最近の経済時系列分析の二書に寄せて

──杉原左右一著『時系列の統計的研究』と青木正直著『時系列解析と日本経済』のコメントと「為替レート・ランダムウォーク仮説」──

刈　屋　武　昭

§1　序

本稿は，主として経済時系列の理論とその分析という視点から

(1)　杉原左右一著『時系列の統計的研究』東洋経済新報社(1984年1月)

(2)　青木正直著『時系列解析と日本経済──システム論的接近──』東洋経済新報社(1984年3月)

の2書についてコメントし，青木(2)の為替レートの分析に関係してランダムウォーク仮説の検定問題を考察する。ここで経済時系列の理論とは，経済データの生成過程を記述もしくは近似する理論である。「経済」時系列分析を主眼として書かれた和書は，溝口・浜田(1969)以来，溝口・刈屋(1983)迄ほとんどない。その間，定常過程理論とその統計的推定論を論じた中塚(1978)，藤井(1974)等の数学的もしくは工学的発想に基づく研究・解説書がある。このように経済時系列が影をひそめていた背景として，次の点が指摘されよう。ケインズ経済学とその実証分析の方法としての計量経済学が，オイルショックまで経済現象を把握する理論であり分析するトールである，という基本的認識が優勢であったという点である。もちろんマネタリスト的な長期的均衡理論からのクリティカルな批判もあった。しかし実際に解析的な批判を可能ならしめたのが合理的期待形成の概念であり，その概念を用いてケインズ的経済政策の非有効性を論理的に証明しようとしたのが Lucas, Sargent, Wallace 等による新しい古典派均衡論者であった。そこでの解析的道具が時系列理論(主として定常過程論)であり，それは合理的期待形成論ばかりかショックによる均衡からの乖離の伝播(propagation)の記述と自然率仮説を確率的に表現する上できわめて自然かつ便利な方法であった。他方，オイルショックを前後にしてケインズ的計量モデルの予測能力への疑問から，経済構造をブラックボックス的に把握する時系列分析の統計的手法が再び脚光をあびるようになった。計量モデル分析と時系列分析との関係についての評者の見方は刈屋[1]をみよ。他方工学の方面で自己回帰和分移動平均(ARIMA)モデルによる分析法が，ボックス・ジェンキンス等の貢献によって，発展していたことも見逃せない。これらの事情が経済学の分野で時系列理論とその統計的分析手法を1970年代を通して発展させ，海外で多くの成書を生んだ。杉原(1)(その前身として杉原(1982))，青木(2)等がその日本版ともいえよう。杉原(1)は1変量および多変量 ARIMA モデルについて理論的な解説をし，青木(2)はシステム理論的発想から時系列理論を眺め，経済学と経済データへの応用を解説している。

§2　杉原(1)について

杉原(1)は，そのタイトルに「経済」の言葉がないもののその「はしがき」で“特に経済時系列データの統計的分析について考察する”と，経済時系列分析の視点からの書であることが述べられている。しかしその内容は，1変量・多変量定常 ARIMA モデルについての理論とその統計理論が中心である。内容は次の通り。

第1章　1変量 ARMA 過程とその諸性質
第2章　多変量 ARMA 過程とその諸性質
第3章　ARMA 過程の種々の表現とその諸性質
第4章　1変量 ARMA 過程の未知母数の統計的推定
第5章　多変量 ARMA 過程の未知母数の統計的推定
第6章　統計的モデル分析
第7章　外生的入力のあるモデルの統計的推定

このうち第3章の後半で Granger による因果関係の理論を簡単に論じ，第6章では経済データへの応用例を示している。その他の部分は数学的統計的理論の解説であり，その意味では必ずしも「はしがき」で強調されていることが実現されていないように思われる。具体的には，まず第1・2章と第3章前半で，1変量と多変量の定常 ARIMA モデルの理論を時間領域と周波数領域の両方面から要約的に解説する。とくに多変量 ARIMA モデルについて解説した和書が少ないだけに貴重であろう。しかし多くの部分は証明を省略した理論のレジメ的解説であるため，時系列理論を学んだ大学院生および研究者の

レファランスブックとして便利である。1変量モデルでは，フィルタの性質についてコンパクトにまとめている。第4章と第5章では1変量と多変量ARIMAモデルの統計的推定法を解説している。そこでは最尤法的発想に基づき，Newton-Raphson法，Scoring法，Gauss-Newton法についてその計算方法を中心に議論している。この2つの章は著者が力を入れている部分のように思われ，その詳細な導出計算の証明はこの領域に携わる者にとって有用であろう。第6章の前半では，モデル選択の方法として尤度比検定，AIC等を簡単に触れたあと，卸売商業販売額指数データと小売業指数データの解析をする。そこでは対数変換後のデータに季節変動を考慮した1変量ARIMAモデルをフィットし予測している。さらに売上高と広告費に2変量ARIMAモデルをフィットし，因果関係にも若干ふれている。因果の実証分析としては結果がはっきりしないという結論であり，この点もう少しつっこんだ分析が望まれるであろう。第7章では回帰分析的状況のモデル

$$\sum_{i=0}^{p}\beta_i y_{t-i}=\sum_{j=0}^{q}\gamma_j x_{t-j}+w_t$$

で，w_t がARMAモデルに従うときの推定問題を第4章と同様の視点から論じている。

全体をとうしてこの分野の最近の理論的結果を各所にとり入れている点と，豊富な参考文献を掲載している点を指摘しておきたい。

§3　青木(2)について

本書は，その「まえがき」で"できるだけシステム関係の知識を前提にせず，経済モデルや景気変動に興味をもたれる経済学研究者，大学院生の方々に取り組みやすいように執筆した，"と述べている。実際本書は，大学院生以上を対象とした確率線型システム論についての解説と経済データへの応用が中心となっている。その章だては次のとうり。

第1章　状態ベクトル
第2章　線型定係数システム
第3章　時系列の表現法
第4章　ARMAと状態空間モデル
第5章　データ処理・加工について
第6章　時系列の予報
第7章　共分散行列とスペクトル
第8章　システム行列の推定
第9章　イノベーション過程
第10章　最適化による時系列
第11章　合理的期待モデルの時系列
第12章　日本経済時系列の数値解析例
付録　時系列解析の数学的基礎

システム論で扱う標準的な確率定係数線型モデルは

$$(3.1)\quad \begin{cases} x_{t+1}=Ax_t+Bu_t & \text{（状態方程式）} \\ y_t=Cx_t+Du_t & \text{（データの方程式）} \end{cases}$$

と表現される。本書もこの状態空間モデルを中心に時系列解析との関係をシステム論的に解析する。そのため第1章から第4章までは，状態空間モデルとARMAモデルの考え方とその関係を解説し，(3.1)式の研究が多変量ARMAモデルの研究を含んでいることを示す。第5章では経済時系列データを定常化するための方法を簡単にふれ，それとの関連で相対変動の考え方から対数線型モデルに意味づけを与えている。第6章から第9章では，モデル(3.1)に関する一般的な諸性質を解説する。第6章では(3.1)の伝達関数と座標変換を，第7章ではスペクトル密度を，第8章では x_t と y_t の分散行列とパラメータの関係と座標変換による内部均衡モデルを，第9章では直交射影によって変数を無相関化する問題をそれぞれ扱っている。第10章ではLong-Plosser(1983)の論文を紹介し，2次形式評価関数を線型定差方程式のもとで最小化する2次形レギュレータ問題を解説する。LQ問題をダイナミックプログラミングを用いて解く方法と感度解析を扱っている。第11章では最初に合理的期待モデル

$$y_t=ay_{t+1|t}+u_t,\quad y_{t+1|t}=E[y_{t+1}|I_t]$$

の解法を，(1) u_t が MA(q) モデルに従うとき，(2) AR(p) モデルに従うとき，(3) ARMA(p,q) モデルに従うとき，について解説する。応用例として，簡単なマクロ経済モデルに適用した例と，情報が不均等な場合外乱がホワイトノイズでも景気循環などのように相関のある内生変数が発生しうることを示す例がある。各所でGourieroux et al.(1979)とFuita(1979)が引用されているが，共に未発表であり評者は十分フォローできなかった。後半ではAoki-Canzoneri(1979)に基づいてモデル

$$y_t=Ay_{t-1}+B_1y_{t|t-1}+\cdots\cdots+B_py_{t|t-p}+Cx_t+u_t$$

の解法を解説する。ここでは状態空間モデル(3.1)との対応も考慮されている。

第12章は本書のタイトルの「日本経済」の部分に対応する部分と考えられる。前半で扱っている日別為替レートの分析例については次節で述べる。後半ではOritani(1979)の結果を変形し，実質GNP Y_t と貨幣量($=M_2$) X_t(1956年Ⅰ～1976年Ⅲの四半期データ)に対して

$$x_t=(\log X_t-\log X_{t-1})\times 100$$
$$y_t=(\log Y_t-\log Y_{t-1})\times 100$$

が平均0の2次元定常 ARMA モデルに従うと仮定して，インパルス応答を求める。その結果，貨幣量のイノベーションがあまり y_t に影響を与えないこと，また y_t の時 t 点でのイノベーションの撹乱は，約四半期後にピークに達することを実証している。次に，y_t として鉱工業生産指数(KO)，円ドル為替レート(EX)，コールレート(CL)，$M_2+CD(M)$，卸売物価指数(WPI)の5つの月次時系列を多変量定常 AR(2) モデルを用いて分析する。KO, M, WPI は対数の第1階差をとった変数と同等の形を用いている(以下 $dLKO$ 等で示す)。その結果，モデルは逐次形となり，コールレート，$dLKO$, $dLWPI$ の3次元モデルが独立に決定され，次に dLK と EX の2次元のモデルの動きが決定されることを示している。インパルス応答も吟味している。さらに後半では，上述の5次元データに対して第8章の手法を用いて状態空間モデルを作成している。そしてそのモデルの動特性等を吟味している。

数学符録では，ハンケル行列等の性質や最大原理等がコンパクトに要約されている。

以上が概略である。各章が短く読みやすい形になっているが，内容としてはシステム分析の考え方や最適制御論の基礎を学んだ大学院生研究者が，システム理論とその経済学への応用の仕方を全体として眺望するのに適している，と判断される。その意味では先に引用した著者の「まえがき」の“できるだけシステム関係の知識を前提にせず，……”の部分は，若干留保が必要であると思われる。これは，1つには日本の大学院生が早期において専門化し，種々の分野の入門的知識もあまり装備していない，ということにも起因している。他方，著者は「まえがき」でさらに“システム分野でのベクトル時系列に関する最近の発展の成果を明らかにし，または注釈者の役割をここで果した……”と述べているが，まさにこの本の内容は，この部分に的確に表現されている，と思われる。

次にタイトルの「時系列解析」と副題の「システム論的接近」の関係が，評者としては内容的バランスからみると逆であると考える。この点について議論してみよう。

システムモデル(3.1)が経済学計量経済学と関係するのは幅広く，本書も次の3つの関係からそれを論じている。第1は，多変量 ARMA モデルが(3.1)式の特別な場合であること，第2は経済主体の最適化行動の問題がしばしば LQ 問題の特別な場合であること，第3は合理的期待形成を含むモデルがしばしば状態空間モデル(3.1)の形をとること，である。他方，カルマンは同時方程式計量モデルも(3.1)の中に埋めこむことができることを主張している。しかし形式的一般性の発想が，その一般性の中に包含される個別特殊領域に対して優位性を主張するためには，その発想に基づく分析が何らかの意味でその特殊領域に対して貢献しうることが必要となろう。たとえば，工学的時系列モデルが経済学的時系列モデルと形式的には同等であったとしても，それぞれの領域の特殊性に基づくモデルに対する考え方とそれによる接近の仕方の差というものが，その領域間に1つの垣根を作るのは，モデルが現実的現象との関係の中で意味をもつという実証科学分析の視点からはきわめて自然であろう。その意味で上記第1のシステム論的接近による時系列解析が，経済時系列解析に対してどのようなメリットをもちうるか，という疑問が残ろう。たとえば1次元 MA モデルが(3.1)の形に表現(一意的でない)されても，そこにおける係数のもつ意味は，経済データに対してはシステム論的(状態空間的)見方に必ずしも対応しないよう思われる。また表現が必ずしも一意的でないことと関係して計算上のメリットもこれまでの統計パケージをしのぐものがないように思われる。もちろん第2，第3の点については，システム論的発想が，より積極的に経済理論分析にコミットできよう。しかしその場合でも，その形式的一般性によってではなく，その発想に基づく実際の分析が重要となろう。

§4　為替レートのランダムウォーク仮説検定

青木(2)第12章前半では，日別の円ドル為替レートが非定常であることを分散の不均一性から示し，さらに Fuller (1976) の検定方式に基づいてランダムウォーク仮説を検定し，その仮説が否定されないことを示している。この結果は，溝口・刈屋(1983)の月別為替レートのランダムウォーク仮説の検証結果を支持するものであるが，ここでは積極的に検定方式を採用している点が注目される。まず4つのモデルを議論したあと，そのうちの1つ

(4.1)　　$E_t=\rho E_{t-1}+N_t$

ただし E_t: 日別直物円ドル為替レート，N_t: 誤差項，において，仮説検定問題

$$H:\rho=1 \quad \text{vs.} \quad K:\rho<1$$

を考察する。1979年1月から1982年10月までの1,000個のデータを用いており，最初に1979年1月から同年9月までと1981年8月から1982年4月までの2つの期間で分散が均一的でないことを観察する。そして Fuller (1976) の検定統計量

$$\hat{\tau}=(\hat{\rho}-1)\Big/\left[s^2\left(\sum_{2}^{T} E_{t-1}{}^2\right)^{-1}\right]^{1/2}$$

$$\hat{\rho}=\sum_{2}^{T} E_t E_{t-1} \Big/ \sum_{2}^{T} E_{t-1}{}^2$$

$$s^2=\sum_{2}^{T} (E_t-\hat{\rho}E_{t-1})^2/(T-2)$$

を用い，$T=100, 125, 150, \cdots, 1000$ に対して $\hat{\rho}, s^2, \hat{\tau}$ を計算する。その結果 s^2 は T とともにかなり変化するが，$\hat{\rho}$ は小数第4位を四捨五入するとすべて 0.999 という1に近い値をとり，また $\hat{\tau}$ は Fuller の数表に基づくと $T=650, 675, 725$ の時を除いてすべて5%の有意水準のもとで仮説 $H: \rho=1$ が採択される。さらに誤差項 N_t のホワイトノイズ性を分散の均一性を意識して区間を分けてチェックしている。この結果から全体として，日別為替レートの変動がランダムウォーク的変動であることを強く示していると判断できよう。

他方，刈屋・溝口(1983)では月別平均為替レートがランダムウォーク的変動をしている，と主張している。そこで問題となるのは，もし日別為替レートがランダムウォークに従う場合，月別平均為替レートがランダムウォークに従うことができるか，という点である。この問題を理論的に取り扱うために，与えられた日別レート $\{E_t: t=1, 2, \cdots\cdots, T\}$ に対して，各月を30日と単純化し(逆に30日を理論月としてその平均為替レートの変動を考えればよい)，$(E_1, \cdots, E_{30})$ を第1月，$(E_{31}, \cdots, E_{60})$ を第2月，……というように30日きざみで $\{E_t\}$ を分割する。従って第 j 月のデータは

$$\{E_{30(j-1)+i} | i=1, \cdots, 30\}$$

となり，その平均レート

$$e^j=\sum_{i=1}^{30} E_{30(j-1)+i}/30 \qquad (4.2)$$

で与えられる。このとき e^j の変動は次の定理で与えられる。

定理　系列 $\{E_t\}$ がランダムウォーク(4.1)(N_t はホワイトノイズ)に従うとき，その30日平均(4.2)の系列 $\{e^j\}$ は

$$e^{j+1}=e^j+u^{j+1} \qquad (4.3)$$

$$u^j=\sum_{i=1}^{60} w_i N_{30(j-1)+i} \qquad (4.4)$$

$$w_i=\begin{cases} (i-1)/30 & (i=1, 2, \cdots, 30) \\ (61-i)/30 & (i=31, \cdots, 60) \end{cases}$$

と表現される。したがって u^j と u^{j+k} の相関係数は

$$\mathrm{Correl}(u^j, u^{j+k})=\begin{cases} 0.253668 & k=1 \\ 0 & k\geq 2 \end{cases} \qquad (4.5)$$

となる。もし N_t が正規ホワイトノイズであれば，(4.3)の u^j は MA(1) モデル

$$u^{j+1}=0.253668\, v^j+v^{j+1}, \qquad (4.6)$$

$\{v^j\}$ はホワイトノイズ系列，に従う。

証明　(4.1)と(4.2)の関係を用いて

$$30\, e^{j+1}=E_{30j}+\cdots+E_{30(j+1)-1}+N_{30j+1}+\cdots+N_{30(j+1)}$$

$$30\, e^j=E_{30(j-1)}+\cdots+E_{30j-1}+N_{30(j-1)+1}+\cdots+N_{30j}$$

と書き，辺々差引き

$$E_{30j+k}-E_{30(j-1)+k}=\sum_{i=1}^{30} N_{30(j-1)+k+i}$$

$(k=0, \cdots, 29)$ を用いると(4.3)(4.4)を得る。ここで $\mathrm{Cov}(u^j, u^{j+1})=4495\sigma^2/30^2$, $\mathrm{Var}(u^j)=\mathrm{Var}(u^{j+k})=16820\,\sigma^2/30^2$ より(4.5)を得る。

この定理は，日別レート $\{E_t\}$ が正規ランダムウォーク(ARIMA(0, 1, 0))モデルに従うと仮定したとき，月別平均レートは ARIMA(0, 1, 1)≡IMA(1, 1) モデル(4.3)(4.6)に従うこととなり，ランダムウォークでないことを示している。しかし e^{j+1} と e^j の階差が誤差項 u^{j+1} のみとなり，u^{j+1} は(4.6)の MA(1) モデルに従い，その自己相関係数が 0.25 と大きくないため，その変動はかなりランダムウォーク的変動に近いことになる。とくに有限標本での検定では，月別レートがランダムウォークという仮説が採択されることとなろう。したがって，青木(2)の採択された仮説「日別為替レートがランダムウォーク」が真であるとしても，溝口・刈屋(1983)の「月別平均為替レートがランダムウォーク」という検証結果とそれほど矛盾しない。加えて溝口・刈屋(1983)の「ランダムウォークモデルが，3ヵ月間よりも6ヵ月間の方が他の AR モデルと比べて予測能力が高い」という結果は，定理の「$\{e^{j+1}\}$ が(4.3)(4.6)の IMA(1, 1) モデルに従う」という主張に対応していることを示唆している。

(一橋大学経済研究所)

参考文献

［1］ 刈屋武昭(1984)「書評『計量経済の新展開』」『経済学論集』10月 94–96。

［2］ 杉原左右一(1982)『経済時系列の研究』啓文社。

［3］ 中塚利直(1978)『時系列解析の数学的基礎』教育出版。

［4］ 藤井光昭(1974)『時系列解析』コロナ社。

［5］ 溝口敏行・浜田宗雄(1969)『経済時系列の分析』勁草書房。

［6］ 溝口敏行・刈屋武昭(1983)『経済時系列分析入門』日本経済新聞社。

［7］ 翁邦雄(1984)「外国為替市場におけるバブルの実証分析」『金融研究』3巻4号。

その他の文献は杉原(1)，青木(2)をみよ。