一括して推定する方法としてKoopmans, Rubin, and Leipnik(1950)によってまず最尤法が与えられた．(6)式における誤差項が異時点間で独立に$N(0,\Sigma)$にしたがって分布しているとすると対数尤度関数は

$$(17)\quad L(B,\Gamma,\Sigma)\propto T\log|B|-\frac{1}{2}T\log|\Sigma| -\frac{1}{2}tr\{\Sigma^{-1}(YB+Z\Gamma)'(YB+Z\Gamma)\}$$

となる．まず(17)式のΣに関する一次微分を

求め，最大化の一次の条件を求めると

(18) $\Sigma=\frac{1}{T}(YB+Z\Gamma)'(YB+Z\Gamma)$

を得る．以下(B,Γ)の最尤推定量を求めるが，便宜的に次のような操作子を利用する．

行列AについてA^vはAの列を縦に積みあげていった列ベクトルである．$\delta=A^v$とすると$\phi=\delta^u$はδの要素の内制約されていない(unconstrained)要素のみを縦に並べたベクトルとする．したがって$\phi=(A^v)^u$でもある．またAの内制約のない要素を列につみあげる操作子をA^r(retained element)とすると$\phi=A^r$である．rはvとuの結合操作子である．この操作子に関しては次のような便利な性質が知られている．つまりD, R, Fを整合な行列とすると

(19) $(DRF)^v=(D\otimes F')R^v$

となる．vをrに変えても(19)式は成立する．

このような準備のもとで$\phi=(B,\Gamma)'^r$とし，(17)式の最大化条件をϕに関して求めると

(20) $[T(B^{-1},0)-\{\Sigma^{-1}(YB+Z\Gamma)'(Y,Z)\}]'^r=0$

となる．ここで(18)と誘導形回帰式より

(21) $TB^{-1}=\Sigma^{-1}(YB+Z\Gamma)'(Y-Z\Pi)$

となるから，(21)を(20)に代入すると

(22) $\Sigma^{-1}[(YB+Z\Gamma)'Z(\Pi,I)]'^r=0$

となる．ここで注意すべきは操作子rにより(Π,I)行列のうち各構造式に含まれる変数に対応した列が残されていることである．つまり第i構造式にG_i+K_iの変数が含まれているのならば(Π,I)のうち(G_i+K_i)列が残されていて，(22)の括弧の内にはそのような行がG行含まれている．(22)式をより明示的にするために各構造式を正規化してB行列の対角要素を1としておこう．つまりBを(B^d+I)と分解し，B^dの対角要素は0であるとしておく．そうすると(22)は

(23) $\Sigma^{-1}(YB^d+Z\Gamma)'Z(\Pi,I)^r+[\Sigma^{-1}Y'Z(\Pi,I)]^r=0$

となる．ここで(19)を利用すれば

(24) $-[\Sigma^{-1}\otimes\begin{pmatrix}\Pi'\\I\end{pmatrix}Z'(Y,Z)]^r\delta=[\Sigma^{-1}\otimes\begin{pmatrix}\Pi'\\I\end{pmatrix}Z'Y]^r$

を得る．

最尤推定量をえるためには(18)式および(24)式の両式を満たすべくB,ΓおよびΣが求められなければならない．第一段でのB,Γの推定値あるいは初期値$B_{(1)}$と$\Gamma_{(1)}$が与えられれば(18)より$\Sigma_{(1)}$の値が定まり，つぎに$\Pi_{(1)}=-\Gamma_{(1)}B_{(1)}^{-1}$と$\Pi$の初期値も定まる．この$\Sigma_{(1)}$と$\Pi_{(1)}$を用いて(24)式より$\delta$が計算され，この$\delta$が$B_{(2)},\Gamma_{(2)}$を与える．このような反復的な手続きを経て最尤推定値を計算することができる．以上の結果はDurbin(1963)により示されたが本稿での導出はHendry(1976)に拠る．同じくHausman(1975)あるいはAmemiya(1985)が異なった方法で導出している．なお行列に関する様々な計算法はかなり発達してきており，Magnus(1988)に主な結果が集約されている．

(24)式の理解を進めるために構造式の表現を

(25) $y_i+Y_i\beta_i+Z_i\gamma_i=u_i \quad i=1,\cdots,G$

と書き改めよう．この表現ではy_1は$T\times1$, Y_iは$T\times G_i$, X_iは$T\times K_i$の行列で，T期にわたる観測値がすべてT行に含まれている．またB行列の要素中1と標準化されている対角要素はy_iの係数として明示化されている．またBの第i列中0と制約されている係数をも

つ内生変数は第 i 式から排除されている．さらに総数で K 個の先決変数の内，係数が0と制約されている変数も第 i 式からはすでに排除されている．ここで Y_i の誘導式を $Y_i=Z\Pi_i+V_i$ としさらに $X_i=(Z\Pi_i, Z_i)$, $\hat{X}_i=(Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_i, Z_i)$ とすれば，構造式の数が二式の場合について(24)式は

$$(26)\quad \delta\equiv-\begin{pmatrix}\beta_1\\ \gamma_1\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma^{11}X_1'\hat{X}_1 & \sigma^{12}X_1'\hat{X}_2\\ \sigma^{21}X_2'\hat{X}_1 & \sigma^{22}X_2'\hat{X}_2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\Sigma_{j=1,2}\begin{pmatrix}\sigma_{1j}X_1'y_j\\ \sigma^{2j}X_2'y_j\end{pmatrix}$$

と記すことができる．ただし σ^{ij} は Σ^{-1} の第 i, 第 j 要素とする．(24)式を一般の場合に拡張することは容易である．

FIML 推定量とともにシステム全体に含まれる未知係数を一括して推定する方法として三段階最小2乗(3SLS)推定量が知られている．3SLS 推定量は FIML 推定量とともに一致推定量でありかつ漸近的に有効でもある．この 3SLS 推定量は，(26)式を用いれば右辺の X_1 と X_2 を $\hat{X}_1$ と $\hat{X}_2$ に置き換え，かつ Σ を二段階最小2乗(2SLS)推定の結果求められた残差を使って推定することによりえられる．つまり $\hat{\beta}_i$ と $\hat{\gamma}_i$ を 2SLS 推定量として

$$(27)\quad \hat{u}_i=y_i-Y_i\hat{\beta}_i-Z_i\hat{\gamma}_i \qquad i=1,2$$

をもとめ，$\hat{\sigma}_{ij}=\hat{u}_i'\hat{u}_j/T$ と推定するのである．

3SLS 推定量の分布上の性質は大標本漸近分布以外その詳細が知られていない．特にその厳密モーメントの存在は Sargan(1978)によって証明されたが，分布の漸近展開はあまりに複雑になるために導出しても意味がないであろうことがわかった．筆者は Morimune(1987)において分布の漸近展開がかなう限り簡単になるような 3SLS 推定量の修正型を考察していき，その結果として修正 3SLS(M3SLS)推定量を提案した．M3SLS 推定量ではまず構造係数を 3SLS 法で推定する．その推定結果をもちいて(27)式の方法で残差を求め誤差共分散行列を推定する．他方，3SLS 法の結果により誘導形係数の定義を通して $\tilde{\Pi}=-\hat{\Gamma}\hat{B}^{-1}$ と誘導形係数を推定する．そしてこの $\tilde{\Pi}$ 行列の内，右辺に含まれる内生変数 Y_i に対応する列を選んで $\tilde{X}_i=(Z\tilde{\Pi}_i, Z_i)$ と記そう．最後に(26)式中の Σ を新たにえられた構造形誤差共分散行列に置き換え，また X_1 と X_2 を $\tilde{X}_1$ と $\tilde{X}_2$ に置き換えれば M3SLS 推定量が定義される．

以上によって FIML, 3SLS, および M3SLS 推定量の形式的な類似性は(26)を通して明らかであろう．FIML 法では反復計算を収束に至るまで繰り返し，3SLS 法では 2SLS 法の結果をもちいて(26)式を一回使う．そして M3SLS 法では簡潔に表現すれば(26)式を二回繰り返せばよいといえよう．

4. 分布の漸近展開

4.1 全体系法

M3SLS 推定量の特長は分布の展開が三次まで FIML 推定量の分布の展開と一致することにある．ここでその展開を示すならば，$\sqrt{T}(\hat{\delta}_{\mathrm{FIML}}-\delta)$ と $\sqrt{T}(\hat{\delta}_{\mathrm{M3SLS}}-\delta)$ の密度関数は正規密度関数の周辺で次のように近似できる．(紙面の節約のため導出は示さないが，必要な場合は筆者にお知らせ下さい．)

$$(28)\quad \phi_F(\xi)-\frac{1}{\sqrt{T}}\Sigma_{i,j,k=1,2}\{tr\{(F^{ij}-\xi_i\xi_j')\sigma^{jk}X_j'X_i\}\cdot h_i'(B^{-1},0)S_k'\xi_k+h_i'(B^{-1},0)S_k'F^{kj}(\sigma^{jk}X_j'X_i)\xi_i\}\phi_F(\xi)+0\left(\frac{1}{T}\right)$$

ここで $\phi_F(\xi)$ は $p(=G_1+K_1+G_2+K_2)$ 次元の多変量正規密度関数で平均は0共分散行列は F^{-1}, F は情報行列でその i, j 小ブロックは $F_{ij}=\sigma^{ij}\lim_T(X_i'X_j/T)$ となる．ξ_1 と ξ_2 は $p\times1$ のベクトル ξ の上半分と下半分で，第1式の構造係数と第2式の構造係数に対応している．S_k は $(Y,X)S_k'=(Y_k, X_k)$ を満たす行列で，$(G+K)$ 列から第 k 構造式に含まれる変数$(Y_k,$

X_k)に対応する列を選びだしてくる行列である．(28)式中では$(B^{-1}, 0)S_k'$により列の選択が行なわれている．h_kはk番目の要素が1で他の要素がすべて0である列ベクトルである．

(28)式を密度関数とみなすと，推定量$\hat{\delta}_{\mathrm{FIML}}$の期待値などが計算できる．厳密な期待値ではなく展開(28)を基にして計算された期待値であるので$AE(\cdot)$と表現すると，第1式の係数δ_1に対する期待値は

$$(29) \quad AE\{\sqrt{T}(\hat{\delta}_1 - \delta_1)\} = \frac{1}{\sqrt{T}} \Sigma_{i,j,k=1,2} F^{1j} X_j' X_i \sigma^{jk} F^{ik} S_k (B^{-1}, 0)' h_i + 0\left(\frac{1}{T}\right)$$

ともとまる．この式も複雑でその意味合は明白でない．ただ先で説明する単一方程式法と異って他の構造式の強い影響をまぬがれえないということだけは理解できる．

漸近展開の一般的な説明を加えるならば，(28)式の第一項はいわゆる漸近分布に対応している．つまり標本数Tが無限大になるとすれば，第二項は消えてしまう．第二項は二次の項とよばれるが，大括弧内はTに依存しない量で項の頭にある$\sqrt{T}$により相対的な大きさが定まる．二次の項と同様により高次の項も導出することは可能であるが，たとえば三次の項は非常に複雑になる．さらに残念なことに(28)式もかなり複雑であるためにFIMLあるいはM3SLS推定量の定性的な性質を導き出すことができない．もちろん(28)式を数値評価することは可能であるが，数値評価にはB行列，Σ行列，X行列そしてΠ行列の値を定めることが必要である．

(28)式は第一構造式に含まれる係数の推定量と第二構造式に含まれる係数の推定量の同時密度関数の展開であるが，数値評価や推定量の比較を目的にする場合は同時密度よりも周辺密度の展開を求めた方が便利がよい．ここでξ_1の周辺密度の展開を求めるが，そのためには(28)式をξ_2に関して積分してやればよい．計算結果は次のようになる．

$$\begin{aligned}(30) \quad & \phi_{F*}(\xi_1) - \frac{1}{\sqrt{T}}\Big\{(K_1 + G_1 + 1 - \xi_1' F^* \xi_1) \\ & \cdot [h_1'(B^{-1}, 0) S_1' \xi_1 + \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{12}} h_2'(B^{-1}, 0) S_1' \xi_1 \\ & - h_1'(B^{-1}, 0) S_2' (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 \xi_1] \\ & + tr\left[(F^{*-1} - \xi_1 \xi_1')\left(\frac{1}{\sigma_{11}} X_1' X_1\right)\right]\Big[\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{12}} h_2'(B^{-1}, \\ & 0) S_1' \xi_1 + h_1'(B^{-1}, 0) S_2' (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 \xi_1\Big] \\ & + \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{12}} h_2'(B^{-1}, 0) S_1' F^{*-1}\left(\frac{1}{\sigma_{11}} X_1' X_1\right)\xi_1 \\ & + \frac{1}{\sigma_{22}} h_1'(B^{-1}, 0) S_2' F^{22} X_2' X_1 \xi_1\Big\} \phi_{F*}(\xi_1).\end{aligned}$$

ただし$F^* = F_{11} - F_{12} F_{22}^{-1} F_{21}$である．この式も複雑でその意味合いはよくわからない．しかしながら第一項は当然ながら$(\beta_1' \gamma_1')$の大標本漸近分布である．また第二構造式が様々な形で影響していることもわかる．特に$X_2' X_2$行列，$X_2' X_1$行列，そしてξ_2の漸近共分散行列F^{22}などが含まれていることに特徴がある．

システムに構造式が二式しか含まれない場合は(30)式をより簡潔に表現できる．というのは二構造式は通常$y_1 = y_2 \beta_1 + Z_1 \gamma_1 + u_1$, $y_2 = y_1 \beta_2 + Z_2 \gamma_2 + u_2$と書かれ，したがって$B^{-1}$が$\beta_1$と$\beta_2$を用いて計算できるからである．また(30)式中の$h_i'(B^{-1}, 0) S_j$は$(b^{ij}, 0)$という行ベクトルになり，このベクトルとの内積はかなり単純化できる．しかし本稿では二構造式システムでありながら多少一般的な雰囲気を残した(30)を漸近展開の結論としておこう．繰り返すならば(30)式はFIML並びにM3SLS推定量の分布の展開である．さらに(30)には記されていないが三次の項までこの二つの推定量は同じ展開をもつのである．

4.2 三次の有効性

Takeuchi & Morimune (1985)は先決内生変数が含まれない同時方程式体系において，FIML推定量が三次の有効性をもつことを証明した．以下この結果を説明しよう．

三次の有効性はBAN推定量つまり一次の有効性をもつ推定量間での効率を比較した理論

である．まず一次有効な推定量は漸近的に平均0，共分散行列が F^{-1} である多変量正規分布に従って分布しているがこのような推定量は複数個存在する．その比較のため一次有効な推定量の分布の漸近展開を，多変量正規分布を一次の項として(28)式のように三次の項まで導出する．その結果このような展開は第一項を除いてBAN推定量間で異ってくることがわかる．(ただし(28)式は二次$(1/\sqrt{T})$の項までしか導出されていない．）そこで各推定量が同じ漸近期待値をもつように推定量を修正する．この修正の仕方は自由だが，直感的にもっとも容易な方法は漸近期待値の一致推定量を作ることであろう．このような漸近期待値の一致推定量により各推定量の漸近期待値が0になるような修正をすれば，三次有効性理論の条件を満たす修正推定量をえる．三次有効性理論の結論は，このような修正推定量の間で三次までの漸近展開をもとにして計算された平均平方誤差を比較すれば，FIML推定量の平均平方誤差が行列の意味で一番小さくなるというものである．あるいはFIML推定量よりも小さな平均平方誤差を与える推定量は存在しないといってもよい．したがってFIML推定量は三次有効であるが，3SLS推定量は有効ではないことがわかる．(先に述べるLIML推定量はFIML推定量の特殊形である．同様に2SLS推定量は3SLS推定量の特殊形である．Takeuchi and Morimune(1985)はLIML推定量は三次有効だが2SLS推定量は三次有効ではないことを証明した．したがって対偶の論理により，3SLS推定量の非有効性が証明できる．）ところがM3SLS推定量はFIML推定量と同じ分布の漸近展開を三次の項までもつので，三次有効である．

4.3 単一方程式法

全システム推定法は p 次元ベクトル δ を一括して推定する方法であるが，より計算の簡単な方法としてシステムに含まれる一構造式の係数推定のみを考えるのが単一方程式法である．あるいは全システム法では各構造式にどの変数が含まれ，したがってどの変数が排除されるかといった係数制約がすべて推定に使われているが，単一方程式法では当該構造式以外の式に関する制約は推定にもちいられない．例えば第一構造式の推定は

(31) $y_1+Y_1\beta_1+Z_1\gamma_1=u_1$

(32) $Y_1=Z\Pi_1+V_1$

という簡単なシステムにおける β_1 と γ_1 の推定問題に帰着する．ただし Π_1 は $-\Gamma B^{-1}$ のうち Y_1 に対応する G_1 列であり，V_1 も UB^{-1} のうち Y_1 に対応する G_1 列である．システムの中には(31)式から排除された内生変数が存在するが，この排除された内生変数は以下に述べる推定では考慮に入れる必要がない．

単一方程式推定法でよく知られているのは制限情報最尤(LIML)推定量と二段階最小2乗(2SLS)推定量があるが，(26)式の表記を使えばLIML法はFIML法の特殊な場合で，システムが(31)と(32)から成立しているとみなせばよい．単一方程式法では X_2 は Z 行列，$\hat{X}_2$ も Z 行列，$Z'\hat{X}_1=Z'(Y_1,Z_1)\delta_2=\mathrm{vec}(\Pi_1)$ などとなっているから(26)式の逆行列を δ の左から掛けた形で考えると

(33) $$\sigma^{11}X_1'(Y_1,Z_1)\delta_1+[\sigma^{12}\otimes(X_1'Z)]\delta_2=\sigma^{11}X_1'y_1+[\sigma^{12}\otimes X_1']\mathrm{vec}(Y_1)$$

(34) $$[\sigma^{21}\otimes Z'(Y_1,Z_1)]\delta_1+[\sigma^{22}\otimes(Z'Z)]\delta_2=[\sigma^{21}\otimes Z']y_1+[\sigma^{22}\otimes Z']\mathrm{vec}(Y_1)$$

となる．ここで $\sigma^{12}/\sigma^{22}=-\sigma_{12}/\sigma_{11}$ だから(34)式より

(35) $$\Pi_1=(Z'Z)^{-1}Z'Y_2-(Z'Z)^{-1}Z'(y_1-Y_1\beta_1-Z_1\gamma_1)(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12}$$

となる．これはいわゆる制約付きの誘導形係数推定量になっている．(35)を(33)に代入して整理すると

(36) $(X_1'\hat{X}_1)\delta_1=X_1'y_1$

を得る．3SLS 推定量では(26)式の X_1 は $\hat{X}_1$ に置き換えられているから(36)式は $(\hat{X}_1'\hat{X}_1)\delta_1=\hat{X}_1'y_1$ となる．これが δ_1 の 2SLS 推定量である．FIML 推定量の特殊型としての LIML 推定量は(33)，(34)および(36)式より導出することができる．この導出はかなり複雑であるが Anderson and Rubin(1949)よりも簡単で，その結果は $Y=(y_1, Y_1)$, $P_F=F(F'F)^{-1}F'$ として

$$(37)\quad \{Y'(P_z-P_{z1})Y-\lambda Y'P_zY\}\begin{pmatrix}1\\-\beta\end{pmatrix}=0$$

を満たす β が LIML 推定量となる．つまり固有ベクトルとなっている．ただし(37)式中の λ は(37)の括弧 $\{\cdot\}$ を行列式とした固有方程式の最小根である．最後に M3SLS 推定量の場合は(31)を 2SLS 法で，(32)式の Π_1 を最小 2 乗法で推定し，その結果えられる残差系列より誤差共分散行列を推定する．この推定された誤差共分散行列を 3SLS 法の公式に代入して第二次の推定値を得る．第三次の M3SLS 推定値はまず誤差共分散行列を 3SLS の結果を使って再推定する．次に 3SLS 推定の結果えた Π_1 の推定値 $\tilde{\Pi}_1$ を利用して X_1 を $\tilde{X}_1=(Z\tilde{\Pi}_1, Z_1)$ に置き換える．以上の結果を(33)式と(34)式に代入して MSLS 推定量となる．この最終結果のうち δ_I の推定量を M2SLS 推定量とよぶ．M3SLS 推定量に関する性質の特殊形への応用によって，LIML 推定量と M2SLS 推定量の分布の漸近展開は三次の項まで等しくなる．したがって LIML 推定量と M2SLS 推定量は三次有効でもある．

周辺密度の展開式(30)は制限情報推定の場合にも利用できるが，$(\beta_1'\gamma_1')$ の LIML あるいは M2SLS 推定量の分布の漸近展開は(30)式より

$$(38)\quad \phi_{F*}(\xi_1)-\frac{1}{\sqrt{T}}\Big\{[K_1+G_1+1-\xi_1'F^*\xi_1]\cdot\frac{1}{\sigma_{11}}(\sigma_{12}, 0)\,\xi_1\Big\}\phi_{F*}(\xi_1)$$

となる．F^* は単純化されて $(1/\sigma_{11})\lim_T(1/T)X_1'X_1$ と計算できる．また F^* は単一方程式法における情報行列にもなっている．(38)式は構造式に二個の内生変数が含まれる場合，つまり $G_1=1$ の時は Anderson(1974)によって導出された．一般の場合は Fujikoshi et. al.(1982)による．ただし本稿では(38)が M2SLS 推定量の分布の展開にもなっていることに注意されたい．(38)をあたかも密度関数とみなして数学的期待値を計算すると

$$(39)\quad AE(\xi_1)=\frac{1}{\sqrt{T}}(X_1'X_1)^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_{21}\\0\end{pmatrix}+O\Big(\frac{1}{T}\Big)$$

となる．制限情報の状況では(30)をつかって $\sqrt{T}\,\mathrm{vec}(\hat{\Pi}_1-\Pi_1)$ の分布の展開を計算することもできる．$\hat{\Pi}_1$ は Π_1 の LIML あるいは M2SLS 推定量だが，展開の結果は

$$(40)\quad \phi_{F*}(\xi_2)-\frac{1}{\sigma_{11}\sigma^{11}}\{(K_2-G_1)-\xi_2'\sigma^{22}\otimes Z'(I-P_{x1})Z\xi_2\}\cdot[\sigma^{12}\otimes(\sigma_{12}0)(X_1'X_1)^{-1}X_1'Z]\xi_2'\phi_{F*}(\xi_2)$$

となる．ただし $\hat{\Pi}_1$ は実用上あまり用いられることはないようである．

4.4 単一方程式推定量の性質

通常の大標本漸近分布を導出するためには，変数の数を固定しておいて標本数が増大するにつれ外生変数のモーメント行列が行列の意味で値を増やしていくと仮定される．さらにこの増加の状況は $\lim_T(Z'Z/T)$ が正則な定数行列に収束することに縮約される．この仮定をかえて

$$(41)\quad \lim_T\frac{1}{T}Z'Z=C_0+\frac{1}{\sqrt{T}}C_1+\frac{1}{T}C_2+0\Big(\frac{1}{T}\Big)$$

とすれば，漸近展開の結果は異ったものになる．明らかなように(41)式では，左辺は C_0 の周辺で変動していると考えられている．(41)式に対

して通常の仮定では C_1 と C_2 が 0 行列とされている．

大標本漸近理論における通常の仮定は理解しやすいものだが，実際上は標本数を増加できるわけではなく，所与の標本数 T を T が無限大の状況で近似しているにすぎない．したがって通常の漸近理論とは異なる仮定のもとで漸近分布あるいは分布の展開を導出することも新たな近似として可能である．Kunitomo (1980) や Morimune (1983) では T とともに外生変数の総数 K が増大する仮定が考えられ，この仮定のもとでの分布の近似が導出された．つまり従来の仮定に加えて，

(42)' $\lim_T(K/T)=\tau^2$

が定数になるとされるのである．仮定の意味は標本数とともに外生変数の総数が増加するという解釈もあるが，むしろ K が比較的大なる際は通常の近似展開が不正確であるから，K 大なる時の新たな近似の条件として(42)が想定されたと考えればよい．もっとも K が大といっても K_1 つまりある構造式に含まれる外生変数の数は一ケタにとどまるから，K_2 が大であると考えられている．このような条件のもとで LIML と 2SLS 推定量の漸近的性質をもとめてみるとつぎのようになる．（以下の漸近分布の導出は紙面を節約するため割愛します．必要な場合は筆者にお知らせ下さい．）

(43) $$p\lim_T(\hat{\delta}_{2SLS}-\delta)=F^*+\begin{pmatrix}\tau^2\omega_{22} & 0^{-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\tau^2\begin{pmatrix}\sigma_{21}\\ 0\end{pmatrix}$$

つまり 2SLS 推定量は一致性をもたないことがわかる．（ただし $\Pi_2' Z'Z\Pi_2/T$ などの行列が収束すると条件付けしておかないといけない．）LIML 推定量については，最小固有値 λ の働きによって一致性は保たれるものの漸近分散共分散行列が標準の場合よりも大になることを示すことができる．つまり漸近共分散行列は

(44) $$\left(F^*-\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

となる．ただし D は複雑であるので定義しないが，対称な非負定符号行列となっている．したがって LIML 推定量は一致性を失わないものの漸近分散共分散行列が大きくなることがわかる．詳細は述べないが 2SLS 推定量に関しては，漸近分散共分散行列は標準の場合よりも小さくなることを証明することができる．つまり(43)式を bias として $\sqrt{T}(\hat{\delta}_{2SLS}-\delta-\text{bias})$ の漸近共分散行列は

(45) $$\left(F^*+\begin{pmatrix}D^* & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

の形となる．ただし D^* は D と同様対称な非負定符号行列であるがその定義は同じく複雑である．

K が大なる場合の分布の漸近展開を導出することもできる．(Kunitomo (1980, 1981), Morimune (1983, 1985))．この漸近展開はかなり複雑な結果をもたらすが，分布の近似としての精度は標準的な仮定のもとでの展開よりもはるかに正確になることがわかっている．また前節で紹介した M2SLS 推定量は標準的な仮定のもとでは LIML 推定量と非常に似通った性質をもつが，K が大なる場合はその漸近的な性質は LIML 推定量から離れていく．結論としては，K が大なる状況のもとでは LIML 推定量がもっとも優れているといえよう．ただしこのような K が大なる場合の性質はシステム推定法に関しては何も知られていない．ただ LIML は FIML の特殊な場合であり，かつ 2SLS は 3SLS の特殊な場合であることを考慮すれば，システム法において突然 3SLS が FIML をしのぐ性質をもたらすとは考えにくい．

先に述べた三次の有効性をも考え合わせると，単一方程式法の内では LIML 法のよさが理解できようが，筆者は Fuller (1978) による改良 LIML 推定量を実用上もっとも適切な推定法として提唱する．この推定量は正規化に関して

不変であるというLIML法の性質を除いてLIML法のよさをすべて満足しており，かつ厳密なモーメントをも有しているのである．

（京都大学経済研究所）

References

［1］ Amemiya, T., *Advanced Econometrics*, Harvard University Press, 1985.

［2］ Anderson, T. W., "Asymptotic Expansion of the Distribution of the Limited Information Maximum Likelihood Estimate of a Coefficient in a Simultaneous Equation System" *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 69(1974), pp. 565-573.

［3］ ──, "Interview by Peter C. B. Phillips," *Econometric Theory*, Vol. 2, No. 2(1986), pp. 249-288.

［4］ ──, and Rubin, H., "Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 20(1949), pp. 46-63.

［5］ Durbin, "Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a System of Simultaneous Regression Equations," *Econometric Theory*, Vol. 4 (1963, 1988), pp. 159-170.

［6］ Fujikoshi, Y., Morimune, K., Kunitomo, N., Taniguchi, M.(1982), "Asymptotic Expansions of the Distributions of the Estimates of Coefficients in a Simultaneous Equation System," *Journal of Econometrics*, Vol. 18, No. 2(February 1982), pp. 191-205.

［7］ Fuller, W., "Some Properties of a Modification of the Limited Information Estimator," *Econometrica*, Vol. 45(1978), pp. 939-953.

［8］ Girshick, M. A., and Haavelmo, T., "Statistical Analysis of the Demand for Food : Examples of Simultaneous Estimation of Structural Equations," Chapter 5 in *Studies in Econometric Method*, edited by Hood and Koopmans, Cowles Commission Monograph 14,(New Heaven : Yale University Press, 1953).

［9］ Haavelmo, Trygve, "The Statistical Implication of a System of Simultanious Equations," *Econometrica*, Vol. 11(1943), pp. 181-204.

［10］ Hausman, J. A., "An Instrumental Variable Approach to Full Information Estimators for Linear and Certain Nonlinear Econometric Models," *Econometrica*, Vol. 43(1975), pp. 727-738.

［11］ Hendry, D., "The Structure of Simultaneous Equations Estimators," *Journal of Econometrics*, Vol. 4(1976), pp. 51-88.

［12］ Koopmans, T. C., *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, edited by Koopmans. Cowles Commission Monograph 10, New York : John Wiley & Sons, Inc, 1950.

［13］ ──, Rubin, H., and Leipnik, R. B., "Simultaneous Equation System," Part One in *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, edited by Koopmans, (1950).

［14］ Kunitomo, N., "Asymptotic Expansions of the Distributions of Estimators in Linear Functional Relationship and Simultaneous Equations," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 75(1980), pp. 693-700.

［15］ ──, "Asymptotic Optimality of the Limited Information Maximum Likelihood Estimator in a Large Econometric Models," *Economic Studies Quarterly*, Vol. 32, No. 3(1981), pp. 247-266.

［16］ Magnus, J., *Linear Structure*, Griffin & Company Ltd : London, New York : Oxford University Press, 1988.

［17］ Morimune, K., "Approximate Distribution of k-Class Estimators When the Degree of Overidentifiability is Large Compared with the Sample Size," *Econometrica*, Vol. 51(1983), pp. 821-841.

［18］ ──, "Properties of Simultaneous Equation Estimators in the Econometric Model," *Journal of the Japan Statistical Society*, Vol. 15, No. 1(1985), pp. 46-61.

［19］ ──, "Modified Three Stage and Two Stage Least Squares Estimators Which are Third Order Efficient," mimeographed,(1987).

［20］ Rothenberg, T., "Identification in Parametric Models," *Econometrica*, Vol. 39(1977), pp. 575-592.

［21］ Sargan, D., "Identification and Lack of Identification," *Econometrica*, Vol. 51(1983), pp. 1605-1933.

［22］ Takeuchi, K., and Morimune, K., "Third-Order Efficiency of the Extended Maximum Likelihood Estimators in a Simultaneous Equation System," *Econometrica*, Vol. 53(1985), pp. 177-200.

［23］「統計学辞典」東洋経済新報社，1989.