成長曲線モデルにおける仮説検定*

——一般多変量分散分析——

刈屋 武昭

1 問題と要約

この論文では，成長(変動)曲線モデルあるいは同じことだが一般多変量分散分析モデルに関していくつかの仮説検定問題を取り扱う。成長曲線モデルの詳細については拙著『回帰分析の理論』を参照されたい。このモデルは，拡張された多変量回帰モデルとして

(1.1) $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{E}$

と表現されるモデルであり，このモデルにおいて仮説

(1.2) $\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{X}_0$

を検定する問題を一般多変量分散分析問題(General MANOVA problem または GMANOVA problem)という。ここで

$$
(1.3)\quad
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_1: n\times(n_1+n_2),\quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_1)=n_1+n_2\\
&\boldsymbol{X}_2: (p_1+p_2)\times p,\quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_2)=p_1+p_2\\
&\boldsymbol{X}_3: n_1\times(n_1+n_2),\quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_3)=n_1\\
&\boldsymbol{X}_4: (p_1+p_2)\times p_2,\quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_4)=p_2\\
&n=n_1+n_2+n_3,\quad p=p_1+p_2+p_3
\end{aligned}
$$

であり，誤差項 $\boldsymbol{E}$ に対して正規分布

(1.4) $\boldsymbol{E}\sim N(\boldsymbol{0},,\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Omega})$

を仮定する。また一般性を失うことなく以下では $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$ とする。(1.4)は，$\boldsymbol{E}$ の n 個の各行が互いに独立に平均 $\boldsymbol{0}$，分散行列 $\boldsymbol{\Omega}$ の p 次元正規分布に従うことを示す。Gleser and Olkin (1970) は，(1.4)のもとに(1.1)のモデルで(1.2)を検定する問題は，モデル

$$
(1.5)\quad
\boldsymbol{Z}=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_3 \end{array}\\
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{Z}_{11} & \boldsymbol{Z}_{12} & \boldsymbol{Z}_{13}\\
\boldsymbol{Z}_{21} & \boldsymbol{Z}_{22} & \boldsymbol{Z}_{23}\\
\boldsymbol{Z}_{31} & \boldsymbol{Z}_{32} & \boldsymbol{Z}_{33}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} p_1\\ p_2\\ p_3 \end{array}
\sim
N\left(\begin{pmatrix}
\boldsymbol{\Theta}_{11} & \boldsymbol{\Theta}_{12} & \boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{\Theta}_{21} & \boldsymbol{\Theta}_{22} & \boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}
\end{pmatrix},\ \boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Sigma}\right)
$$

において，仮説

(1.6) $H:\boldsymbol{\Theta}_{12}=\boldsymbol{0}$

を検定する問題と同等であることを示した。Kariya (1978) は，不変性原理(invariance principle)に基づいてこの問題を解析し，局所最良不変検定を導出し，それが局所ミニマックス検定であることを証明した。それは

$$
(1.7)\quad
\begin{aligned}
&W_5=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_2)^{-1}[a\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1)^{-1}-b\boldsymbol{I}]\\
&\quad \text{ただし } a=n_1+n_3-p_3,\ b=p_2
\end{aligned}
$$

が大きいとき仮説(1.6)を棄却する検定である。ここに

$$
(1.8)\quad
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{x}\boldsymbol{V}_{22,3}{}^{-1}\boldsymbol{x}'\\
&\boldsymbol{V}_{22,3}=\boldsymbol{V}_{22}-\boldsymbol{V}_{23}\boldsymbol{V}_{33}{}^{-1}\boldsymbol{V}_{32}\\
&\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_2)^{-1/2}[\boldsymbol{Z}_{13}-\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{V}_{33}{}^{-1}\boldsymbol{V}_{32}]\\
&\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{V}_{33}{}^{-1}\boldsymbol{Z}_{13}'\\
&\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{V}_{ij}),\ \boldsymbol{V}_{ij}=\boldsymbol{Z}_{3i}'\boldsymbol{Z}_{3j}
\end{aligned}
$$

である。Khatri (1966) は，尤度比検定

$$W_4\equiv|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1|>c_4$$

に基づいて，Lawley-Hotelling 型検定

$$W_2\equiv\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_1>c_2$$

Pillai 型検定

$$W_3\equiv\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1)^{-1}>c_3$$

等を提案した。W_2, W_3, W_4 の分布の漸近展開は Fujikoshi (1973) が導出している。

この論文の第1の問題(第2節)は，Fujikoshi (1970, 1973) の結果に基づいて，(1.7)の局所最良

* 本稿第2節に関して広島大学藤越康祝教授から資料の提供，文献の存在等多大な御協力を頂いた。深く感謝したい。またこの研究の一部は，文部省科学研究費一般 C 57530008 の援助を受けている。

不変検定の漸近展開を n^{-1} 次のオーダーまで導出することである。より高次の漸近展開は非常に複雑であり，ここでは残しておく。

第2の問題では，まずGMANOVA問題を次のように拡張する。すなわち(1.1)のGMANOVAモデルにおいて事前的情報として(1.2)の係数行列に対する線型制約 $\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{X}_0$ を仮定し，その上で仮説

(1.9) $\boldsymbol{X}_5\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{X}_7$

を検定する問題を考察する。これを拡張GMANOVA問題(extended GMANOVA problem)という。このように定式化される問題としては，次のような問題がある。

(1) 成長曲線モデルにおいて，たとえば成長(変動)の初期時点における水準が等しいとしてその後の時間的成長(変動)パターンが等しいかどうかを検定する問題。

(2) 判別分析では，2つの母集団の平均値の一部が同じであっても共変関係を通じてその等しい部分の変数を含めた方が判別能力を高めることができるという理論がある。その場合，異なるとされる平均値の他の一部が等しいという仮説検定問題は，Cochran and Bliss(1948)，Rao (1949)，Kariya and Kanazawa(1978)等によって考察された。この問題は実は拡張GMANOVA問題であることが示される。

(3) ミッシングデータがある場合の平均値の一部がゼロ(もしくは2母集団の平均ベクトルの一部の恒等性)の検定問題は，拡張GMANOVA問題に埋込むことができる。

(4) 見かけ上無関係な回帰モデル(seemingly unrelated regression model, SUR model)は，それ自体GMANOVAモデルでないが(例えば刈屋(1979)をみよ)，実は拡張GMANOVAモデルである。その場合，たとえば第1方程式の係数ベクトルの一部がゼロという仮説を検定する問題は拡張GMANOVA問題となる。

以上の問題で(1)は知られているが，(2)～(4)はこの論文で初めて扱われる新しい視点と考えられる。さて拡張GMANOVA問題では，与えられたモデル(1.1)に対して係数行列 $\boldsymbol{B}$ に対して2つの制約((1.2)と(1.9))をもつことになり，行列 $\boldsymbol{X}_i$ が全く任意であると，いわゆるnonnestedなケースになる。その場合，一般に最適性をもつ検定は存在しない。そのため行列 $\boldsymbol{X}_i$ の間に一定の制約をおく。Banken(1984)は，この制約を係数行列 $\boldsymbol{B}$ の推定可能性の問題と関係づけ，Kariya(1978)の結果に基づいてその制約のもとでは(1.7)に対応する検定が局所最良不変検定であることを示している。したがってここでは，その局所ミニマックス性を示すことおよび具体例(1)および(2)の検定が主となる。

第3の問題は，上記(3)に述べたように，ミッシングテータがある場合の平均値の検定問題を拡張されたGMANOVA問題の中に埋込むことである。その場合，モデルが実はMANOVAモデルとなるため，MANOVA問題の結果が利用でき，Eaton and Kariya(1983)で示した一定の検定の一様最強力不変性等が直接でることになる。

第4の問題は，(4)に述べたSURモデルにおける検定問題を扱うことである。そこでは，不変性の見地から問題を縮約し，第1方程式のみに基づく通常の F 検定(あるいは t 検定)は必ずしも最適性を保有しないこと，また一般の状況では局所最良不変検定が存在しないことを示す。さらに，第1方程式の説明変数が第2方程式の説明変数の一部であるような場合，通常の F 検定は一様最強力不変であることを示す。

記号として $\mathcal{O}(n)$ で $n\times n$ の直交行列全体を表わす。

2 局所最良不変検定の仮説のもとでの分布

この節では仮説(1.6)(もしくは(1.2))のもとで，局所最良不変検定統計量(1.7)の分布の漸近展開を n^{-1} まで求める。実際の利用のために，まずもとのモデル(1.1)とその仮説(1.2)と標準形(1.5)とその仮説(1.6)との間の記号の対応をつけておく。そのため

$$\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'$$

$$\boldsymbol{A}_1=[\boldsymbol{X}_3(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_3']^{-1/2}\boldsymbol{X}_3(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'$$

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{X}_2'(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2')^{-1}\boldsymbol{X}_4[\boldsymbol{X}_4'(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2')^{-1}\boldsymbol{X}_4]^{-1/2}$$

とおく。このとき次の補助定理が成立する。

補助定理 2.1　(1.8) の $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2$ は，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{Y}$ とおくと

$$\boldsymbol{T}_1=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_2)^{-1/2}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}_2'[\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}_2']^{-1}$$
$$\times\boldsymbol{X}_4\{\boldsymbol{X}_4'[\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}_2']^{-1}\boldsymbol{X}_4\}^{-1}\boldsymbol{X}_4'$$
$$\times[\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}_2']^{-1}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}_1'(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_2)^{-1/2}$$
$$\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{S}^{-1}-\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}_2'[\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}_2']^{-1}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{S}^{-1}]$$
$$\times\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}_1'$$

と表現される。

証明は，刈屋 (1979) の標準形への縮約のプロセスを逆にたどって対応をつける。ここではそれを省略する。

さて求める漸近展開に行うため，Fujikoshi (1973) の次の結果を紹介しておく。

補助定理 2.2　Pillai の検定統計量

$$U_3\equiv a\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1)^{-1},\quad a=n_1+n_3-p_3$$

の仮説のもとでの分布は，

$$P(U_3\le x)=G_f(x)$$
$$(2.1)\qquad +\frac{f\gamma}{4}[-G_f(x)+2G_{f+2}(x)-G_{f+4}(x)]$$
$$+O(a^{-2})$$

と展開される。ここで $f=n_1p_2$，$\gamma=n_1+p_2+1$，$G_f(x)$ は自由度 f をもつ χ^2 分布の分布関数である。

Fujikoshi (1973) では n^{-2} のオーダーまで導出しているが，われわれの目的から上の表現にとどめておいた。さて (1.7) の局所最良不変検定統計量 W_5 の漸近展開を簡単にするため，次のように定義しなおす。

$$(2.2)\qquad U_5=W_5+n_1p_2-n_1p_2p_3/a$$

このとき次の定理が成立する。

定理 2.1　局所最良不変検定統計量 U_5 の仮説 (1.6) (もしくは (1.2)) のもとでの分布は

$$P(U_5\le x)=G_f(x)$$
$$(2.3)\qquad +\frac{f\gamma}{4a}[-G_f(x)+2G_{f+2}(x)-G_{f+4}(x)]$$
$$+\frac{fp_3}{2a}[G_f(x)-G_{f+2}(x)]+O(a^{-2})$$

と表現される。ただし $a=n_1+n_3-p_2$.

証明をするまえに，(2.3) の右辺の 2 項は U_3 の分布 (2.1) の表現に対応していることを注意しておく。また，もし $p_3=0$ のとき，T_2 が消え，(2.3) は (2.1) と同等になる。さらにここでの漸近展開は，形式展開であってその validity をいうためには，Bhattacharya and Ghosh (1978) の結果等を適用しなくてはならない。この点について例えば Kariya and Maekawa (1981)，Fujikoshi (1984) 等を参照されたい。

定理の証明：検定統計量の不変性から一般性を失うことなく $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}$ が仮定できる。(1.5) から $\boldsymbol{Z}_{13}\sim N(\boldsymbol{O},\boldsymbol{I}_{n_1}\otimes\boldsymbol{I}_{p_3})$ と $\mathrm{plim}_{a\to\infty}\boldsymbol{V}_{33}/a=\boldsymbol{I}$ より

$$\mathrm{plim}_{a\to\infty}\boldsymbol{T}_2=\mathrm{plim}_{a\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{Z}_{13}}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{V}_{33}}{a}\right)^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{Z}_{13}}{\sqrt{a}}\right)'=0$$
$$\mathrm{plim}_{a\to\infty}a\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{Z}_{13}'$$

したがって $\boldsymbol{T}_2$ が非負値定符号であるから

$$\boldsymbol{T}_2=\frac{1}{a}\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{Z}_{13}'+O_p(a^{-2})$$
$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_2)^{-1}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}_2+\boldsymbol{T}_2^2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_2)^{-1}$$
$$=\boldsymbol{I}-\frac{1}{a}\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{Z}_{13}'+O_p(a^{-2})$$

となる。それゆえ

$$U_5=\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{I}-\frac{1}{a}\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{Z}_{13}'+O_p(a^{-2})\right]$$
$$\times[a\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1)^{-1}-p_2\boldsymbol{I}]+n_1p_2-n_1p_2p_3/a$$
$$=U_3-\frac{1}{a}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{Z}_{13}'[a\boldsymbol{T}_1(I+\boldsymbol{T}_1)^{-1}]$$
$$+(p_2/a)\,\mathrm{tr}\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{Z}_{13}'-n_1p_2p_3/a$$

となる。もちろん $U_3=a\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1)^{-1}$ である。仮説のもとで $\boldsymbol{T}_1$ と $\boldsymbol{Z}_{13}$ が独立であることを用いると，U_5 の特性関数は

$$\psi_5(t)=E\left\{\exp(itU_3)\left[1-\frac{it}{a}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{Z}_{13}'\right.\right.$$
$$(a\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1)^{-1})-it(p_2/a)\,\mathrm{tr}\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{Z}_{13}'$$
$$\left.\left.-it\,n_1p_2p_3/a+O_p(a^{-2})\right]\right\}$$
$$=\psi_3(t)-t(p_2/a)E[\exp(it\,U_3)iU_3]$$
$$+O(a^{-2})$$

$$=\psi_3(t)-t(p_2/a)\frac{\partial}{\partial t}\psi_3(t)+O(a^{-2})$$

となる。ただし上で

$$\psi_3(t)=E[\exp(it\ U_3)],\ E(\boldsymbol{Z}_{13}\boldsymbol{Z}_{13}')=p_2\boldsymbol{I}_{n_1}$$

を用いた。他方，$G_f(x)$ の特性関数は $(1-2it)^{-f/2}$ であるから，(2.1)の表現から

$$\psi_3(t)=(1-2it)^{-f/2}+\frac{f\gamma}{4a}[-(1-2it)^{-f/2}$$
$$+2(1-2it)^{-1-f/2}-(1-2it)^{-2-f/2}]$$
$$+O(a^{-2})$$

を得る。それゆえ

$$-t(p_2/a)\frac{\partial}{\partial t}\psi_3(t)$$
$$=(p_2f/2a)(-2it)(1-2it)^{-1-f/2}+O(a^{-2})$$
$$=(p_2f/2a)[(1-2it)^{-f/2}-(1-2it)^{-1-f/2}]$$
$$+O(a^{-2})$$

となる。これらを $\psi_5(t)$ に代入し，逆変換することで求める結果を得る。

3 拡張 GMANOVA 問題

この節では拡張 GMANOVA 問題を取り扱う。モデルは

(3.1) $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{E}\sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Omega})$

(3.2) $\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{X}_0$

で与えられる。ここで各 $\boldsymbol{X}_i$ は

$\boldsymbol{X}_1: n\times k,\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_1)=k$

$\boldsymbol{X}_2: q\times p,\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_2)=q$

$\boldsymbol{X}_3: m_3\times k,\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_3)=m_3$

$\boldsymbol{X}_4: q\times r_4,\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_4)=r_4$

の既知行列である。拡張 GMANOVA 問題では，このモデルにおいて仮説

(3.3) $H: \boldsymbol{X}_5\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{X}_7$

を検定する。ただし $\boldsymbol{X}_i$ は

$\boldsymbol{X}_5: m_5\times k,\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_5)=m_5$

$\boldsymbol{X}_6: q\times r_6,\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_6)=r_6$

を満たす既知行列である。以下では一般性を失うことなく $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{X}_7=\boldsymbol{0}$ を仮定する。この問題の一般的取扱いは困難であるので，以下の分析では次の仮定をおく。

［**仮定 3.1**］ 行列 $\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{X}_4, \boldsymbol{X}_6$ は次の関係を満たすものとする。

$$\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_5=\boldsymbol{M}_5\boldsymbol{M}_3 \text{ と } \boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_6=\boldsymbol{M}_6\boldsymbol{M}_4$$

ただし

$$\boldsymbol{M}_i=(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1/2}\boldsymbol{X}_i'[\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_i']^{-1}$$
$$\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1/2}\quad(i=3,5)$$
$$\boldsymbol{M}_j=(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2')^{-1/2}\boldsymbol{X}_j[\boldsymbol{X}_j'(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2')^{-1}\boldsymbol{X}_j]^{-1}$$
$$\boldsymbol{X}_j'(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2')^{-1/2}\quad(j=4,6)$$

この仮定は，$\boldsymbol{M}_i$ と $\boldsymbol{M}_{i+2}$ を同時に対角化する直交行列が存在することを意味する。Banken (1984) はこの仮定を (3.1), (3.2) と (3.3) の推定可能性 (estimability) の問題と関係づけた。

問題を標準形に直すため，(I) $\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_5=\boldsymbol{M}_5$, $\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_6=\boldsymbol{M}_4$, (II) $\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_5=\boldsymbol{M}_5$, $\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_6=\boldsymbol{0}$ の2つの場合を扱う。(I)の場合，$\boldsymbol{X}_5$ の行空間が $\boldsymbol{X}_3$ の行空間に含まれ，$\boldsymbol{X}_4$ の列空間が $\boldsymbol{X}_6$ の列空間に含まれている。言いかえれば，$\boldsymbol{X}_5$ は $\boldsymbol{X}_3$ に，$\boldsymbol{X}_4$ は $\boldsymbol{X}_6$ に nested している。このとき $m_5\leq m_3$, $r_4\leq r_6$ が成立する。標準形を求めるため，刈屋(1979) 第10章にあるように

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{P}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_k\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{F}_1: \boldsymbol{P}_1\in\mathcal{O}(n),\ \boldsymbol{F}_1\in\mathcal{Gl}(k)$$

$$\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{I}_q,\boldsymbol{0}]\boldsymbol{P}_2: \boldsymbol{F}_2\in\mathcal{Gl}(q),\ \boldsymbol{P}_2\in\mathcal{O}(p)$$

と書く。ここで $\mathcal{O}(n)$ は $n\times n$ 直交行列群，$\mathcal{Gl}(k)$ は $k\times k$ 正則行列群を示す。これから

$$\boldsymbol{Y}^*=\boldsymbol{P}_1'\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}_2'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1^*\\ \boldsymbol{Y}_2^*\end{pmatrix}\begin{matrix}k\\ n-k\end{matrix}$$
$$\sim N\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Omega}^*\right)$$

ただし $\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{\Omega}^*=\boldsymbol{P}_2'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{P}_2$, を得る。また

$$\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{i+1}=\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{F}_1^{-1}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{F}_2^{-1}\boldsymbol{X}_{i+1}\quad(i=3,5)$$

と仮定から，$\boldsymbol{P}_0\in\mathcal{O}(k)$, $\boldsymbol{Q}_0\in\mathcal{O}(q)$ が存在して

$$\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{F}_1^{-1}=\boldsymbol{F}_3(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_{m_3})\boldsymbol{P}_0,$$
$$\boldsymbol{X}_5\boldsymbol{F}_1^{-1}=\boldsymbol{F}_5(\underset{k-m_3}{\boldsymbol{0}},\ \underset{m_3-m_5}{\boldsymbol{0}},\ \boldsymbol{I}_{m_5})\boldsymbol{P}_0$$

$$\boldsymbol{F}_2^{-1}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{Q}_0\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_{r_4}\end{pmatrix}\boldsymbol{F}_4,\ \ \boldsymbol{F}_2^{-1}\boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{Q}_0\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_{r_6}\end{pmatrix}\boldsymbol{F}_6$$

ただし $\boldsymbol{F}_i\in\mathcal{Gl}(m_i)$, $\boldsymbol{F}_{i+1}\in\mathcal{Gl}(r_{i+1})\,(i=3,5)$ となる。ここで $\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{Q}_0'\boldsymbol{\Omega}^*\boldsymbol{Q}_0$ とおくと

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_0 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}^*\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_0 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$$

(3.4)

$$\sim N\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Sigma}\right)$$

となる。さらに

$$\tilde{\boldsymbol{\Theta}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$(3.5)\qquad =\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{11} & \boldsymbol{\Theta}_{12} & \boldsymbol{\Theta}_{13} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\Theta}_{21} & \boldsymbol{\Theta}_{22} & \boldsymbol{\Theta}_{23} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\Theta}_{31} & \boldsymbol{\Theta}_{32} & \boldsymbol{\Theta}_{33} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{array}{l}n_1\\ n_2\\ n_3\\ n_4\end{array}\\ \begin{array}{cccc}p_1 & p_2 & p_3 & p_4\end{array}\end{array}\quad \begin{array}{l}\sum n_i=n\\ \\ \sum p_i=p\end{array}$$

$n_1=k-m_3$, $n_2=m_3-m_5$, $n_3=m_5$, $n_4=n-k$, $p_1=q-r_6$, $p_2=r_4$, $p_3=r_6-r_4$, $p_4=p-q$ とおく。このとき(3.2)は

$$(3.6)\qquad \boldsymbol{\Theta}_{23}=\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Theta}_{33}=\mathbf{0}$$

となる。また仮説(3.3)は

$$(3.7)\qquad \boldsymbol{\Theta}_{32}=\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Theta}_{33}=\mathbf{0}$$

となる。したがって問題はモデル(3.4)において(3.6)のもとで仮説 $\boldsymbol{\Theta}_{32}=\mathbf{0}$ を検定することとなる。(II)の場合も同様に標準形を求めると，モデル(3.4)において(3.6)のもとで仮説 $\boldsymbol{\Theta}_{32}=\mathbf{0}$ を検定する問題となる(証明略)。

Gleser and Olkin (1970) は，第1節で述べたGMANOVA 問題を形式的に上の形の拡張されたGMANOVA 問題に拡張し，尤度比検定を次のように導出した。いま(3.4)の $\boldsymbol{Z}$ を(3.5)に対応する形で分解し

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_2)^{-1/2}\left[\boldsymbol{Z}_{32}-(\boldsymbol{Z}_{33}\boldsymbol{Z}_{34})\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_{33} & \boldsymbol{V}_{34}\\ \boldsymbol{V}_{43} & \boldsymbol{V}_{44}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{33}'\\ \boldsymbol{Z}_{34}'\end{pmatrix}\right]$$

$$\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{x}\boldsymbol{V}_{22,34}{}^{-1}\boldsymbol{x}'$$

$$\boldsymbol{T}_2=(\mathbf{0},\boldsymbol{I}_{n_3})\boldsymbol{S}_2(\mathbf{0},\boldsymbol{I}_{n_3})'$$

$$\boldsymbol{S}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{23} & \boldsymbol{Z}_{24}\\ \boldsymbol{Z}_{33} & \boldsymbol{Z}_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_{33} & \boldsymbol{V}_{34}\\ \boldsymbol{V}_{43} & \boldsymbol{V}_{44}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{23} & \boldsymbol{Z}_{24}\\ \boldsymbol{Z}_{33} & \boldsymbol{Z}_{34}\end{pmatrix}',$$

$$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{V}_{ij})\equiv(\boldsymbol{Z}_{4i}'\boldsymbol{Z}_{4j})$$

とおくと，尤度比検定は

$$|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1|>c$$

で与えられる。さらに Banken (1984) は Kariya (1978) と同様にして

$$(3.8)\qquad W_5\equiv \mathrm{tr}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_2)^{-1}[b\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1)^{-1}-p_2\boldsymbol{I}]>c$$

ただし $b=n_3+n_4-p_3-p_4$, が局所最良不変検定であることを示している。したがって定理2.1と同様に，

$$(3.9)\qquad U_5=W_5+n_3p_2-n_3p_2(p_3+p_4)/b$$

とおくと，U_5 の漸近展開は

$$P(U_5\leq x)=G_f(x)+\frac{f\gamma}{4b}[-G_f(x)+2G_{f+2}(x)-G_{f+4}(x)]+\frac{f(p_3+p_4)}{2b}[G_f(x)-G_{f+2}(x)]+O(b^{-2})$$

で与えられる。ここで $f=n_3p_2$, $\gamma=n_3+p_2+1$, $G_f(x)$ は自由度 f の χ^2 分布関数である。

次に局所ミニマックス性を考察しよう。上記の問題は，不変性を用いると結局モデル

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{22} & \boldsymbol{Z}_{23} & \boldsymbol{Z}_{24}\\ \boldsymbol{Z}_{32} & \boldsymbol{Z}_{33} & \boldsymbol{Z}_{34}\\ \boldsymbol{Z}_{42} & \boldsymbol{Z}_{43} & \boldsymbol{Z}_{44}\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\Theta}_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{I}\otimes\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\right)$$

ただし $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ は対応する分散行列に基づいて仮説 $\boldsymbol{\Theta}_{32}=0$ を検定する問題にほかならない。この縮約された問題は GMANOVA 問題であるから，Kariya (1978) に基づいて次の結果を得る。

定理 3.1　(3.8)によって定義される局所最良不変検定 ϕ^* は，Giri-Kiefer の意味で局所ミニマックスである。すなわち ϕ^* は

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\inf_\theta \pi(\boldsymbol{\theta},\phi^*)-\alpha}{\sup \phi_{\lambda\in Q}\inf_\theta\pi(\boldsymbol{\theta},\phi_\lambda)-\alpha}=1$$

を満たす。ここで α は有意水準，Q は水準 α をもつ検定全体，$\pi(\boldsymbol{\theta},\phi_\lambda)$ は検定 ϕ_λ の検出力，$\boldsymbol{\theta}\in\{(\boldsymbol{\Theta}_{32},\overline{\boldsymbol{\Sigma}})\,|\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Theta}_{32},\mathbf{0},\mathbf{0})\overline{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\boldsymbol{\Theta}_{32},\mathbf{0},\mathbf{0})=\lambda\}$ である。

証明は Kariya (1978) と平行的であるので省略する。

拡張 GMANOVA 問題となる例をみてみよう。

例 3.1　アジアの国4ヵ国から成るグループとアフリカの国3ヵ国から成るグループがあって，各グループ内の国は同じ成長パターンに従ってきたと考えられるものとする。ここでの問題は，その2つのグループの成長過程が同じであるかどうかを p 個の経済変数に基づいて検定することである。いまそれらの変数を

$$\boldsymbol{y}_{1j}(t)=(y_{1j1}(t),\cdots,y_{1jp}(t))'\quad(j=1,\cdots,4;\ t=1,\cdots,n)$$

$$\boldsymbol{y}_{2j}(t)=(y_{2j1}(t),\cdots,y_{2jp}(t))'$$
$$(i=1,2,3;\ t=1,\cdots,n)$$

で表わす。ここで最初の添字はグループを示す。

$$\boldsymbol{Y}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_{11}(1)' & \boldsymbol{y}_{12}(1)' & \boldsymbol{y}_{13}(1)' & \boldsymbol{y}_{14}(1)'\\ \boldsymbol{y}_{11}(2)' & \boldsymbol{y}_{12}(2)' & \boldsymbol{y}_{13}(2)' & \boldsymbol{y}_{14}(2)'\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{y}_{11}(n)' & \boldsymbol{y}_{12}(n)' & \boldsymbol{y}_{13}(n)' & \boldsymbol{y}_{14}(n)'\end{bmatrix}:n\times 4p$$

$$\boldsymbol{Y}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_{21}(1)' & \boldsymbol{y}_{22}(1)' & \boldsymbol{y}_{23}(1)'\\ \boldsymbol{y}_{21}(2)' & \boldsymbol{y}_{22}(2)' & \boldsymbol{y}_{23}(2)'\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{y}_{21}(n)' & \boldsymbol{y}_{22}(n)' & \boldsymbol{y}_{23}(n)'\end{bmatrix}:n\times 3p$$

とおく。各グループ内の国の成長過程が同じであるという仮定は，その平均成長過程が同じ，すなわち

$$E[\boldsymbol{y}_{11}(t)]=\cdots\cdots=E[\boldsymbol{y}_{14}(t)]\equiv\boldsymbol{\mu}_1(t)$$
$$E[\boldsymbol{y}_{21}(t)]=\cdots=E[\boldsymbol{y}_{23}(t)]\equiv\boldsymbol{\mu}_2(t)$$

$(t=1,\cdots,n)$ と表現されよう。ここで $\boldsymbol{\mu}_i(t)$ が $k-1$ 次の多項式で近似されるものとすると，

$$\mu_{ij}(t)=\beta_{ij0}+\beta_{ij1}t+\cdots\cdots+\beta_{ijk-1}t^{k-1}$$

$(i=1,2;\ j=1,\cdots,p)$ となる。そのときモデルは

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{E}\sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_n\otimes[\boldsymbol{I}_7\otimes\boldsymbol{\Sigma}])$$
$$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2]:n\times 7p,\quad \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2]:k\times 2p$$

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1^2 & \cdots & 1^{k-1}\\ 1 & 2 & 2^2 & & 2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{k-1}\end{pmatrix}:n\times k$$

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{pmatrix}\beta_{i10} & \cdots & \beta_{ip0}\\ \vdots & & \vdots\\ \beta_{ipk-1} & \cdots & \beta_{ipk-1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p\end{pmatrix}$$

と表現される(たとえば刈屋(1979)を見よ)。ここで，各グループの初期時点の水準$(t=0)$が同じであるという情報があるとしよう。この情報は

$$(3.10)\quad \begin{aligned}&\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{X}_3=(1,0,\cdots,0):1\times k\\ &\boldsymbol{X}_4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_p\\ -\boldsymbol{I}_p\end{bmatrix}:2p\times p\end{aligned}$$

と表現される。この情報のもとで，成長パターンが等しいという仮説は，

$$(3.11)\quad H:\boldsymbol{X}_5\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{X}_5=[\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_{k-1}]:(k-1)\times k,\quad \boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{X}_2$$

と表現される。それゆえこの問題は拡張GMANOVA問題である。この場合，仮定の $\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_5=\boldsymbol{M}_5\boldsymbol{M}_3$ はそのままの形では満たされない。しかし(3.10)の先験的情報と(3.11)の仮説を結びつけると結局仮説は

$$(3.12)\quad H:\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_6=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_3\\ \boldsymbol{X}_5\end{pmatrix}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{0}$$

となる。この仮説においては $\boldsymbol{M}_5=\boldsymbol{I}$ となり $\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_5=\boldsymbol{M}_5\boldsymbol{M}_3$ が成立する。それゆえ(3.10)のもとで(3.12)を検定する問題に対して，局所最良不変，局所ミニマックス検定が(3.8)で与えられる。

例 3.2　いま $\boldsymbol{x}_i=(\boldsymbol{x}_{1i}',\boldsymbol{x}_{2i}')':(p+q)\times 1$，$\boldsymbol{y}_j=(\boldsymbol{y}_{1j}',\boldsymbol{y}_{2j}')':(p+q)\times 1$ をそれぞれ $(p+q)$ 次元正規分布 $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，$N(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\Sigma})$ からのランダムサンプルとする。$(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m)$。ただし

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{pmatrix}\begin{matrix}p\\ q\end{matrix}\quad \boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}_1\\ \boldsymbol{\eta}_2\end{pmatrix}\begin{matrix}p\\ q\end{matrix}$$

とする。このときモデルは

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1'\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n'\\ \boldsymbol{y}_1'\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_m'\end{pmatrix}:(n+m)\times(p+q)$$

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}:(n+m)\times 2$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1' & \boldsymbol{\mu}_2'\\ \boldsymbol{\eta}_1' & \boldsymbol{\eta}_2'\end{pmatrix}:2\times(p+q),\quad \boldsymbol{e}_i=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

とおくと

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{E}\sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_{n+m}\otimes\boldsymbol{\Sigma})$$

と表現される。ここで $\boldsymbol{\mu}_2=\boldsymbol{\eta}_2$ が等しいという情報は

$$\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{X}_1=(1,-1):1\times 2$$

$$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_q\end{pmatrix}:(p+q)\times q$$

と表現される。この情報のもとで仮説

$$H:\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\eta}_1$$

を検定する問題は，Cochran and Bliss (1948)，Rao (1949)，Cochran (1964)，Kariya and Kanazawa(1978) 等によって考察された。この問題は仮説を

$$H: \boldsymbol{X}_5\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{X}_5=\boldsymbol{X}_3,\ \ \boldsymbol{X}_6=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

と表現すると拡張 GMANOVA 問題となる。ただしそれは GMANOVA 問題でない。この場合 $\boldsymbol{X}_5=\boldsymbol{X}_3$ と $\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{X}_4'\boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{0}$ より仮定が満たされ，局所最良不変検定が (3.8) で与えられる。この場合の仮説のもとでの exact 分布が Kariya and Kanazawa(1978) に与えられている。

4 ミッシングデータがある場合の平均値の検定

この節ではミッシングデータがある場合の平均値の検定を，拡張された GMANOVA 問題に埋込み，それによって一様最強力不変検定を導びく。ここで考えるモデルは

$$(4.1)\quad \begin{aligned}&\widetilde{\boldsymbol{Z}}\sim N(\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Sigma})\\ &\widetilde{\boldsymbol{W}}_2\sim N(\boldsymbol{e}_{m_2}\boldsymbol{\mu}_2', \boldsymbol{I}_{m_2}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{22})\end{aligned}$$

ただし $\widetilde{\boldsymbol{Z}}: n\times p$, $\widetilde{\boldsymbol{W}}_2: m_2\times p_2$, $\boldsymbol{e}_j=(1,\cdots,1)'\in R^j$, $p_1+p_2=p$, $\boldsymbol{\mu}=(\boldsymbol{\mu}_1', \boldsymbol{\mu}_2')': p\times 1$, $\boldsymbol{\mu}_i: p_i\times 1$ である。このモデルのもとで次の仮説検定問題を考察する。

$$(4.2)\quad H: \boldsymbol{\mu}_2=\boldsymbol{0}\ \text{versus}\ K: \boldsymbol{\mu}_2\neq\boldsymbol{0}$$

この問題では Bhargava(1962) が，更に一般的なミッシングデータのパターンの中で尤度比検定を導出している。また Eaton and Kariya(1983) では一様最強力不変検定を導出している。したがってここでの結果は，この問題が拡張 GMANOVA 問題として把握でき，それを利用することで一様最強力不変検定を導出することにある。

問題(4.2)を拡張 GMANOVA 問題の枠組に埋込むために，$\boldsymbol{P}\in\mathcal{O}(n)$, $\boldsymbol{Q}\in\mathcal{O}(m_2)$ で $\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n=(n^{1/2}, 0,\cdots,0)'$, $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_{m_2}=(m_2^{1/2}, 0,\cdots,0)'$ を満たすものをとる。そして

$$(4.3)\quad \begin{aligned}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}\widetilde{\boldsymbol{Z}}&=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{11} & \boldsymbol{Z}_{12}\\ \boldsymbol{Z}_{21} & \boldsymbol{Z}_{22}\end{pmatrix} & \begin{array}{l}1\\ n-1\end{array}\\ \begin{array}{cc}p_1 & p_2\end{array} & \end{array}\\ &\sim N\left(\begin{pmatrix}n^{1/2}\boldsymbol{\mu}_1', & n^{1/2}\boldsymbol{\mu}_2'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}, \boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Sigma}\right)\\ \boldsymbol{W}_2=\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{W}}_2&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_{12}\\ \boldsymbol{W}_{22}\end{pmatrix}\begin{array}{l}1\\ m_2-1\end{array}\\ &\sim N\left(\begin{pmatrix}m_2^{1/2}\boldsymbol{\mu}_2'\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}, \boldsymbol{I}_{m_2}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{22}\right)\end{aligned}$$

と定義する。基本的なアイディアは，ダミー確率変数 $\boldsymbol{W}_1^*$ を想定し，$\boldsymbol{W}_1^*$ を $\boldsymbol{W}_2$ に対応するミッシング部分とみなすことである。すなわち

$$(4.4)\quad \begin{aligned}(\boldsymbol{W}_1^*, \boldsymbol{W}_2)&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_{11}^* & \boldsymbol{W}_{12}\\ \boldsymbol{W}_{21}^* & \boldsymbol{W}_{22}\end{pmatrix}\\ &\sim N\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}' & m_2^{1/2}\boldsymbol{\mu}_2'\\ \boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}, \boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Sigma}\right)\end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{\eta}: p_1\times 1$, $\boldsymbol{\Delta}: (m_2-1)\times p_1$ と想定する。ここで重要な点は $\boldsymbol{\eta}$ と $\boldsymbol{\Delta}$ は $\boldsymbol{\mu}$ と独立であると考える点にある。このとき

$$(4.5)\quad \begin{aligned}\boldsymbol{Y}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{Y}_{12}\\ \boldsymbol{Y}_{21} & \boldsymbol{Y}_{22}\\ \boldsymbol{Y}_{31} & \boldsymbol{Y}_{32}\\ \boldsymbol{Y}_{41} & \boldsymbol{Y}_{42}\end{pmatrix}\begin{array}{l}1\\ 1\\ m_2-1\\ n-1\end{array}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{11} & \boldsymbol{Z}_{12}\\ \boldsymbol{W}_{11}^* & \boldsymbol{W}_{12}\\ \boldsymbol{W}_{21}^* & \boldsymbol{W}_{22}\\ \boldsymbol{Z}_{21} & \boldsymbol{Z}_{22}\end{pmatrix}\\ &\sim N\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\\ \boldsymbol{B}_{31} & \boldsymbol{B}_{32}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}, \boldsymbol{I}_{n+m_2}\otimes\boldsymbol{\Sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{B}_{11}=n^{1/2}\boldsymbol{\mu}_1',\ \ \boldsymbol{B}_{12}=n^{1/2}\boldsymbol{\mu}_2',\ \ \boldsymbol{B}_{21}=\boldsymbol{\eta}',$$
$$\boldsymbol{B}_{22}=m_2^{1/2}\boldsymbol{\mu}_2',\ \ \boldsymbol{B}_{31}=\boldsymbol{\Delta},\ \ \boldsymbol{B}_{32}=\boldsymbol{0}$$

となる。すなわちダミー変数 $\boldsymbol{W}_1^*$ を用いることでモデル(4.1)は

$$(4.6)\quad \begin{aligned}&\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E},\ \ \boldsymbol{E}\sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_{n+m_2}\otimes\boldsymbol{\Sigma})\\ &\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{m_2+1}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}: (n+m_2)\times(m_2+1)\\ &\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\\ \boldsymbol{B}_{31} & \boldsymbol{B}_{32}\end{pmatrix}: (m_2+1)\times p\end{aligned}$$

と書ける。更に，事前情報である $\boldsymbol{B}_{12}=c\boldsymbol{B}_{22}$, $\boldsymbol{B}_{32}=\boldsymbol{0}$ ただし $c=(m_2/n)^{1/2}$ は，

$$(4.7)\quad \begin{aligned}&\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}-c & 1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{m_2-1}\end{pmatrix}: m_2\times(m_2+1)\\ &\boldsymbol{X}_4=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_{p_2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と書け，また(4.2)の仮説 $\boldsymbol{\mu}_2=\boldsymbol{0}$ は

$$(4.8)\quad \begin{aligned}&\boldsymbol{X}_5\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{X}_5=(0, 1, 0): 1\times(1+m_2),\ \ \boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{X}_4\end{aligned}$$

と書ける。それゆえ問題(4.2)は拡張GMANOVA問題の特別な場合であることがわかった。後にみ

るように，導入された観測不能なダミー変数$\boldsymbol{W}_1^*$は，結局不変性によって除去される。(4.8)の問題を取り扱うため，

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} a & -ca & \mathbf{0} \\ ca & a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{m_2-1} \end{pmatrix} : (m_2+1)\times(m_2+1)$$

$a=1/(1+c^2)$とおく。このとき$\boldsymbol{P}\in\mathcal{O}(m_2+1)$と，(4.7)から

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{22}\\ \boldsymbol{\Theta}_{32}\end{pmatrix}$$

ただし

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{11} & \boldsymbol{\Theta}_{12}\\ \boldsymbol{\Theta}_{21} & \boldsymbol{\Theta}_{22}\\ \boldsymbol{\Theta}_{31} & \boldsymbol{\Theta}_{32}\end{pmatrix}$$

$$(4.9)\qquad =\begin{pmatrix} a(\boldsymbol{B}_{11}+c\boldsymbol{B}_{21}) & a(\boldsymbol{B}_{12}+c\boldsymbol{B}_{22})\\ a(-c\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21}) & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{B}_{31} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}$$

を得る。ここで$\boldsymbol{\Theta}_{12}$はダミーパラメータ$\boldsymbol{\eta}$と$\boldsymbol{\Delta}$に依存していないことに注意する。次に

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}' & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}$$

とおくと，モデル(4.6)は

$$(4.10)\qquad \boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_{ij})\sim N\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{\Sigma}\right)$$

ただし$\boldsymbol{\Theta}_{22}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Theta}_{32}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{U}_{ij}: n_i\times p_j (i=1,\cdots,4 : j=1,2)$, $n_1=n_2=1$, $n_3=m_2-1$, $n_4=n-1$となる。他方仮説(4.8)は，$\boldsymbol{\Theta}_{22}=\mathbf{0}$を用いると

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{X}_5\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_6=\boldsymbol{X}_5\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{X}_6=ca\boldsymbol{\Theta}_{12}$$

となる。それゆえ問題はモデル(4.9)(4.10)において，$\boldsymbol{\Theta}_{12}=\mathbf{0}$を検定することになる。不変性原理を適用すると，問題はさらにモデル

$$\boldsymbol{U}_2=(\boldsymbol{U}_{12}', \boldsymbol{U}_{22}', \boldsymbol{U}_{32}', \boldsymbol{U}_{42}')' \sim N((\boldsymbol{\Theta}_{12}', \mathbf{0}', \mathbf{0}', \mathbf{0}')',\ \boldsymbol{I}_{n+m_2}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{22})$$

において，$\boldsymbol{\Theta}_{12}=\mathbf{0}$を検定する問題に帰結され，従って MANOVA 問題の結果から次の定理を得る。

定理 4.1　棄却域

$$T\equiv\boldsymbol{U}_{12}(\boldsymbol{U}_{22}'\boldsymbol{U}_{22}+\boldsymbol{U}_{32}'\boldsymbol{U}_{32}+\boldsymbol{U}_{42}'\boldsymbol{U}_{42})^{-1}\boldsymbol{U}_{12}' > c$$

をもつ検定は，一様最強力不変検定である。仮説のもとでの$(n+m_2-1)T$の分布は，自由度1, $n+m_2-1$のF分布である。

これは結果的に尤度比検定であり，この定理はそれが一様最強力不変であることを示している。

5　見かけ上無相関な回帰モデル

周知のように Zellner (1962, 1963) は，誤差項が互いに相関をもつ複数の回帰式がある場合，GLS(一般化最小2乗)法を用いて同時にそれらを推定する方が，OLS(通常の最小2乗)法を用いて個別的推定するよりも有効(efficient)であることを示した。しかし未知の分散行列は標本分散行列で置きかえるため，標本数が小さいかもしくは方程式間の相関が小さいと必ずしも GLSE は OLSE よりも有効とならないことが知られている(*e.g.*, Mehta and Swamy (1976))。Kariya (1981) は2つの回帰式の間の相関がゼロという仮説検定問題を考察し，局所最良不変検定を導出している。ここでは，2つの回帰式をもつ SUR モデルにおいて，個別方程式の係数のt検定の最適性を拡張 GMANOVA 問題との関連で議論する。まず2つの回帰式を

$$(5.1)\qquad \begin{aligned}&\boldsymbol{y}_i=\tilde{\boldsymbol{X}}_i\boldsymbol{\beta}_{ij}+\boldsymbol{\varepsilon}_i,\quad E(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\mathbf{0}\\ &E(\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{\varepsilon}_j')=\sigma_{ij}\boldsymbol{I}_n\end{aligned}$$

$(i, j=1, 2)$とおく。ここで

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_i : n\times k_i,\quad \mathrm{rank}(\tilde{\boldsymbol{X}}_i)=k_i$$

とする。$\boldsymbol{\varepsilon}_j$に正規性を仮定する。このときこのモデルは，多変量回帰モデルの形として

$$(5.2)\qquad \begin{aligned}&\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{E}\sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Sigma})\\ &\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2],\quad \boldsymbol{X}=[\tilde{\boldsymbol{X}}_1, \tilde{\boldsymbol{X}}_2]\\ &\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2],\quad \boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})\\ &\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{11} & \boldsymbol{\beta}_{12}\\ \boldsymbol{\beta}_{21} & \boldsymbol{\beta}_{22}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_{12}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\beta}_{21}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

と表現される。通常の多変量回帰モデルとの相異は，係数行列$\boldsymbol{B}$に事前情報$\boldsymbol{\beta}_{12}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta}_{21}=\mathbf{0}$があること，一般に回帰行列$\boldsymbol{X}$はフルランクでないこと，である。刈屋(1979)で指摘しているように，その先験的情報は，適当な行列$\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4$を用いて

$$\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{X}_0$$

の形に表現されない。したがって Zellner モデルは GMANOVA 問題の状況と異なる。しかしその事前情報は

$$X_3BX_4=\mathbf{0},\quad X_5BX_6=\mathbf{0}$$

(5.3) $$X_3=[I_{k_1},\mathbf{0}],\quad X_4=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$X_5=[\mathbf{0},I_{k_2}],\quad X_6=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

と表現される。これは第3節で述べた拡張 GMANOVA モデルの特別な場合である。この視点のもとに，仮説検定問題

(5.4) $H:\boldsymbol{\beta}_{111}=\mathbf{0}$ versus $K:\boldsymbol{\beta}_{111}\neq\mathbf{0}$

を考える。ただし $\boldsymbol{\beta}_{111}:l\times 1$ は，第1方程式の係数ベクトル $\boldsymbol{\beta}_{11}$ の最初の l 個の要素からなるベクトル，すなわち

$$\boldsymbol{\beta}_{11}'=(\boldsymbol{\beta}_{111}',\boldsymbol{\beta}_{112}')$$

である。上の仮説は明らかに

(5.5) $$X_7BX_8=\mathbf{0},\quad X_7=[I_l,\mathbf{0}],\quad X_8=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

と記述されるのでこの問題は拡張 GMANOVA 問題にほかならない。特に $l=1$ のときは，第1方程式の第1係数の有意性をみる検定問題がその特別な場合として含まれている。もちろん検定問題(5.4)に対して，第2方程式との相関を無視して第1方程式のみのデータによって通常の F 検定($l=1$ のときは t 検定)を行うことができる。その場合，もしモデルが第1方程式のみから成るものであれば，その検定は一様最強力不変検定である。しかし現在のわれわれのモデルは，(5.1)もしくは(5.2)であって，その中で検定の最適性を評価しなくてはならない。それは，モデル(5.1)において GLSE の OLSE に対する優位性を主張することと対応している。この節の以下の狙いは，まず不変性原理に基づいて問題の構造を明らかにすること，次に SUR モデル(5.2)の中で不変性の見地から何らかの最適性をもつ検定が存在するかどうかを問うこと，そして最後に第1方程式のみのデータに基づく通常の F 検定($l=1$ のときは t 検定)はどのような最適性を保有しているかをみることである。

問題の構造を明らかにするため，標準形を求めよう。そのため

(5.6)
$$N_j=I_n-\tilde{X}_j(\tilde{X}_j'\tilde{X}_j)^{-1}\tilde{X}_j'\quad (j=1,2)$$
$$N_0=I-X(X'X)^{+}X'$$
$$R_j=X(X'X)^{+}X'-\tilde{X}_j(\tilde{X}_j'\tilde{X}_j)^{-1}\tilde{X}_j'\quad (j=1,2)$$
$$r_j=\mathrm{rank}(X)-k_j\quad (j=1,2)$$

とおく。さらに H_j を $n\times r_j$ の行列で

(5.7) $$H_jH_j'=R_j,\quad H_j'H_j=I_{r_j}$$

を満たすもの，また L_0 を $n\times q_0$ の行列で

(5.8)
$$N_0=L_0L_0',\quad L_0'L_0=I_{q_0}$$
$$q_0=n-\mathrm{rank}(X)$$

を満たすものとする。そして

(5.9)
$$L_j=[L_0,H_j]:n\times q_j,$$
$$q_j=n-k_j\quad (j=1,2)$$

とおく。このとき

(5.10) $$L_j'L_j=I_{q_j},\quad L_jL_j'=N_j$$

が成立する。したがって $L_j'\tilde{X}_j=\mathbf{0}$ であることに注意して

(5.11) $$P_j=[\tilde{X}_j(\tilde{X}_j'\tilde{X}_j)^{-1},L_j]:n\times n$$

とおき，

(5.12)
$$P_j'y_j=\begin{pmatrix}(\tilde{X}_j'\tilde{X}_j)^{-1}\tilde{X}_j'y_j\\ L_0'y_j\\ H_j'y_j\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}b_{jj}\\ v_j\\ u_j\end{pmatrix}\end{array}\!\!\begin{array}{l}k_j\\ q_0\\ r_j\end{array}\equiv w_j$$

$(j=1,2)$ とおくと，モデルの標準形は

$$V=(v_1,v_2):q_2\times 2\sim N(\mathbf{0},I\otimes\boldsymbol{\Sigma})$$

(5.13)
$$c=\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{22}\\ u_1\\ u_2\end{pmatrix}:(k_1+k_2+r_1+r_2)\times 1$$
$$\sim N\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_{11}\\ \boldsymbol{\beta}_{22}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11}&\boldsymbol{\Omega}_{12}\\ \boldsymbol{\Omega}_{21}&\boldsymbol{\Omega}_{22}\end{pmatrix}\right)$$

ただし

$$\boldsymbol{\Omega}_{11}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}(\tilde{X}_1'\tilde{X}_1)^{-1}&\sigma_{12}(\tilde{X}_1'\tilde{X}_1)^{-1}\tilde{X}_1'\tilde{X}_2(\tilde{X}_2'\tilde{X}_2)^{-1}\\ &\sigma_{22}(\tilde{X}_2'\tilde{X}_2)^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{12}=$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_{12}(\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\tilde{\boldsymbol{X}}_1)^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\boldsymbol{H}_2 \\ \sigma_{21}(\tilde{\boldsymbol{X}}_2'\tilde{\boldsymbol{X}}_2)^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}_2'\boldsymbol{H}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{22}=\begin{pmatrix} \sigma_{11}\boldsymbol{I}_{r_1} & \sigma_{12}\boldsymbol{H}_1'\boldsymbol{H}_2 \\ \sigma_{21}\boldsymbol{H}_2'\boldsymbol{H}_1 & \sigma_{22}\boldsymbol{I}_{r_2} \end{pmatrix}$$

となる。ここで $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{c}$ は独立である。このモデルと仮説(5.5)の形から，加法群 $R^{k_1-l}\times R^{k_2}$ を $(\boldsymbol{b}_{112}, \boldsymbol{b}_{22})$ に作用させることで，結局不変性の見地からモデルは

$$\boldsymbol{V}\sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{\Sigma})$$

$$\text{(5.14)}\quad \boldsymbol{e}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_{111}\\ \boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_{111}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\sigma_{11}\boldsymbol{E}_{11} & \mathbf{0} & \sigma_{12}\boldsymbol{F}_{12}\\ \mathbf{0} & \sigma_{11}\boldsymbol{I} & \sigma_{12}\boldsymbol{H}_1'\boldsymbol{H}_2\\ \sigma_{21}\boldsymbol{F}_{21} & \sigma_{21}\boldsymbol{H}_2'\boldsymbol{H}_1 & \sigma_{22}\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\right)$$

と縮約される。ただし

$$(\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\tilde{\boldsymbol{X}}_1)^{-1}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{11} & \boldsymbol{E}_{12}\\ \boldsymbol{E}_{21} & \boldsymbol{E}_{22}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} l \\ k_1-l\end{array}$$

$$\begin{aligned}\text{(5.15)}\quad \boldsymbol{F}_{21}'=\boldsymbol{F}_{12}&=(\boldsymbol{E}_{11}\ \boldsymbol{E}_{12})\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\boldsymbol{H}_2\\ &=(\boldsymbol{E}_{11}\ \boldsymbol{E}_{12})\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_2'\boldsymbol{H}_2\\ &=(\boldsymbol{E}_{11}\ \boldsymbol{E}_{12})\\ &\quad\times[\tilde{\boldsymbol{X}}_1'-\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\tilde{\boldsymbol{X}}_2(\tilde{\boldsymbol{X}}_2'\tilde{\boldsymbol{X}}_2)^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}_2']\boldsymbol{H}_2\\ \boldsymbol{H}_1'\boldsymbol{H}_2&=\boldsymbol{H}_1'\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_1'\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_2'\boldsymbol{H}_2\\ &=\boldsymbol{H}_1'[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{+}\boldsymbol{X}'\\ &\quad-\tilde{\boldsymbol{X}}_1(\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\tilde{\boldsymbol{X}}_1)^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\\ &\quad-\tilde{\boldsymbol{X}}_2(\tilde{\boldsymbol{X}}_2'\tilde{\boldsymbol{X}}_2)^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}_2'\\ &\quad+\tilde{\boldsymbol{X}}_1(\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\tilde{\boldsymbol{X}}_1)^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}_1'\tilde{\boldsymbol{X}}_2\\ &\quad\times(\tilde{\boldsymbol{X}}_2'\tilde{\boldsymbol{X}}_2)^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}_2']\boldsymbol{H}_2\end{aligned}$$

(5.14)のモデルで $\boldsymbol{\beta}_{111}=\mathbf{0}$ を検定する問題は，変換

$$\boldsymbol{b}_{111}\to a_1\boldsymbol{b}_{111},\ \ \boldsymbol{u}_i\to a_i\boldsymbol{u}_i,\ \ \boldsymbol{v}_i\to a_i\boldsymbol{v}_i\quad (i=1, 2)$$

ただし

$$(a_1, a_2)\in(R^*)^2,\quad R_*=\{x\in R|x\neq 0\}$$

のもとで不変である。この変換群のもとで Wijsman (1967) の最大不変量の分布の表現定理を用い，Eaton and Kariya (1983) もしくは Kariya (1981) と同じ議論を用いると次の定理を得る。その証明は紙幅の都合上省略する。

定理 5.1 局所不変検定は存在しない。

したがって第1方程式のみに基づく F 検定は SUR モデルの中では局所最良不変検定でもなく，ましてや一様最強力不変検定でない。他方，それは仮説 $\boldsymbol{\beta}_{111}=\mathbf{0}$ のもとでパラメータに依存しない相似検定である。上の状況は，$(\boldsymbol{b}_{111}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1)$ に加えて追加的な情報 $(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2)$ をもつことが F 検定の最適性を損わしめていることを示している。決定理論的にみて興味ある問題は，(1) $(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2)$ を用いた(無意味でない)不偏検定が存在するか，(2) 通常の F 検定は許容的であるか，という問題である。ここではその問題を残したままにしておく。

次に通常の F 検定が SUR モデル (1.1) の中で最適性をもつ状況を考えよう。縮約モデル (5.14) の $\boldsymbol{e}$ の分散行列において，もし

$$\text{(5.16)}\quad \boldsymbol{F}_{12}=\mathbf{0},\ \ \boldsymbol{H}_1'\boldsymbol{H}_2=\mathbf{0}$$

ならば，$\boldsymbol{b}_{111}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は互いに独立になる。しかし $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が相関をもっているため，必ずしもその独立性だけでは F 検定の最適性を保証しないが，(5.16)が成立する必要十分条件は

$$\text{(5.17)}\quad \tilde{\boldsymbol{X}}_2(\tilde{\boldsymbol{X}}_2'\tilde{\boldsymbol{X}}_2)^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}_2'\tilde{\boldsymbol{X}}_1=\tilde{\boldsymbol{X}}_1$$

となることが容易に示され，このもとでは (5.6) の $\boldsymbol{R}_2$ が $\mathbf{0}$，したがって $\boldsymbol{H}_2=\mathbf{0}$，それゆえ $\boldsymbol{u}_2=\mathbf{0}$ を得る。この場合，(5.14)のモデルで $\boldsymbol{\beta}_{111}=\mathbf{0}$ を検定する問題は，下三角正則行列群

$$\left\{\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\middle|\, a_{11}a_{22}\neq 0\right\}$$

と直交群による作用

$$\boldsymbol{b}_{111}\to a_{11}\boldsymbol{b}_{111},\ \ \boldsymbol{u}_1\to a_{11}\boldsymbol{u}_1,\ \ \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{CVA}$$

のもとで不変となる。ただし $\boldsymbol{C}$ は $q_0\times q_0$ の直交行列である。この群のもとでは結局 $\boldsymbol{v}_2$ が不変性によって消去されてしまうので次の定理を得る。

定理 5.2 条件(5.17)のもとで，第1方程式のみに基づく通常の F 検定は，SUR モデルでの検定問題(5.4)に対して一様最強力不変である。

(5.17)の条件の特別の場合として，$\tilde{\boldsymbol{X}}_1$ が $\tilde{\boldsymbol{X}}_2$ の部分行列

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_2=[\tilde{\boldsymbol{X}}_1, \tilde{\boldsymbol{X}}_3]$$

がある。Revankar (1974) では，1例として需要関数と供給関数の誘導形があって，価格関数の方

に数量関数に含まれている説明変数に加えて別な説明変数が含まれている場合を挙げている。Revankar (1974) はまたこの場合の GLSE の性質を調べている。

(一橋大学経済研究所)

参考文献

[1] 刈屋武昭 (1979)『回帰分析の理論』岩波書店。

[2] Banken, L. (1984), "On the reduction of the General MANOVA model," Tech. Rep.

[3] Bhargava, R.N.P. (1962), "Multivariate tests of hypotheses with incomplete data," Tech. Rep. 3, Stanford Univ.

[4] Bhattacharya, R. N. and Ghosh, J. K. (1978), "On the validity of the formal Edgeworth expansion," *Ann. Statist.*, 6, 434–451.

[5] Cochran, W. G. (1964), "Comparison of two methods of handling covariates in discriminant analysis," *Ann. Inst. Statist. Math.*, 16, 43–49.

[6] Cochran, W. G. and Bliss, C. I. (1948), "Discriminant functions with covariance," *Ann. Inst. Statist. Math.*, 19, 151–165.

[7] Eaton, M. L. and Kariya, T. (1983), "Multivariate tests with incomplete data," *Ann. Statist.*, 11, 654–665.

[8] Fujikoshi, Y. (1970), "Asymptotic expansions of the distributions of test statistics in multivariate analysis," *Jour. Science Hiroshima Univ.* A–I, 34, 73–144.

[9] Fujikoshi, Y. (1973), "Asymptotic expansions of the nonnull distributions of three statistics in GMANOVA," *Ann. Inst. Statist. Math.*, 25, 289–297.

[10] Fujikoshi, Y. (1984), "Error bounds for asymptotic approximations to the distribution functionof an estimate in a multivariate linear model," Hiroshima Univ. Tech. Rep.

[11] Gleser, L. J. and Olkin, J. (1970), "Linear models in multivariate analysis," *Essays in Probability and Statistics*, 267–292.

[12] Kariya, T. (1978), "The general MANOVA problem," *Ann. Statist.*, 6, 200–214.

[13] Kariya, T. and Kanazawa, M. (1978), "A locally best invariant test for the equality of means in the presence of covariates," *Jour. Multivar. Analysis*, 8, 134–140.

[14] Kariya, T. (1980), "Tests for the independence between two seemingly unrelated regression equations," *Ann. Statist*, 9, 381–390.

[15] Kariya, T. (1982), "A test for similarity between two groups of growth curves of economic time series variables," *Advances in Econometrics*, 1, 301–310.

[16] Kariya, T. and Maekawa, K. (1981), "A method for approximations to the pdf's of GLSE's and its application to the seemingly unrelated model," *Ann. Inst. Statist. Math.*, 34, 281–297.

[17] Kariya, T., Krishnaiah, P. R. and Rao, C. R. (1983), "Statistical inferences from multivariate normal population when some data is missing," *Development in Statistics*, 4, 137–184.

[18] Khatri, C. G. (1966), "A note on a MANOVA model applied to problems in growth curve," *Ann. Inst. Statist. Math.*, 18, 75–86.

[19] Lehmann, F. L. (1959), *Testing Statistical Hypotheses*, Wiley.

[20] Mehta, J. S. and Swamy, P. A. V. B. (1976), "Further evidence on the relative efficiencies of Zellner's seemingly unrelated regressions estimator," *JASA*, 71, 634–639.

[21] Rao, C. R. (1949), "On some problems out of discrimination with multiple character," *Sankhyā*, 9, 343–366.

[22] Revankar, N. S. (1974), "Some finite sample results in the context of two seemingly unrelated regressions equations," *JASA*, 69, 187–190.

[23] Wijsman, R. A. (1967), "Cross sections orbits and their application to densities of maximal invariants," *Fifth Berk. Symp.*, 1, 389–400.

[24] Zellner, A. (1962), "An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias," *JASA*, 57, 348–368.

[25] Zellner, A. (1963), "Estimators for seemingly unrelated regressions," *JASA*, 58, 977–992.