最適計画化の集計－分計調整プロセス＊

久保庭　真　彰

1. はじめに

筆者は，本誌に掲載された論文［14］において，主として斉合的調整プロセスとしての2－レベル集計－分計調整プロセス（stepwise aggregation and disaggregation process）の検討を行なった。本稿では，その延長線上において，最適調整プロセスとしての2－レベル集計－分計調整プロセスを構築することを試みる。本論に入る前に，筆者の問題意識を簡単に再述しておくことにする。

国民経済計画の編成過程の記述的ないし規範的分析のためにデザインされた，計画当局と生産諸単位とを参加主体とする計画調整プロセスは，次の2類型に大別しうる。すなわち

(1)　公定の固定価格体系を前提として，古典的な多数財バランス（レオンチェフ型投入産出方程式）を数量誘導的に解くための手続きを主体とする，物財バランスの《斉合的調整プロセス》；

(2)　伸縮的価格体系を想定しつつ，より拡張された物財バランス制約条件のもとでなんらかの国民経済的最適性基準（目的関数）を最小（最大）化するという問題を，価格誘導的および／あるいは数量誘導的に解決するための手続きを主題とする，最適物財バランスの《最適調整プロセス》。

これら2類型の計画プロセス論の最大の貢献は，国民経済計画問題＝《初期モデル》の次元の大規模性を明瞭に認識した場合，その大規模性に対しては初期問題の分割とその逐次解決によって対処することが有効だということを示したことにある。しかし，オーソドックスな計画プロセス論は，2つの難点，すなわち，①変量，パラメータの集計の無視；②収束速度ののろさ，を共有している。こうした難点を解決するには，計画当局と生産諸単位とがそれぞれマクロ集計量とミクロ分計量とを処理し，同時に調整速度をも加速するように調整プロセスをデザインしなければならない1)。集計－分計調整プロセス論の主題は，こうした調整プロセスの可能性の研究だといえよう2)。本稿は，初期モデルが1次同次性を仮定した凸計画問題の場合について，この研究を行なう。本論文は，以下のように編集されている。

まず，第2節は，線型計画（LP）のケースを特殊ケースとして含む初期モデルを提示する。次に，第3節で，最適計画化の集計－分計調整プロセスを定式化し，第4節はこのプロセスの有効性に関する諸命題を定式化する。第5節はドゥートキン（Дудкин）等（［2］，［5］，［13］）の議論と比較吟味する。第6節は，理論的命題と主張の妥当性をシミュレーションによって検証する。終節は，若干の結語を述べる。

2. 初期モデル

初期モデル（国民経済計画問題）は，代替的生産方法・稀少資源ストック・結合生産の存在をすべて容認し，線型計画（LP）問題を特殊ケースとし

＊　この論文は，昭和59年度文部省科学研究費（奨励研究A）による研究の一部である。本稿の計算作業について松江由美子講師（帝京大）の補助を受けた。ここに記して感謝する。

1)　古典的な aggregation problem と集計－分計調整プロセスの研究とは位相を異にする。後者は，あくまでミクロ変量の最適値をうるために，集計化を行なうからである。

2)　本稿と異なった枠組みのもとで集計－分計調整プロセスを樹立しようと試みている文献に Hare［9］がある。しかし，そこでは収束速度は度外視されている上，ミクロの変量の最適値も確定しえない。なお，計画プロセスへの集計化の導入の必要性は，Koopmans や Malinvaud の古典的論文（［10］，［12］）においても示唆されている。

て包含するあるクラスの非線型計画(NLP)問題によって記述される。

まず，当該経済システムにおいて識別可能な諸量のインデックスとその集合とを次のように定める。

$s \in S$: 財(生産物，資源ストック)の番号とその集合，

$k \in K$: ミクロ変量(活動水準)の番号とその集合，

$j \in J$: 生産単位(セクター)の番号とその集合，

$k \in K_j$: j 生産単位に属するミクロ変量の番号とその集合。

S, K, J, K_j について次の約束を設けておく。

$|K| \geqq |S|$ (ミクロ変量数≧財数),

$|K| \geqq |J|$ (ミクロ変量数≧生産単位数),

$|K| = \sum_{j \in J} |K_j|$ (ミクロ変量数＝生産単位別ミクロ変量数総和)。

次に，j セクターの生産活動(アクティヴィティ)は，ベクトル

$$((f_{sj}(\boldsymbol{x}_j) \mid s \in S), -c_j(\boldsymbol{x}_j))', j \in J$$

によって表現できるものとする(プライム $'$ は転置操作を表わす)。ここに

$\boldsymbol{x}_j$: j セクターの活動水準ベクトル($|K_j|$ 次元列ベクトル)；$\boldsymbol{x}_j := (x_k \mid k \in K_j)'$,

$f_{sj}(\boldsymbol{x}_j)$: j セクターによる s 資源の純産出量；正なら産出量，負のとき投入量(C^2 級凹関数；$f_{sj}(\boldsymbol{0}) = 0$),

$c_j(\boldsymbol{x}_j)$: j セクターの労働支出量(C^2 級凸関数；$c_j(\boldsymbol{0}) = 0$)。

さらに，s 資源の最終需要量マイナス初期存在量を $y_s (s \in S)$ と記し，それを制約定数とみなすことにする。

以上の準備のもとに，ノヴォジロフ型労働支出最小化問題として初期モデルを叙述する(簡単のために，一般性を失うことなく，制約条件を等式系とする)。

《初期モデル》

$$\text{(NLP)} \quad \left\| \begin{array}{l} \min \sum_{j \in J} c_j(\boldsymbol{x}_j) \\ \sum_{j \in J} f_{sj}(\boldsymbol{x}_j) = y_s, \quad s \in S \\ \boldsymbol{x}_j \geqq \boldsymbol{0}, \quad j \in J. \end{array} \right.$$

この問題のラグランジュアンの非負鞍点を構成する，最適計画と最適価格の組を $[\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*]$ と記すことにする。ここに

$$\boldsymbol{x}^* := (x_k^* \mid k \in K)', \boldsymbol{p}^* := (p_s^* \mid s \in S)'$$

と定義されている。

本稿全体を通じて，初期モデルを次の仮定のもとにおく[3)]。

(A1) 1次同次性：任意のスカラー $z_j \geqq 0$ に対して

$$\begin{aligned} f_{sj}(z_j \boldsymbol{x}_j) &= z_j f_{sj}(\boldsymbol{x}_j), \quad s \in S; \ j \in J, \\ c_j(z_j \boldsymbol{x}_j) &= z_j c_j(\boldsymbol{x}_j), \quad j \in J. \end{aligned} \tag{2.1}$$

1次同次性を仮定すると $f_{sj}(\boldsymbol{x}_j), c_j(\boldsymbol{x}_j)$ $(s \in S; j \in J)$ は，Euler の定理を用いることによって

$$\begin{aligned} f_{sj}(\boldsymbol{x}_j) &= \sum_{k \in K_j} a_{sk} x_k; \ a_{sk} := \partial f_{sj}(\boldsymbol{x}_j) / \partial x_k \\ c_j(\boldsymbol{x}_j) &= \sum_{k \in K_j} c_k x_k; \ c_k := \partial c_j(\boldsymbol{x}_j) / \partial x_k \end{aligned} \tag{2.2}$$

と表現できる。したがって，初期モデル(NLP)は線型計画問題と同一形式に書ける。すなわち

$$\text{(NLP}'\text{; LP)} \quad \left\| \begin{array}{l} \min \sum_{k \in K} c_k x_k \\ \sum_{k \in K} a_{sk} x_k = y_s, \quad s \in S \\ x_k \geqq 0, \quad k \in K. \end{array} \right.$$

各 j について，$a_{sk}, c_k (k \in K_j)$ が $\boldsymbol{x}_j$ に依存することなく常にある定数に等しい場合，初期モデル(NLP)，(NLP$'$)は内容上も線型計画問題(LP)となることはいうまでもないだろう。

さらに，1次同次関数の1階の偏導関数は0次同次となり，各変数を θ 倍してもその値は変化しないという事実に留意すべきであろう。すなわち，仮定(A1)のもとでは，任意のスカラー $\theta_j \geqq 0$ に対して

$$a_{sk}(\theta_j \boldsymbol{x}_j) = a_{sk}(\boldsymbol{x}_j) \tag{2.3}$$

が成立する。ここで，(2.2)式と(2.3)式は，本稿の第4節において有効に利用されることに注意を喚起しておきたい。

3. 最適計画化の集計－分計調整プロセス

初期モデルを解くための伝統的な分権的最適計

3) ヴァフチンスキー(Вахутинский)[2]は，この仮定なしに凸計画問題解法の集計－分計調整プロセスを論じている。しかし，いくつかの誤植をクリアーした上でも，彼の初期モデル，調整プロセスに関する議論は理解に苦しむ。

画プロセスは，分計的なミクロ変量から成る中央問題と，同じく分計的なミクロ変量から成るセクター問題との逐次的な反復・結合によって編成されていた。ここで取上げる2－レベル集計－分計調整プロセスは，集計的な《マクロモデル》と分計的な《ミクロモデル》の双方を逐次的に反復・結合することから成り立つ，短期計画編成の最適調整プロセスである。本稿では，制約量の集計化を捨象し，ミクロ変量の集計化のみを含むプロセスに限定して考察をすすめる。

経済的情報の初期保有構造については，①計画当局は分計的な財の最終需要量 $y_s(s\in S)$ に関する正確な情報をもち；②各 j セクターは自己の生産に関連する生産技術情報，すなわち $f_{sj}(\boldsymbol{x}_j)$，$c_j(\boldsymbol{x}_j)$ について完全な知識を有する，と仮定する。このとき，初期モデル(NLP)の解の近似を目的とする集計－分計調整プロセス($\mathscr{K}$ プロセス)の t ラウンドは，以下のように書き下すことができる[4)]。

$(t-1)$ ラウンドにおいて，各 j セクター $(j\in J)$ は，自主決定した活動水準 $\boldsymbol{x}_{j,t-1}$ と与えられた各財の価格 $p_{s,t-1}(s\in S)$ とにもとづき，各財の純需給量 $f_{sj,t-1}$ とセクター(超過)利潤 $\Pi_{j,t-1}$ とを計算し，それらを計画当局に既に伝達している。ここに

$$f_{sj,t-1}=f_{sj}(\boldsymbol{x}_{j,t-1}),\quad s\in S;\ j\in J, \tag{3.1}$$
$$\Pi_{j,t-1}=\sum_{s\in S}f_{sj}(\boldsymbol{x}_{j,t-1})P_{s,t-1}-c_j(\boldsymbol{x}_{j,t-1}),\quad j\in J.$$

以上のことを前提にすると，$\mathscr{K}$ プロセスの t ラウンドは以下の4つのステップによって構成される。

Step 1　計画当局は，次の利潤最大化《マクロモデル》を解き，その解である《マクロ均衡化乗数》$z_{jt}(j\in J)$ を各 j セクターに通達する。

(C)
$$\left|\begin{array}{l}\max\left\{\sum_{j\in J}\Pi_{j,t-1}z_j-\frac{1}{2}Q_0\sum_{s\in S}\left(y_s-\sum_{j\in J}f_{sj,t-1}z_j\right)^2\right\}\\ z_j\geqq 0,\quad j\in J.\end{array}\right.$$

ここで，Q_0 は正のプロセスパラメータである。

Step 2　各 j セクター $(j\in J)$ は，まず，次のセクター利潤最大化《ミクロモデル》を解く。

($\mathrm{L_j}$)
$$\left|\begin{array}{l}\max\left\{\sum_{s\in S}f_{sj}(\boldsymbol{x}_j)p_{s,t-1}-c_j(\boldsymbol{x}_j)\right.\\ \left.\quad-\frac{1}{2}Q\sum_{s\in S}\left(f_{sj}(\boldsymbol{x}_{j,t-1})z_j-f_{sj}(\boldsymbol{x}_j)\right)^2\right\}\\ \boldsymbol{x}_j\geqq 0.\end{array}\right.$$

ここで，Q は正のプロセスパラメータである。

各 j セクターは，この問題の解 $\boldsymbol{x}_{jt}$ をもとにして，(3.1)第1式によって，各財の純需給量 $f_{sjt}(s\in S)$ を計算し，これを計画当局に伝達する。ここに

$$f_{sjt}=f_{sj}(\boldsymbol{x}_{jt}). \tag{3.1$'$}$$

Step 3　計画当局は，需給法則にのっとって，生産物ならびに資源ストックの価格を改訂する。すなわち，α を正のプロセスパラメータとして

$$p_{st}=\max\left\{0,\,p_{s,t-1}+\alpha Q\left(y_s-\sum_{j\in J}f_{sjt}\right)\right\},\ s\in S. \tag{3.2}$$

そして，この改訂された価格体系 $\boldsymbol{p}_t=(p_{st}\,|\,s\in S)'$ を各 j 部門に伝達する。

Step 4　各 j セクター $(j\in J)$ は，自主決定した活動水準 $\boldsymbol{x}_{jt}$ と計画当局から通知された価格体系 $\boldsymbol{p}_t$ とにもとづき，セクター(超過)利潤 Π_{jt} を(3.1)第2式と同様にして計算し，それを計画当局に報告する。ここで

$$\Pi_{jt}=\sum_{s\in S}f_{sj}(\boldsymbol{x}_{jt})p_{st}-c_j(\boldsymbol{x}_{jt}),\ j\in J. \tag{3.1$''$}$$

以上の集計－分計調整プロセスは，分解原理(問題分割)，無制約最適化法(制約条件の目的関数へのたたきこみ)，勾配法(評価の需給法則による改訂法)などを利用することによって組み立てられているが，最大の特徴は次の点にある。すなわち，計画当局のマクロモデルの次元数が，$\boldsymbol{x}$ の次元数 $|K|$(ミクロ変量総数)ではなく，$\boldsymbol{z}\,(\boldsymbol{z}:=(z_j\,|\,j\in J)')$ の次元数 $|J|$(マクロ変量総数)にまで縮約されている，というのがそれである。初期モデルが線型計画問題の場合，ミクロ変量総数は当

4)　以下のプロセスは，ドゥートキンやヴァフチンスキー等の試み([2],[5],[13])に基礎をおいている。両者の根本的相違は，第5節で明らかにされる。

該経済システムに存在する生産方法の総数を意味するから，一般にセクター総数 $|J|$ はミクロ変量総数に比して相対的に十分小さい($|K|\gg|J|$)と考えられる。したがって，$\mathcal{K}$ プロセスでは，計画当局はミクロ変量すべてを中央最適化問題において処理しなければならないというケースと比較して，計画当局の情報処理負担が著しく軽減されているといえよう。なお，われわれは $\boldsymbol{z}$ をマクロ均衡化乗数と呼んでいるが，その意味は計画当局のマクロモデル(C)においてたたみこまれている制約条件をみればおのずと明らかであろう。

4. プロセスの諸特性

本節では，$\mathcal{K}$ プロセスの諸特性を検出する[5)]。まず，プロセスの最低限の有意性を示す次の命題を証明しておく。

(P1) $\mathcal{K}$ プロセスにおいて，仮定(A1)に加えて，次の仮定が成立しているものとする[6)]。

(A2) $\sum_{s\in S}(f_{sj}(\boldsymbol{x}_{jt}))^2>0,\ j\in J;\ t=0, 1, 2, \cdots.$

このとき，$\mathcal{K}$ プロセスの均衡解，すなわち定常点 $[\boldsymbol{x}^\dagger, \boldsymbol{p}^\dagger]$ は，初期モデル(NLP)の最適解 $[\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*]$ である。

証明：マクロモデル(C)とミクロモデル($\mathrm{L_j}$)に対する Kuhn-Tucker 条件は，Euler の定理に拠る(2.2)式を利用すると，それぞれ次のように書ける。

$$\boldsymbol{x}_{j,t-1}'(\boldsymbol{A}_{j,t-1}'\boldsymbol{p}_{t-1}-\boldsymbol{c}_{j,t-1}) -Q_0\boldsymbol{x}_{j,t-1}'\boldsymbol{A}_{j,t-1}'\left(\sum_{i\in J}\boldsymbol{A}_{i,t-1}\boldsymbol{x}_{i,t-1}z_{it}-\boldsymbol{y}\right)\leqq 0 \tag{4.1}$$

($z_{jt}>0$ のとき等号成立)，$j\in J$,

$$\boldsymbol{A}_{jt}'\boldsymbol{p}_{t-1}-\boldsymbol{c}_{jt}-Q\boldsymbol{A}_{j,t-1}'(\boldsymbol{A}_{jt}\boldsymbol{x}_{jt} -z_{jt}\boldsymbol{A}_{j,t-1}\boldsymbol{x}_{j,t-1})\leqq\boldsymbol{o} \tag{4.2}$$

($x_{kt}>0, k\in K_j$ のとき等号成立)，$j\in J$.

ここで

$$\boldsymbol{c}_j:=(c_k\,|\,k\in K_j)';\ c_k:=\partial c(\boldsymbol{x}_j)/\partial x_k$$
$$\boldsymbol{A}_j:=(a_{sk}\,|\,s\in S, k\in K_j);\ a_{sk}:=\partial f_{sj}(\boldsymbol{x}_j)/\partial x_k,$$
$$\boldsymbol{y}:=(y_s\,|\,s\in S)'.$$

均衡解の定義により

$$\boldsymbol{x}_{t-1}=\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{x}^\dagger;\ \boldsymbol{p}_{t-1}=\boldsymbol{p}_t=\boldsymbol{p}^\dagger;\ \boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{z}^\dagger$$
$$\boldsymbol{c}_{j,t-1}=\boldsymbol{c}_{jt}=\boldsymbol{c}_j^\dagger;\ \boldsymbol{A}_{j,t-1}=\boldsymbol{A}_{jt}=\boldsymbol{A}_j^\dagger\ (j\in J)$$

とおける(以下，均衡解のみを考えるから，ダガー † を省略する)。

定常点では，価格調整式(3.2)より，次式が成立する。

$$\sum_{j\in J}\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{y} \tag{4.3}$$

上式を利用しつつ，$\sum_{j\in J}(1-z_j)\times$(4.1)式を作成すると

$$\sum_{j\in J}(1-z_j)\boldsymbol{x}_j'(\boldsymbol{A}_j'\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}_j) +Q_0\sum_{j\in J}(1-z_j)^2\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{A}_j'\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}_j\leqq 0. \tag{4.4}$$

一方，$\sum_{j\in J}(1-z_j)\boldsymbol{x}_j'\times$(4.2)式を作ると

$$\sum_{j\in J}(1-z_j)\boldsymbol{x}_j'(\boldsymbol{A}_j'\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}_j) -Q\sum_{j\in J}(1-z_j)^2\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{A}_j'\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}_j=0. \tag{4.5}$$

(4.4)式から(4.5)式を辺々差引くと，$(Q_0+Q)>0$ ゆえ次式をうる。

$$\sum_{j\in J}(1-z_j)^2\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{A}_j'\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}_j\leqq 0. \tag{4.6}$$

仮定(A2)より，

$$\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{A}_j'\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}_j=\sum_{s\in S}f_{sj}{}^2>0.$$

したがって，(4.6)式を成立させるには

$$z_j=1,\ j\in J \tag{4.7}$$

でなければならない。このとき，(4.2)式は

$$\boldsymbol{A}_j'\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}_j\leqq\boldsymbol{o}\ (x_k>0, k\in K_j \text{ のとき等号成立}),\quad j\in J \tag{4.8}$$

となる。(4.3)，(4.8)両式の成立は，均衡解 $[\boldsymbol{x}^\dagger, \boldsymbol{p}^\dagger]$ が最適解 $[\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*]$ であるために十分である。証了■

次に，集計－分計調整プロセスとしての $\mathcal{K}$ プロセスの有する独自の性格を端的に物語る命題を提出する。簡単のために，次の仮定を設けておく。

(A3) 各セクターのミクロモデル($\mathrm{L_j}$)の解は，プロセスの各ラウンドにおいて一意である。

5) 命題(P1)，(P3)の証明のシナリオは，ドゥートキン・グループ([2], [5], [13])のそれに沿っている。

6) マクロモデルの解の一意性にこだわらなければ命題(P1)の成立のためにこの仮定も必要ではない。

(P2)　(A1)－(A3)を仮定する。このとき，セクター別初期計画がセクター別最適計画の一様な定数倍であり($\boldsymbol{x}_{j0}=\theta_j\boldsymbol{x}_j^*$; $\theta_j>0$; $j\in J$)，加えて初期価格が最適価格だとすれば($\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}^*$)，プロセス$\mathcal{K}$はマクロ均衡化乗数の作用によって最初のラウンドで収束する($\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}^*$)。

証明：まず，$\boldsymbol{x}_{j0}=\theta_j\boldsymbol{x}_j^*$ のとき1次同次性を仮定すると，(2.1)－(2.3)式より次の関係が成立する。

$$c_j(\theta_j\boldsymbol{x}_j^*)=\sum_{k\in K_j}\frac{\partial c_j(\theta\boldsymbol{x}_j^*)}{\partial x_k}\theta_j x_k^*$$
$$=\sum_{k\in K_j}\frac{\partial c_j(\boldsymbol{x}_j^*)}{\partial x_k}\theta_j x_k^*$$
$$=\theta_j\sum_{k\in K_j}c_k^*x_k^*,\quad j\in J.$$

同様にして

$$f_{sj}(\theta_j\boldsymbol{x}_j^*)=\theta_j\sum_{k\in K_j}a_{sk}^*x_k^*,\quad s\in S;\ j\in J.$$

したがって，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^*$ のとき

$$\theta_j\boldsymbol{x}_j^{*\prime}(\boldsymbol{A}_j^{*\prime}\boldsymbol{p}^*-\boldsymbol{c}_j^*)=0,\quad j\in J$$

が成立することに注意すると，マクロモデルのKuhn-Tucker条件式(4.1)は，先と同様の操作を施すことによって

$$\sum_{j\in J}(1-\theta_j z_j)^2\theta_j^2\boldsymbol{x}_j^{*\prime}\boldsymbol{A}_j^*\boldsymbol{x}_j^*\leqq 0 \qquad (4.8)$$

と書ける。上式より，仮定(A2)と $\theta_j>0$ $(j\in J)$ とを考慮すると

$$z_{j1}=1/\theta_j\,(j\in J) \qquad (4.9)$$

をうる。このとき，ミクロモデルのKuhn-Tucker条件式(4.2)より

$$\boldsymbol{x}_{j1}{}'\boldsymbol{A}_j^{*\prime}(\boldsymbol{A}_{j1}\boldsymbol{x}_{j1}-\theta_j^{-1}\boldsymbol{A}_j^*(\theta_j\boldsymbol{x}_j^*))=0,\quad j\in J. \qquad (4.10)$$

(4.10)式と仮定(A3)より

$$\boldsymbol{x}_{j1}=\boldsymbol{x}_j^*\,(j\in J);\ \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}^*.$$ 証了■

この命題は，簡単に確かめられるように，次の系の成立を含意している。

(P2′)　(A1)－(A3)を仮定すると

(i) あるラウンドにおいて，セクター別近似計画がセクター別最適計画の一様な定数倍で，近似価格が最適価格だとすれば($\boldsymbol{x}_{jt}=\theta_j\boldsymbol{x}_j^*$; $\theta_j>0$; $j\in J$)，$\mathcal{K}$プロセスはマクロ均衡化乗数の作用によってその次のラウンドにおいて収束する($\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}^*$)；

(ii) $\mathcal{K}$プロセスが最適解から出発するとき($\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{x}^*$; $\boldsymbol{p}_t=\boldsymbol{p}^*$)，プロセス最適解を与える($\boldsymbol{x}_{t+1}=\boldsymbol{x}^*$; $\boldsymbol{p}_{t+1}=\boldsymbol{p}^*$)。

証明：

(i)　(P2)の証明におけるプロセスラウンド用添字0, 1を$t, t+1$に書き換えればよい。

(ii)　(i)において$\theta_j=1$ $(j\in J)$とした場合，すなわち(i)の特殊ケースの1つである。証了■

最後に，われわれの主張を補強するために，$\mathcal{K}$プロセスの収束性に関する命題を示しておくべきであろう。

ミクロ変量の番号集合の部分集合，最適点におけるJacobian行列 $\boldsymbol{A}_j^*$, $\boldsymbol{A}^*(=(\boldsymbol{A}_j^*\mid j\in J))$ の縮約行列，gradientベクトル $\boldsymbol{c}_j^*$, $\boldsymbol{c}^*(=[\boldsymbol{c}_j\mid j\in J])$ の縮約ベクトルをそれぞれ次のように定める。

$K_{jB}:=\{k\mid k\in K_j;\ x_k^*>0\}$；

$K_B:=\{k\mid k\in K;\ x_k^*>0\}$,

$\boldsymbol{A}_{jB}:=(a_{sk}^*\mid s\in S;\ k\in K_{jB})$；

$\boldsymbol{A}_B:=(a_{sk}^*\mid s\in S;\ k\in K_B)$,

$\boldsymbol{c}_{jB}:=(c_k^*\mid k\in K_{jB})'$; $\boldsymbol{c}_B:=(c_k^*\mid k\in K_B)'$.

計画ベクトルの以下の縮約ベクトルも導入する。

$\boldsymbol{x}_{jB}:=(x_k^*\mid k\in K_{jB})'$; $\boldsymbol{x}_B:=(x_k^*\mid k\in K_B)'$;

$\boldsymbol{x}_N:=(x_k^*\mid k\notin K_B)'$.

ここで，初期モデルの解の一意性を保証するために，次の仮定を追加する。

(A4)　(i) 1次独立制約想定：$|K^*|=S$で，$\boldsymbol{A}_B$の各列ベクトルは1次独立である；

(ii) 強い相補性：

$$x_k^*>0\ \ if\ \sum_{s\in S}a_{sk}^*p_s^*-c_k^*=0.$$

以上の準備のもとに，次の命題をうる。

(P3)　(A1)－(A4)を仮定する。このとき，プロセスパラメータが

$$0<\alpha<\frac{2}{q+|J|} \qquad (4.11)$$

という条件を満たすならば，$\mathscr{K}$ プロセスは局所的収束性を有する。

証明：

(i)　(A1)－(A4) を仮定すると，初期モデル(NLP)の鞍点 $[\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*]$ の回りに

$$\boldsymbol{x}_{Nt}=\boldsymbol{o} \quad if \quad [\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{p}_{t-1}] \in U$$

という条件を満たす近傍 U が存在する($\boldsymbol{x}_{Nt}:=(x_{kt} \mid k \notin K_B)$)。この近傍 U において連続微分可能なベクトル関数 $\boldsymbol{\phi}$

$$\boldsymbol{u}_{Bt}=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}_{t-1}) \tag{4.12}$$

を定義することができる。ここに

$$\boldsymbol{u}_{Bt}:=[\boldsymbol{x}_{Bt}, \boldsymbol{p}_t];\ \boldsymbol{x}_{Bt}:=(x_{kt} \mid k \in K_B),$$
$$\boldsymbol{u}_t:=[\boldsymbol{x}_{Bt}, \boldsymbol{x}_{Nt}, \boldsymbol{p}_t]。$$

(4.12) について

$$d\boldsymbol{u}_{Bt}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}^*)}{\partial \boldsymbol{u}_B}\right)\cdot d\boldsymbol{u}_{B,t-1}$$

が成立する。したがって，$\mathscr{K}$ プロセスの局所的収束性を証明するには，Jacobian 行列 $\partial\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}^*)/\partial \boldsymbol{u}_B$ の任意の固有値 λ について

$$|\lambda|<1 \tag{4.13}$$

が成立することを示せばよい。

(ii)　最適点 $[\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{z}^*]$ の近傍において，全微分 $d\boldsymbol{x}_{Bt}, d\boldsymbol{p}_t, d\boldsymbol{z}_t$ を求めてみよう。(以下，添字 B のついた変量ないし最適点のみを考えるから，特別な場合を除いて添字 B と添字 $*$ を省略する)。まず，等式体系に変換された (4.1) 式の全微分をとり，$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ に注意すると次式をうる。

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'d\boldsymbol{p}_{t-1}-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}d\boldsymbol{x}_t$$
$$-Q_0(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}d\boldsymbol{z}_t+\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}d\boldsymbol{x}_{t-1})=\boldsymbol{0}$$

ここに

$$\boldsymbol{X}:=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{1B} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{x}_{|J|B} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{H}:=\nabla^2 L \quad (|K_B|\times|K_B| \text{ 行列});$$

$$L:=\sum_{j\in J}\left\{c_j(\boldsymbol{x}_j)+\sum_{s\in S}p_s(y_s-f_{sj}(\boldsymbol{x}_j))\right\}.$$

$\boldsymbol{B}:=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(>\boldsymbol{0})$ とすると，$\boldsymbol{B}^{-1}$ が存在するから，上式より

$$d\boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{B}^{-1}(-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}d\boldsymbol{x}_{t-1}$$
$$+Q_0{}^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'d\boldsymbol{p}_{t-1}-Q_0{}^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}d\boldsymbol{x}_{t-1}). \tag{4.14}$$

一方，等式体系に変換された (4.2) 式の全微分をとり，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}$ に注意すると

$$\boldsymbol{A}'d\boldsymbol{p}_{t-1}-\boldsymbol{H}d\boldsymbol{x}_t-Q\boldsymbol{G}(d\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{X}d\boldsymbol{z}_t-d\boldsymbol{x}_{t-1})=\boldsymbol{o}. \tag{4.15}$$

ここに

$$\boldsymbol{G}:=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1'\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_{|J|}'\boldsymbol{A}_{|J|} \end{pmatrix}.$$

価格調整式 (3.2) の全微分をとると

$$d\boldsymbol{p}_t=d\boldsymbol{p}_{t-1}-\alpha Q\boldsymbol{A}d\boldsymbol{x}_t. \tag{4.16}$$

ここで，$d\boldsymbol{x}_{t-1}=\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}$, $d\boldsymbol{p}_{t-1}=\underset{\sim}{\boldsymbol{p}}$ とおくと $d\boldsymbol{x}_t=\lambda\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}$, $d\boldsymbol{p}_t=\lambda\underset{\sim}{\boldsymbol{p}}$ が成り立つ。この事実に着目しつつ，(4.14) 式を利用して (4.15) から $d\boldsymbol{z}_t$ を消去し，(4.16) 式を考慮すると次の基本関係式をうる ($q:=Q/Q_0$)。

$$\alpha\lambda\{Q(1-\lambda)\boldsymbol{G}-\lambda\boldsymbol{H}-q\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}\}\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}$$
$$=-\{(\alpha\lambda q+\lambda-1)\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'+\alpha\lambda\boldsymbol{A}'\}\underset{\sim}{\boldsymbol{p}}, \tag{4.17}$$
$$\alpha\lambda Q\boldsymbol{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}=-(\lambda-1)\underset{\sim}{\boldsymbol{p}}.$$

基本関係式を (1) $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$ (初期モデルが線型計画問題の場合)；(2) $\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{H}\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}\neq 0$ の場合に分けて考察する。

(iii)　$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$ のケース。次の演算を (4.17) 第1式について実行する。

① $(\alpha\lambda Q)^{-1}\boldsymbol{G}^{-1}$ を左から乗ずる；② えられた結果に $\boldsymbol{A}$ を左から乗ずる；③ (4.17) 第2式からえられる関係式 $\boldsymbol{A}\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}=-(\lambda-1)/\alpha\lambda Q\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{p}}$ を用いて $\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}$ を消去する。これらの演算の結果

$$\left\{\left(q+\frac{\lambda-1}{\alpha\lambda}\right)\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)}\right\}\underset{\sim}{\boldsymbol{p}}=-\frac{(\lambda-1)^2}{\alpha\lambda}\underset{\sim}{\boldsymbol{p}} \tag{4.18}$$

をうる。ここに

$$\boldsymbol{A}^{(1)}:=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'$$
$$=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}',$$
$$\boldsymbol{A}^{(2)}:=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{A}'$$
$$=\sum_{j\in J}\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{A}_j'\boldsymbol{A}_j)^{-1}\boldsymbol{A}_j'.$$

実対称行列 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ の固有値の集合 E_1 は，区間 $(0, 1]$ に属する ($\boldsymbol{A}^{(1)}$ は正則ゆえ，$0 \notin E^1$)。$\boldsymbol{A}^{(2)}$ は，$|J|$ 個の正射影の和によって定義されているから，その固有値の集合 E_2 は，区間 $(0, |J|]$ に

属する ($\boldsymbol{A}^{(2)}$ は正則ゆえ，$0 \notin E_2$)。正規行列 $\zeta\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)}$ (ζ は実数) のすべての固有値は，集合 ζE_1+E_2 に属するという事実を (4.18) 式にあてはめると

$$-\frac{(\lambda-1)^2}{\alpha\lambda}=a_1\left(q+\frac{\lambda-1}{\alpha\lambda}\right)+a_2|J|$$

$$(0<a_1\leqq 1;\ 0<a_2\leqq 1) \qquad (4.19)$$

をうる。これを λ について解くと

$$\lambda_{1,2}=1-\frac{a_1+l}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a_1+l}{2}\right)^2-l}. \qquad (4.20)$$

ここに，$l:=(a_1q+a_2|J|)\alpha$。

$\lambda_{1,2}$ が虚数の場合は，$|\lambda|^2=1-a_1$ ゆえ $|\lambda|<1$. $\lambda_{1,2}$ が実数の場合，容易に確かめられるように，プロセスパラメータが条件 $\alpha<2/(q+|J|)$ を満たすならば，$|\lambda|<1$。したがって，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$ のケースについて，$\mathscr{K}$ プロセスは局所的に収束する。

(iv)　$\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{H}\underset{\sim}{\boldsymbol{x}}\neq 0$ のケース[7]。(4.17) 式の行列式を考えると，q, α を固定した場合 λ は Q の代数関数とみなしうる。代数関数の任意の分枝は有限ないし無限の極限をもつ。関数 $\lambda/Q(1-\lambda)$ のある分枝の極限 ν を考える。ν が有限数なら，(4.17) において $Q\to\infty$ としたとき，$\nu>0$ を選ぶことができる。したがって，十分大きな Q に対して，$|\lambda(Q)|<1$ が成立する。$\nu=\infty$ の場合は，$\boldsymbol{G}:=\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Gamma}$，$\tilde{\boldsymbol{A}}:=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}$ と定義すると

(1)　任意の実数 $\delta_1(|\delta_1|<\varepsilon)$，$\delta_2(|\delta_2|<\varepsilon)$ に対して，$(\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Gamma}+\delta_1\boldsymbol{H}+\delta_2\boldsymbol{\Gamma}'\tilde{\boldsymbol{A}})^{-1}$ が存在するように $\varepsilon>0$ を選ぶことができる；

(2)　$\displaystyle\lim_{\delta_1,\delta_2\to 0}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Gamma}+\delta_1\boldsymbol{H}+\delta_2\boldsymbol{\Gamma}'\tilde{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{A}'$,

これら2つの事実に着目すると，形式的には本証明 (iii) の議論をそのまま適用することによって $|\lambda|<1\ (\lambda(Q)\to\lambda)$ をうる。証了■

以上，集計－分計調整プロセスとしての $\mathscr{K}$ プロセスの性能を示す3つの基本命題を示し，その証明を行なった。命題 (P1) は，プロセスが有意味であるためのミニマムエッセンシャルズを $\mathscr{K}$ プロセスが満たすことを示すにすぎない。また，命題 (P3) は，大局的収束性を含意しないから，研究史的には重要なステップを形成すると思われるが，それ自体として特に興味を呼び起こすものではないかも知れない。

$\mathscr{K}$ プロセスの性能の優秀さを示すのは，命題 (P2) ならびにこの命題と組み合わされた場合の命題 (P3) である。命題 (P2) と命題 (P3) とをリンクさせた場合，われわれは $j\in J$ に対して

$$(\mathrm{I})\ \begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_{j0}\approx\theta_j\boldsymbol{x}_j{}^*\\ \boldsymbol{p}_0\approx\boldsymbol{p}^*\end{Bmatrix}\to(\mathrm{II})\ \begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_{j1}\approx\boldsymbol{x}_j{}^*\\ \boldsymbol{p}_1\approx\boldsymbol{p}^*\end{Bmatrix}$$

$$\to(\mathrm{III})\ \begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_{j2}=\boldsymbol{x}_j{}^*\\ \boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}^*\end{Bmatrix}$$

ということを蓋然的に主張できるからである。いずれにしろ，上のシェーマにおいて (I) が成立すれば，$\mathscr{K}$ プロセスは，ただちに最適解に十分に近い計画をもたらすといえよう。

周知のように，伝統的な最適計画プロセス (例えば Dantzig-Wolfe の分解計画法――$\mathscr{DW}$ プロセス) の収束速度は，初期解が解にどれほど近いかに決定的に依存する。すなわち，初期解が解に近ければ近いほど，収束は速くなるといえよう。しかし，伝統的プロセスには，初期解を解に急速に近づけるようなメカニズムは内蔵されていない。これに対して，集計－分計操作を含む $\mathscr{K}$ プロセスは，命題 (P2) が示唆するように部門別初期解が解から一様の場合はもちろんのこと，大勢として同一方向に乖離しているならば，初期解をただちに解に近づける。すなわち，われわれのプロセスは，マクロモデル (集計化) とミクロモデル (分計化) との結合によって，初期解を解に急速に近づける1つのメカニズムを提供しているのである。

さらに，命題 (P2′) (i) は伝統的プロセスのうち，$\mathscr{DW}$ プロセスと比較した場合の $\mathscr{K}$ プロセスのいま1つのメリットも示唆している。すなわち，前者では最適価格がえられた場合でも，ミクロ変量に関する最終計画の決定は計画当局によって行なわれなければならない。これに対して $\mathscr{K}$ プロセスでは計画当局はマクロ均衡化乗数のみを決定すればよく，ミクロ変量についての最終計画の決定は各セクターに委ねられているといえる (もちろん，命題 (P2′) (i) の条件が近似的に成立している

---

7)　[1], [6], [7] 参照。

場合についてという限定の上でのことであるが)。

5. $\mathscr{K}$ プロセス vs. $\mathscr{D}$ プロセス

既述のように，集計－分計調整プロセスを開発したのはソ連のドゥートキンを中心とする研究集団である。われわれの $\mathscr{K}$ プロセスも彼らの業績を基礎にしている。しかし，彼らが [2], [5], [13] で提供している集計－分計調整プロセス($\mathscr{D}$ プロセスと呼ぶ)は，$\mathscr{K}$ プロセスと異なり，収束速度に関する集計－分計手続きのメリットを活かしきっていない。以下，この点を明らかにする。

問題を純粋に示すために，(1) 初期モデルは線型計画問題(LP)とする；(2) マクロモデルの未知変量はスカラ z のみとする($\boldsymbol{x}$ は z という変量に「集計」されている)；(3) ミクロモデルは各生産プロセス k 毎に設営される，とする。このとき，本稿の枠組みに沿って $\mathscr{D}$ プロセスの t ラウンドを記述すると次のようになる。

まず，パラメータの集計が既に行なわれている。すなわち

$$a_{s,t-1}=\sum_{k\in K}a_{sk}x_{k,t-1}, \tag{5.1}$$

$$\Pi_{t-1}=\sum_{k\in K}\left(\sum_{s\in S}p_{s,t-1}a_{sk}-c_k\right)x_{k,t-1}. \tag{5.2}$$

Step 1 《マクロモデル》:

$$\text{(DC)}\quad \max_{z\geqq 0}\left\{\Pi_{t-1}z-\frac{1}{2}\beta(z-1)^2-\frac{1}{2}Q_0\sum_{s\in S}(y_s-a_{s,t-1}z)^2\right\}.$$

ここで，β は正のプロセスパラメータである。

この解を z_t とする。

Step 2 《ミクロモデル》:

$$(\mathrm{DL}_k)\quad \max_{x_k\geqq 0}\left\{\left(\sum_{s\in S}p_{s,t-1}a_{sk}-c_k\right)x_k-\frac{1}{2}Q\sum_{s\in S}(a_{sk}x_{k,t-1}z_t-a_{sk}x_k)^2\right\}.$$

この解を $\hat{x}_{kt}$ とする。

Step 3 予備的価格調整:

$$\hat{p}_{st}=p_{s,t-1}+\alpha Q\left(y_s-\sum_{k\in K}a_{sk}\hat{x}_{kt}\right),\quad s\in S. \tag{5.3}$$

Step 4 近似解の形成:

$$\begin{aligned}x_{kt}&=(1-\gamma)x_{k,t-1}+\gamma\hat{x}_{kt},\quad k\in K,\\ p_{st}&=(1-\gamma)p_{s,t-1}+\gamma\hat{p}_{st},\quad s\in S.\end{aligned} \tag{5.4}$$

ここで，γ はプロセスパラメータで $0<\gamma<1$。

以上にみられるように，$\mathscr{D}$ プロセスでは，$\mathscr{K}$ プロセスと異なり，マクロモデルに $-(1/2)\beta(z-1)^2$ というタームを導入し，さらに近似解の形成にあたって「混合戦略」を採用している。このような操作の有効性こそが問題である。

ここで，$x_{k0}=\theta x_k^*\ (\theta>0,\ \theta\neq 1;\ k\in K)$，$p_{s0}=p_s^*\ (s\in S)$ としよう。この場合，(5.1), (5.2) 式は

$$a_{s0}=\theta\sum_{k\in K}a_{sk}x_k^*,$$

$$\Pi_0=\theta\sum_{k\in K}\left(\sum_{s\in S}p_s^*a_{sk}-c_k\right)x_k^*.$$

マクロモデルの目的関数を

$$g(z):=\Pi_0z-\frac{1}{2}\beta(z-1)^2-\frac{1}{2}Q_0\sum_{s\in S}(y_s-a_{s0}z)^2$$

とすると，$z>0$ に対して

$$\partial g(z)/\partial z=\Pi_0-\beta(z-1)-Q_0\sum_{s\in S}a_{s0}(a_{s0}-y_s)=0.$$

したがって，$\Pi_0=0,\ y_s=\sum_{k\in K}a_{sk}x_k^*$ に注意すると

$$z_1=\frac{Q_0R+\beta}{\theta Q_0R+\beta};\qquad R:=\sum_{s\in S}y_s^2 \tag{5.5}$$

をうる。

次にミクロモデルの目的関数を

$$g_k(x_k):=\left(\sum_{s\in S}p_s^*a_{sk}-c_k\right)x_k-\frac{1}{2}Q\sum_{s\in S}(\theta a_{sk}x_k^*z_1-a_{sk}x_k)^2$$

と定めると，$x_k>0$ に対して

$$\partial g_k(x_k)/\partial x_k=\sum_{s\in S}p_s^*a_{sk}-c_k-Q\sum_{s\in S}a_{sk}(a_{sk}x_k-\theta a_{sk}x_k^*z_1)=0.$$

したがって，$\sum_{s\in S}p_s^*a_{sk}-c_k=0$ に注意すると

$$\hat{x}_{k1}=\theta z_1x_k^* \tag{5.6}$$

となる。(5.5), (5.6) 式を (5.4) 第1式にあてはめると

$$x_{k1}=\left\{(1-\gamma)+\gamma\cdot\frac{Q_0R+\beta}{\theta Q_0R+\beta}\right\}\theta x_k^*. \tag{5.7}$$

$0<\gamma<1$ ゆえ

$$x_{k1}\neq x_k^*,\quad k\in\{k|x_k^*>0\}.$$

すなわち，われわれの命題(P2)は $\mathscr{D}$ プロセスで

は一般に成立しない(命題(P1)，(P2)′(ii)，(P3)は成立)。$\hat{x}_{k1}$ も一般に x_k^* に等しくないから，(5.3)，(5.4)式より，p_{s1} も $\hat{p}_{s1}$ も p_s^* に一般に等しくない。すなわち，$\mathscr{D}$ プロセスでは，均衡価格から出発しても，それが不均衡価格に改訂されてしまうのである。

$\mathscr{D}$ プロセスにおいて，$\beta=0$，$\gamma=1$ であれば，それは単純な $\mathscr{K}$ プロセスとなる。すなわち，このとき，(5.5)，(5.6)，(5.7)式より明らかなように

$$x_{k0}=\theta x_k^* \to (z_1=1/\theta) \to \hat{x}_{k1}=x_{k1}=x_k^*,\quad k \in K$$

が成立する。これに対して，$\mathscr{D}$ プロセス($\beta>0$，$0<\gamma<1$)では，β が十分大きいとすると，ただちに $z_1\approx 1$ となってしまい((5.5)式より，$\lim_{\beta\to\infty} z_1=1$)，プロセスのマクロモデルは，計画のスケールの調整機能を不十分にしか遂行することができないのである。マクロ均衡化乗数 z は，急速に1に近接することが望ましいが，それはあくまで「マクロ均衡化」という機能を果たした上でのことなのである。ドゥートキン等は，表面的もっともらしさと数学的証明の容易さということに惑わされて，結局，自己の創造した集計－分計調整プロセスを骨抜きにしてしまったといえよう。

6. 若干のシミュレーション結果

最適計画化の集計－分計調整プロセスの振舞いを具体的に調べるために，簡単な数値例を用いてシミュレーションを行なった。その結果について述べる前にあらかじめ次の3つの注意を与えておきたい。第1に，今回の数値実験は，初期モデルが線型計画問題(LP)の場合に限定されている。第2に，$\mathscr{K}$ プロセスのマクロモデルの目的関数に $-(1/2)\beta\sum(z_j-1)^2$ を付加し，価格調整式ならびに近似解形成式として(5.3)式と(5.4)式とを採用したプロセスを $\mathscr{D}$ プロセスとし，$\mathscr{K}$ プロセスとの収束速度の比較を試みた。第3に，$\mathscr{K}$ プロセスや $\mathscr{D}$ プロセスをプログラミングする際，問題になるのは，マクロモデルとミクロモデルの逐次解法のためのサブルーチン(サブイタレーションを形成する)のアルゴリズムである。われわれは，変形準 Newton 法を用いたが，これが系統的なシミュレーションの実行をさまたげる桎梏となった。この点において改良の余地が多分にあるけれども，今回は上記のサブルーチンに甘んじることとし，改良した数値実験は非線型のケースについてのそれと合わせて別の機会に行なうことにした。

初期モデルを線型計画問題とすると，それは

$$\min \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{o}$$

と書ける。

まず，次の数値例(数値例1)について一連の実験を試みた。

$$K_1=\{1,2\},\quad K_2=\{3,4\},\quad K_3=\{5,6\};$$
$$|J|=3,\quad |K|=6,\quad |S|=3,$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3\end{array}\\ \left(\begin{array}{cc:cc:cc} 0.8 & 0.9 & -0.1 & -0.1 & -0.4 & -0.3\\ -0.1 & -0.3 & 0.7 & 0.6 & -0.1 & -0.1\\ -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.1 & 0.7 & 0.8\end{array}\right)\end{array};$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}'=(\ 5.0\quad 4.0\ \vdots\ 4.0\quad 4.0\ \vdots\ 2.0\quad 3.0),$$

$$Q_0=Q=10;\ \alpha=0.001.$$

第1表　計画不均衡の推移(数値例1)　　(%)

t	$\mathscr{K}$ プロセス				$\mathscr{D}$ プロセス	
	case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6
1	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
2	0.00	0.00	0.02	0.02	11.77	50.00
3			0.00	0.00	8.55	25.00

第1表は，各プロセスの代表的結果について，その計画不均衡の推移を

$$\left(\sum_{k\in K}|x_{kt}-x_{k,t-1}|\Big/\sum_{k\in K}|x_{k1}-x_{k0}|\right)\times 100$$

によって表示したものである(ただし，第3ラウンド目までのみ表示)。第1表における各ケースの定義は次のとおりである($\theta_j>0$；$\theta_j\neq 1, j\in J$)。

case 1　$\boldsymbol{x}_{j0}=\theta_j\boldsymbol{x}_j^*(j\in J)$；$\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}^*$.

case 2　$\boldsymbol{x}_{j0}\approx\theta_j\boldsymbol{x}_j^*(j\in J)$；$\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}^*$.

case 3　$\boldsymbol{x}_{j0}=\theta_j\boldsymbol{x}_j^*(j\in J)$；$\boldsymbol{p}_0\approx\boldsymbol{p}^*$.

case 4　$\boldsymbol{x}_{j0}\approx\theta_j\boldsymbol{x}_j^*(j\in J)$；$\boldsymbol{p}_0\approx\boldsymbol{p}^*$.

case 5　$\boldsymbol{x}_{j0}=\theta_j\boldsymbol{x}_j^*$；$\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}^*$；$\beta=100$；$\gamma=1$.

case 6　$\boldsymbol{x}_{j0}\approx\theta_j\boldsymbol{x}_j^*$；$\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}^*$；$\beta=0$；$\gamma=0.5$.

第2表 計画不均衡の推移(数値例 2) (%)

t	$\mathcal{K}$ プロセス				$\mathcal{D}$ プロセス	
	case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6
1	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
2	0.00	0.16	2.61	3.26	32.24	57.22

第2表は，$\boldsymbol{A}$ 行列と $\boldsymbol{y}$ ベクトルの第4行目としてそれぞれ

$(-0.1\ -0.1 \vdots -0.2\ -0.2 \vdots -0.3\ -0.3)$, (-5.1)

を付加した場合(数値例 2)について同様の実験を行なったときの代表的結果を示したものである(ただし，第2ラウンドまで表示)。

2つの表から容易に看取されるように，$\mathcal{K}$ プロセスは，第1ラウンドないし第2ラウンドにおいて，最適解ないしそれに十分近い解をもたらす。これと比較すると，$\mathcal{D}$ プロセスの収束速度は一般に著しくのろいといえよう。

7. 結 語

以上，最適計画化の集計－分計調整プロセスの1つの可能性を追求してきた。われわれの作業は，計画経済論の進化に対して次のような意義を有する。第1に，合目的な集計－分計調整プロセスが，従来の社会主義価格論の主要な潮流，すなわち生産価格＝最適価格論と協調的でありうることが示された。第2に，Brus 流の《分権モデル》構想を理論化する場合の1つの可能な方向が純粋に示された。

また，われわれの試みは，経済理論としてだけではなく，数理計画法一般における数値計算法に対しても1つの新局面を開くものだと期待しうる。線型計画法については，汎用コンピュータ用のアルゴリズムとして改訂シンプレックス法が現在用いられている。シンプレックス法のヴァリアント(分解原理もこれに含まれる)は，有限回のステップでほぼ確実に求解するというメリットをもっているが，その半面，通常，最悪の可能基底解から出発するため，問題のサイズが大きい場合は，一般に著しく time-consuming だという難点を共有している。本論から知られるように，われわれのプロセスは，この難点を除去するための1つのメカニズムの設計を意図している，と解釈することもできよう。もちろん，本稿で提供したアルゴリズムは，収束性やシャドウプライスの調整方式，さらに，局所問題解法のサブルーチンなど多くの改良の余地を残している。しかし，経済理論と数値計算との両者の統一的進展に対して集計－分計調整プロセスのもつ意義を看過することは不可能に近いように思われる。

(一橋大学経済研究所)

〔**後記**。本稿脱稿後，*The New York Times* (Nov. 19, 1984)において，N. Karmarkar (AT & T Bell Laboratories)によって線型計画法の“画期的新解法”が考案されたことが詳しく報道された。彼のアルゴリズムは，ソ連の数学者ハチャン(Хачиян, Л. Г.)の業績に依拠しており，シンプレックス法のように順次隣接する端点を動いていくのではなく，制約領域のある内点から急速に解に接近していくように設計されているようである(N. Karmarkar, “A New Polinominal-Time Algorithm for Linear Programming,” *ACM* 0-89791-133-4/84/004/0302, 1984)。非常に興味深い発想であるが，実際の計算に際して生ずることの極めて稀な巡回のケースに対する考察から出発しているため，通常の計算に対してどれほどの意義をもっているかは，今のところ未知数のようである。しかし，ハチヤン＝Karmarkar のアルゴリズムを集計－分計調整プロセスとして構成しうるかどうか，また構成した場合のそのインプリケーションを探る試みは誰かが行なうべきだと思われる。筆者も近いうちにこの課題にアタックすることを考えている。〕

文 献

[1] Бахметьев, М. М. и др., Тр. IV Зимней школы по матем. программированию и смежным вопросам, в. 3, М., 1972.

[2] Вахутинский, И. Я., Один процесс итеративного агрегирования для решения задач и выпуклого частично сепарабельного программрования, 《Доклады АН СССР》, 248 (6), 1979.

[3] Вахутинский, И. Я., Дудкин, Л., М., Щенников, Б. А., Итеративное агрегирование в некоторых оптимальных экономичеких моделях, 《Э. М. М.》, вып. 3, 1973.

[4] Дудкин, Л. М., Система расчетов оптимального народнохозяйственного плана. М., 1972.

[5] Дудкин, Л. М. (ред.), Итеративное агрегирование и его применение в планировании, М., 1979.

[6] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968.

[7] Математическая энциклопедия 1, М., 1977.

[8] Fiacco, A. V., and McCormick: *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*, New York, 1968.

[9] Hare, P., "The organization of information flows in systems of economic planning," *Economics of planning*, No. 1, 1981. pp. 1–19.

[10] Koopmans, T. C., "Analysis of production as an efficient combination of activities," in T. C. Koopmans, ed., *Activity analysis of production and allocation*, New York, 1951.

[11] Kornai, J., "Man-machine planning," *Economics of planning*, No. 3, 1969, pp. 209–234.

[12] Malinvaud, E., "Decentralized procedures for planning," in E. Malinvaud and M. Bacharach, eds., *Activity analysis in the theory of growth and planning*, London, 1967.

[13] Vakhutinsky, I. Y., Dudkin, L. M. and Ryvkin, A. A., "Iterative aggregation: a new approach to the solution of large-scale problems," *Econometrica*, No. 4, July 1979, pp. 821–841.

[14] 久保庭真彰「物財バランス調整プロセスと集計＝価格形成原則」『経済研究』第31巻第1号，1980年1月。