

---

刈 屋 武 昭

『多変量一般線形モデルにおける検定論』

Takeaki Kariya, *Testing in the Multivariate General Linear Model*, Tokyo: Kinokuniya, 1985, iv + 246 pp.

---

この本は、一般多変量分散分析(MANOVA)モデル、および、拡張 MANOVA モデルにおける検定論に関する研究書である。本書の内容を紹介する前に、GMANOVA モデルとその関連モデルについて簡単に説明する。ここで云う GMANOVA モデルとは、Potthoff & Roy [*Biometrika*(1964)]によって導入されたモデルのこと

であって、観測行列  $Y$  が

$$(1) \quad Y = X_1 B X_2 + E, E \sim N(O, I \otimes \Sigma)$$

なる構造をもつモデルのことである。このモデルが、成長曲線データに適用されることから、成長曲線モデルとも呼ばれる。このモデルでの仮説検定問題

$$(2) \quad H: X_3 B X_4 = X_0 \text{ vs } K: X_3 B X_4 \neq X_0$$

( $X_0, X_3, X_4$  は概知行列) を GMANOVA 問題と云う。(1), (2) において,  $X_2 = I, X_4 = I$  である場合は通常の MANOVA 問題, あるいは, 多変量回帰問題であって, これについては多くの研究者によって研究されている。 $X_3, X_4$  があることによって, 種々の興味ある適用が可能になり, また, 理論面においても MANOVA にあらわれない特有な問題が, 提起される。モデル(1)は観測行列  $Y$  を適当に並べかえて, ベクトル表示すると,

$$(3) \quad y = X\beta + e, e \sim N(O, \Omega)$$

と表わせる。ここに,  $X = X_1 \otimes X_2, \Omega = I_n \otimes \Sigma, \beta$  は  $B$  を適当にベクトル表示したものである。従って, GMANOVA モデルは, 通常の一般線形モデルの特別なものとみなせる。(3)において, 通常最小二乗推定量(OLSE)と, 一般最小二乗推定量(GLSE)が同じものである条件は,  $\Omega$  が Rao の分散構造

$$(4) \quad H: \Sigma = X_2' \Gamma X_2 + \tilde{X}_2 \Delta \tilde{X}_2' / (X_2' \tilde{X}_2 = O)$$

をみたすことである。ここに,  $\Gamma, \Delta$  は正定値行列である。経済データに適用される SUR (Seemingly Unrelated Regression) モデルは, 一般には GMANOVA モデルとしては表わせない。しかし, モデル(1)において  $B$  が先験情報

$$P_i B Q_i = R_i \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

をもつモデルとして表わされ, このモデルを拡張 GMANOVA モデルと呼んでいる。この拡張モデルにおける検定問題(2)を拡張 GMANOVA 問題と呼ぶ。

本書で扱われている検定問題は,

- (I) GMANOVA 問題
- (II) 拡張 GMANOVA 問題
- (III) GMANOVA モデルにおける Rao の分散構造の検定
- (IV) SUR モデルにおける独立性の検定

である。その他, これらの検定問題と本質的に同じものである, 共変量がある場合の平均に関する検定, 不完全データにもとづく検定,  $\Sigma$  がある種の構造をもつ場合の検定問題についても言及されている。一般に, MANOVA 問題でも, 一様最強力不変(UMPI)検定が存在しないので, 当然のことながら, これらの検定問題についても UMPI 検定は望めない。従って, なんらかの最適性

をもつ検定を探すことになるが, 本書では不変性原理にもとづいて, 各種検定問題に対して, 局所最良不変(LBI)検定を与えることを, 目的としている。以下, 各章毎に内容を紹介する。

第1章 GMANOVA および拡張 GMANOVA モデルにおける検定問題。GMANOVA, および, 拡張 GMANOVA モデルを, いくつかの具体的例を通して説明している。特に, SUR モデル, 共変量がある場合の平均の検定等は, 拡張 GMANOVA 問題の特別なものになっている。OLSE と GLSE との選択に関する問題も, 論じられている。この1つの選択法として, Rao の分散構造の検定問題を提起している。

第2章 不変性原理にもとづく検定。ネイマン・ピアソンの基本定理, 不変性検定の基礎について説明したのち, 検定問題を不変にする最大な群の決定, および, 不変性を利用した最大不変量の分布の導出法が, 論じられている。さらに, 検定の最適性に関連して, LBI 検定の導出法, 局所ミニマックス性, 検出力の単調性, 許容性, ロバストネス性等が説明されている。以下の章では, 本書で取り扱われる検定問題に対して, これらの最適性が調べられている。

第3章 GMANOVA 問題。最初に, この検定問題に対する標準形が与えられている。この検定問題は, 指数分布族における自然パラメータの検定問題とみた時, 線形仮説になっていなく, MANOVA 問題と異なっている。次に問題を不変にする群が導入されるが, この群に関する最大不変量は, 解析的に取り扱いやすいものになっていなく, この点も MANOVA 問題と異なる点である。この群の部分群の最大不変量として定まる4つの確率行列( $T_1, T_2, T_3, T_4$ )にもとづく不変検定を考えることになる。実際は, ( $T_1, T_2$ )にもとづく検定が本質的完備クラスになることが, 十分性にもとづく方法, および, 不変原理にもとづく方法によって説明されている。 $T_2$  はパラメータに依存しない統計量であって, 検定問題に対する補助統計量となっている。尤度比統計量は  $|I+T_1|$  にもとづくものであり, また, MANOVA の場合と類似の議論により, Hotelling 型, Pillai 型, Roy 型検定統計量が提案される。これらは, すべて  $T_1$  のみに依存する検定方式である。これらの検定方式は, MANOVA の場合には許容的であるが, GMANOVA の場合には許容的とはならない。確率行列  $T_2$  をどのように関係させれば, より良い検定が得られるかは, 興味ある問題である。本書では LBI 検定が,

$$\text{tr}(I+T_2)^{-1} [a_0 T_1 (I+T_1)^{-1} - I]$$

で与えられることが論じられる。この LBI 検定の局所ミニマックス性、不偏性、許容性についても論じられている。さらに、上記 LBI 検定統計量の仮説のもとでの分布、および、その分布の漸近展開を論じている。この章は本書の主要課題であって、本文の約 1/3 がこの章にあてられている。

第 4 章 拡張 GMANOVA 問題。係数行列  $(X_1, \dots, X_k, P_i, Q_i)$  が一般の場合の取り扱いが困難である。これらの係数行列がある種の仮定をみたしていると、GMANOVA 問題と類似の議論ができることを示している。共変量がある場合の 2 群の平均の均一性に関する検定は、この特別な場合として取り扱われる。不完全データがある場合の平均の検定問題は、拡張 GMANOVA 問題ともみなされ、これについては、UMPI 検定が得られることを示している。2 つの回帰式に関する SUR モデルにおいて、一方のみのパラメータに関する UMPI 検定が、UMPI 検定となるための条件も論じている。最後に、GMANOVA モデルにおいて  $\Sigma$  がイントラクラス構造、あるいは、Rao の構造をもつ場合の検定問題(2)を論じ、この問題が、MANOVA 問題に帰着されることを示している。この問題は、拡張 GMANOVA 問題とは異なるものであるが、議論が類似しているため、この章で扱われている。

第 5 章 GMANOVA モデルにおける独立性の検定。GMANOVA モデルにおける Rao の分散構造の検定問題は、ある種の不完全データに基づく独立性の検定問題ともみなされることを示している。後者の問題を若干一般化し、そのモデルのもとでの LBI 検定の導出を論じている。LBI 検定の局所ミニマックス性、および、その仮説のもとでの分布の漸近展開の導出についても、解説されている。

第 6 章 2 つの方程式にもとづく SUR モデルにおける独立性の検定。この検定問題に対しては、片側、両側検討が扱われている。それぞれについて、LBI 検定が導出され、その仮説のもとでの分布、および、その分布の漸近展開が与えられている。

以上が内容の概略である。LBI 検定の導出に関する結果等の本書の多くの結果は、著者自身、あるいは、著者との共同研究者によって得られたものである。GMANOVA 問題をこのように詳しく論じた本は、著者による本『回帰分析の理論』がある程度である。この本と若干重なる部分があるが、本書では、より最新の結果が取り入れられている。本書に関する、2, 3 の印象を述べる。1 つは、GMANOVA 問題が通常の MANOVA 問題にな

い興味ある問題を理論、応用の両面において供えていることが、大変見通し良くまとめられていることである。これにより、GMANOVA 問題が検定論の発展に対して、興味ある研究材料になっていることが、理解されると思われる。第 2 の印象は、種々の検定問題が拡張 GMANOVA 問題として定式化され、お互いの検定問題との関係がより見通し良くなったことである。例えば、SUR における検定問題、共変性がある場合の平均の均一性の検定問題、不完全データの場合の検定問題、分散構造がある場合の GMANOVA 問題等は、個別に扱われているが、お互いに、深い関係があることがより明確になったと思われる。第 3 は、印象というよりはむしろ本書の特長であるが、LBI 検定に中心がおかれていることである。個々の問題において、LBI 検定が、尤度比検定等の他の検定と検出力の上でどのようなものになっているかは、今後の課題である。

本書は、GMANOVA 問題、および、その関連問題の理論的研究を進める上において、大変有益な参考書である。さらに、本書により、GMANOVA モデルに関する関心が理論・応用の両面において広がり、かつその関心がより強固なものになることが期待される。なお、推定、予測等の問題については、本書ではふれられていないが、これについては例えば、*Handbook of Statistics, Vol 1, Analysis of Variance* (P. R. Krishnaiah, ed.) を参照されたい。

〔藤越康祝〕