特集　国民経済計算

［調 査］ SNA における投入・産出表の構造と技術仮定

以下の調査は別個に成立の機縁を持つが，相互に関連する2つの独立な研究より構成される。第Ⅰ部の「SNAにおける投入・産出分析と技術仮定」は，脚註においても述べたように，倉林と作間とによって進められている新SNAをめぐる研究と討議からの一端の結果である。この研究において，筆者はSNAにおける投入・産出表が第2次生産物を明示的に体系の中にとり入れたユニークな表示となっていることの独創性を評価しながらも，その産出額の決定に本質的な影響を与える2つの交代的な「技術仮定」――商品技術仮定と産業技術仮定――の設定の間に整合性が必ずしも保たれない事実に注目する。この困難はSNAに説かれる「技術仮定」の内容が投入と産出を結ぶ技術構造としては必ずしも明確に定義づけられていないことにも由来している。筆者はこれらのSNAの技術仮定に代る仮説として，後述する「F技術仮説」を提案し，産出額の決定に関する上述の困難が容易に解消せられることを示す。さらに，この「F技術仮説」が実行可能な仮説であることを示すためSNAに例示されている数値例を用いて，$\boldsymbol{F}$ 行列の意味のある誘導が可能であること，ならびにSNAにおける投入係数行列との比較，混合技術仮定への拡張などの数値実験の結果を報告する。

この調査の第Ⅱ部を形成する「投入構造，産出構造と技術仮説」は第Ⅰ部で扱われたもろもろの技術仮定を結合生産物を含む投入と産出構造の場の上に位置づけることによってそれらの成立を可能にする条件を明らかにすることを企図するもので，倉林と八束とによって試みられたものである。そこでは，(結合生産を含む)産出構造と投入構造の定式化を与えることにより，第Ⅰ部で議論された技術仮定をこれらの産出構造と投入構造の有効集合から導れる産出函数もしくは投入函数として誘導し，特定化することが試みられる。これらの誘導の過程に即し，もっぱら効率性の観点からではあるが，SNAの技術仮定が含意する特殊性と制約が指摘されるとともに，いわゆる「F技術仮説」の技術的特性と他の技術仮定との相互関連が明らかにされる。とくに，これらの相互関連の解明において，投入構造ないし産出構造の相似拡大性が重要な役割を演じていることは興味深い。そのため，第Ⅱ部の議論では投入構造と産出構造の相似拡大性から導れる若干の帰結について独立の節を設けて議論しておいた。第Ⅱ部で注意される多くの性質と主張の論証には，少くとも第Ⅱ部と同じ程度の分量が必要である。このため，これらの性質と主張の論証は一切省略せざるをえなかった。別の機会に補うつもりである。

第Ⅱ部の考察における決定的な制約は，(1)投入構造と産出構造が(価値額ではなく)物量の次元で定式化されていること，および(2)技術構造の特性をすべて効率性の一点にしぼっていることにある。上述の相似拡大性の議論における費用函数と収入函数の設定は技術構造に対する価格要因の導入の可能性を示唆するものであるが，今回の考察では陽表的には取り上げられていない。第Ⅰ部と第Ⅱ部との間に残されているギャップを埋めることは今後の課題である。また，SNAの技術仮定を投入構造と産出構造の効率性に還元し，その尺度の上のみで評価することにも問題がある。もともと，産業における技術の選択は，効率性のみだけでなく，産業が参入し関与する市場の構造や，個々の産業をとりまく制度や組織によっても左右される。これらの側面の分析は第Ⅱ部の考察の射程の外にある問題であるが，第Ⅰ部の分析を徹底する見地からするならば，その重要性を認識しておくべきことがらであろう。

以上の調査の編成からも明らかのように，担当の著者は分担のそれぞれの部分についてのみ責任を負うものであることを附記しておく。

第Ⅰ部
SNAにおける投入・産出分析と技術仮定*

1. はじめに

新SNAの名で呼ばれる国連の国民経済計算体系が投

＊　小論は，はじめ作間によって指摘された着想を両名の共同討議によって展開し，その結果を倉林がとりまとめたものである。第3節における数値計算に関しては，一橋大学電子計算機室の諸氏，とくに有田富美子氏の援助に負うところが多大であった。特に記し

入・産出分析との統合を目指して新しい提案を行っていることは，この新SNAの積極的な貢献とされている[1]。この提案はSNAの第3章に展開され，これを承けてSNAにおける投入・産出表の構造が続く第4章の数量と価格の体系の基礎として用いられていることもよく知られた事実である。このSNAにおける投入・産出表は生産活動に流入し，またこの活動から流出する対象物(財・サービスの流れ)とこれらの生産活動を担う主体とを区別し，この区別に立脚して中間生産物の流れと産出の流れを分類したところに最大の独自性を見出すことができる。SNAにおいて，この対象物のことはしばしば「商品」(commodities)の名で呼ばれる。さしあたり以下の考察においては，それはコストの回収を意図して市場において売買の対象となる財およびサービスに限定されていると考えておく[2]。また，生産活動の担い手となる主体は「産業」(industries)の名で総称され，とくに商品の生産の担い手となる産業は当該商品の生産活動を遂行する事業所の集りによって構成されるものと考える。

その結果，中間生産物の投入の流れは伝統的なレオンチェフ体系における想定と異り，特定の商品が特定の産業に中間投入として流入すると言う表現様式をとることになる。SNAの第3章の中で$\boldsymbol{U}$行列として表現される行列は上に述べた中間生産物の投入の流れを要素とする行列である。この中間生産物の投入と本源的生産要素の協働から生産される産出の流れはSNAにおける投入・産出表を決定的に特徴づけるものと言ってよいと思われる。すなわち，産業は必ずしも1つの商品のみを生産するとは仮定されていないため，「主要生産物」(characteristic products)と「第2次生産物」(secondary products)が区別されるからである。ただし第2次生産物という用語は実はSNAでは用いられていない。ここで第2次生産物と名付けるものは，ある産業によって生産される商品の中で主要生産物とはならないもののすべてを言う。ところが，SNAはこの第2次生産物を指すのに「副次的生産物」(subsidiary products)と言う表現を使っている個所(3.3節)がある。しかし，この副次的生産物と言う用語はある場合(3.15節)はそのまま，また別の個所(例えば，3.24節)では「通常の(ordinary)副次的生産物」と言う表現で「副産物」(by-products)と対立する概念として用いられており，誤解を生じ易い用例となっている。副次的生産物と区別される副産物とは，コークス産業において産出されるガスのように，ある産業の主要生産物の生産工程と密接に結びついている商品を言い，この結びつきがない商品が(通常の)副次的生産物であるとされている(3.15節)。

その結果伝統的なレオンチェフ体系のように1つの産業が1つの(主要生産物としての)商品を生産するのではなく，生産活動の成果は産業の主要生産物と第2次生産物との分布状況を示す行列に要約される。SNA第3章で$\boldsymbol{V}$行列として表示される行列がそれである。したがって，産出のベクトルも一方では商品別のベクトルとして，また他方では産業別のベクトルとしての2つの表記が並列されることになる。中間生産物の投入行列と産出ベクトルを結ぶ関係が周知の生産函数もしくは生産の技術的関係であるが，産出ベクトルの2つの表記法および$\boldsymbol{U}$行列の技術との関連で，商品の観点から見た投入・産出の技術的関係と産業の観点から見た投入・産出の技術的関係とが併存する結果となる。SNAが2つの極端な場合(3.24節)として想定する「商品技術仮定」(the assumption of a commodity technology)と「産業技術仮定」(the assumption of an industry technology)は上述の2つの観点から見た投入・産出の技術関係を明示するためのものである。

こうした独自の構想を持つ投入・産出分析の提案にも拘らず，SNAにおける投入・産出分析に対し，理論と実証の両面において，この独自の構想にふさわしい関心と検討が進められているとは言い難いようである[3]。以

て感謝の意を表する。起りうべき誤謬の責は，いうまでもなく，著者の両名に帰せられる。

1) United Nations, *A System of National Accounts*, New york 1968. 以下この書物を単にSNAと略称する。この書物からの引用の個所は本文のカッコ内に章，節番号によって示す。

2) 当面の考察は別としても，SNAの枠組みおよび「生産の理論」の観点からすると，この想定はやや単純な限定に過ぎる。まず，SNAの枠組みの中で，もコストの回収を意図して，市場で売買の対象となる財・サービス以外の実物的対象物の流れが記録されている。その代表的な一例は，「政府サービスの生産者」(producers of government services)によって生産される共通サービス(5.24節)—いわゆる公共サービス—である。また，「生産の理論」の観点からすれば，一般的な考察として，「望ましい産出」(desirable output)だけでなく「望ましくない産出」(undesirable output)の存在をも許容する生産のモデルの構成(例えば，Ronald W. Shephard, *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton Uniwersity Press, Princeton 1970, p. 187)が考慮されなければならないからである。小論ではこれらの論点の考察に立入る余裕を持っていない。

3) わが国における数少い言及の例としては，宮沢健一，「産業ベース＝商品ベースの変換と生産係数」

下の小論はこの検討のための試論と実験の試みを要約したものである。まず第2節において，SNA の投入・産出分析の枠組みに即しながら前述2のつの技術仮定の比較を通して，SNA の第3章における本文と数学附録の間で技術仮定の理解に統一が図られていないことに注目する。われわれは，商品に関する投入・産出の技術関係が生産函数の骨格であるとの認識から出発し[4]，商品技術仮定の代替的な定式化を提案する。つぎに提案された商品技術仮定を用いると，SNA における投入・産出分析が相当な程度簡単化されること，あわせて混合技術仮定への拡張の可能性を示す。これは「極端な場合」の制約を緩和するための1つの企てである。第3節では，SNA の第3章に掲げられている数値例を利用して，前節で提案された商品技術仮定が実行可能であることを示す数値計算の結果を紹介し，補足的な実験の結果を報告する。

2. SNA における投入・産出分析と技術仮定

SNA の叙述に従って投入・産出表の枠組みと記号を次のように定める(第1表)。

第1表　$I-O$ 行列

		P		NP	Σ
		COM	IND		
P	COM	·	U	e	q
	IND	V	·	·	g
NP		·	y'	·	η
Σ		q'	g'	η	·

記号の説明に入るに先立って，次の仮定を置く。

(A. 1)　上記の $I-O$ 行列において商品(COM)と産業(IND)の数は同一で，n である。

一般性の見地からすれば，この仮定はある程度まで限定的であると言えるかもしれない。しかし投入・産出表の実用の見地からすれば，この仮定は一見するほど非現実的であるとは思われない。少くともそのように考えることのできる若干の理由がある。まず第1に作表の過程は別にして，公表の段階における投入・産出表の大きさにはおのずからの節度がある。最もふつうに用いられる伝統的な投入・産出表の部門の数の上限は高々 $n=200$ 程度であろう。この程度の大きさであれば，産業と商品の数を一致させておくことは決して非現実的な仮定であるとは言えない。第2に，以下の分析—従ってまた SNA の分析—にとってこの仮定が決して致命的な制約を与えるものではないことも指摘しておくべきであろう。以下において詳しく見るように，V 行列が本質的な重要性と役割を主張しうる場合と言うのは，1つの産業に必ず主要生産物と第2次生産物が同時に存在すること。言い換えると，V が主対角行列とはならないことであって，この特性は必ずしもただちに商品の数と産業の数が同一ではないことを要求するものではない。これは小さい理由であるが，第3に，SNA の第3章(と第4章)の数学附録において前記 A. 1 が前提されて演算が進められる場合に一再ならず遭遇する。このことは SNA の投入・産出分析にとって A. 1 の仮定が決して致命的な重要性を持つものではないことを示唆するものと思われる。

A. 1 を前置きとして再び $I-O$ 行列における記号の説明に戻る。その前に簡単にこの $I-O$ 行列の枠組みを説明しておこう。表の P と NP はそれぞれ「生産活動」と「生産活動以外の活動」を表わし，Σ は合計を示す記号である。生産活動の場は前節で注意したように商品と産業によって特徴づけられ，それらをそれぞれ COM と IND によって表わす。記号の大文字は行列，小文字はベクトル，ギリシャ体はスカラーを表わすものと約束し，ベクトルに附されるダッシュ記号は転置を表わす。

- $\boldsymbol{U}$，中間生産物の投入を表わす $n\times n$ 行列であって，その要素 u_{ij} は i 商品の j 産業への中間投入を示す。
- $\boldsymbol{V}$，産出の構成を表わす $n\times n$ 行列であって，その要素 v_{kl} は k 産業で生産された l 商品の産出を表わす。
- $\boldsymbol{e}$，最終生産物の商品別構成を示す n 個の要素より成る列ベクトル。
- $\boldsymbol{q}$，産出の商品別構成を示す n 個の要素より成る列ベクトル。
- $\boldsymbol{g}$，産出の産業別構成を示す n 個の要素より成る列ベクトル。
- $\boldsymbol{y}$，附加価値(本源的要素の投入に対する報酬)の産業

『一橋論叢』昭和41年11月号，武野秀樹『国民経済計算の基礎』昭和45年などを挙げることができるが，いずれも問題点の指摘ならびに SNA における投入産出分析の解説に止っており，小論のような指摘はなされていない。

4)　生産函数の計量的分析の観点からこの認識を理論的および実証的に跡づけようとする興味ある試みは，尾崎巌「規模の経済性とレオンチェフ投入係数の変化」『三田学会雑誌』1967年9月号。および Iwao Ozaki, "Economies of Scale and Input-Output Coefficients," A. P. Carter and A. Brody, ed., *Applications of Input-Output Analysis*, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1970 において試みられている。

別構成を示す n 個の要素より成る列ベクトル。

η, 附加価値の合計。

I−*O* 行列から容易に次のバランス関係を導くことができる。

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}}+\boldsymbol{e} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{V}'\boldsymbol{i} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{i} \tag{2.3}$$

ここで，$\boldsymbol{i}$ はすべての要素が1である $n\times 1$ 次元の列ベクトルである。ここで SNA は，商品別の中間投入と産業別の産出との間に次の線型同次の関係を考えて，

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{g}} \tag{2.4}$$

$\boldsymbol{B}$ は $n\times n$ の定数の要素から成る行列で，$\hat{\boldsymbol{g}}$ は $\boldsymbol{g}$ の要素を対角要素に持つ対角行列である。次に産出の構成に対して2つの交代的な関係を考える。第1は，個々の産業について産出の商品別構成が一定と考える場合であって，

$$\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{g}} \tag{2.5}$$

によって表わされる。$\boldsymbol{C}$ は定数の要素から成る $n\times n$ 行列である。第2は，個々の商品について産出の産業別構成を一定と考える場合であって，

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{D}\hat{\boldsymbol{q}} \tag{2.6}$$

によって表わされる。$\boldsymbol{D}$ は定数の要素から成る $n\times n$ 行列であり，$\hat{\boldsymbol{q}}$ は $\boldsymbol{q}$ の要素を対角要素として持つ対角行列である。

SNA の 3.24 節によると，商品技術仮定とは「ある商品がどの産業から生産されるにせよ同一の投入構造を持つ」仮定であるとされている。ところが，同じ章の数学附録では，商品技術を仮定する中間投入の計算には (2.4) と (2.5) が使われているから，$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}'$ との間には

$$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{V}' \tag{2.7}$$

が暗黙に想定されている。いま，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{A}$ とおけば，$\boldsymbol{A}$ は COM×COM の形に書かれた $n\times n$ 行列となっている。$\boldsymbol{A}$ を行ベクトルの形で

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}^1,\cdots\cdots,\boldsymbol{a}^n) \tag{2.8}$$

と書くならば，この要素 $\boldsymbol{a}^i$ は商品 i の1単位を任意の産業で生産するのに必要な中間生産物の投入ベクトルである。定義によって，$\boldsymbol{a}^i$ は定数の要素から成る列ベクトルであるから，上に述べた商品技術仮定が結果的に満されている。また (2.8) を考慮すると，(2.7) は

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ji}\boldsymbol{a}^i=\boldsymbol{u}_j \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{u}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{u}_n)$$

と書くこともできる。v_{ij} は i 産業で生産された j 商品の産出を表わす V の要素であり，$\boldsymbol{u}_j$ は任意の商品を生産するのに必要とされる j 産業の中間生産物の投入を表わす列ベクトルである。

(2.7)～(2.9) の誘導過程から明らかのように，SNA の(第3章)数学附録における商品技術仮定は結果として派生されたものであり，この結果をもたらすのに (2.4) が決定的な役割を演じている。(2.4) の $\boldsymbol{B}$ 行列は行ベクトルの形式で

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{b}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{b}_n] \tag{2.4$'$}$$

と書ける。ここで，$\boldsymbol{b}_j$ は $b_{ij}=v_{ij}/g_j(i=1,\cdots,n)$ を要素とする j 産業の産出1単位を生産するのに必要な中間投入の列ベクトルである。すなわち，数学附録における商品技術仮定は $\boldsymbol{b}_j$ が定数を要素とする列ベクトルであること，換言すれば「その生産物の編成のいかんにかかわらずある産業は同一の投入構造を持つ」こと，の前提の上に成り立っている。ところがこの引用は SNA の産業技術仮定を定義する章節 (3.24 節) である。したがって SNA の商品技術仮定は産業技術仮定の前提の上に成り立つと言う不合理な帰結が出てくる。

この不合理を回避するためには，いわゆる商品技術仮定を (2.4) とは全く関係しない形式において定式化することが必要であろう。この観点からすると，再び (2.9) に立戻ることが有益である。いま (2.8) を出発点として与えられたものとし，商品 i の1単位を任意の産業において生産するのに必要な中間生産物の投入をあらためて $\boldsymbol{A}$ の要素と区別して，列ベクトルの形で $\boldsymbol{f}^i$ と書くと，全商品について

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{f}^1,\cdots\cdots,\boldsymbol{f}^n) \tag{2.10}$$

の形に表わされる投入係数行列 $\boldsymbol{F}$ を考えることができる。商品技術仮定は $\boldsymbol{f}^i$ が定数のベクトルとなることを意味しており，かつまた (2.9) との類推から，

$$\sum v_{ji}\boldsymbol{f}^i=\boldsymbol{u}_j \tag{2.11}$$

となっている。したがって，

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{U} \tag{2.12}$$

ここで次の仮定をおく。

(A.2)　$\boldsymbol{V}$ は正則である。

(A.2) のもとで F は (2.12) から容易に，

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{V}')^{-1} \tag{2.13}$$

であるから $\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ が与えられるならば $\boldsymbol{F}$ を求めることができる。そこで，商品技術仮定として (2.12) を採用するならば前述の不合理は解消する[5)]。

5)　(2.9) と (2.11) は形式としては同一であるが誘導の過程と推論は全く別個であることに注意すべきである。(2.11) は純粋の意味で商品別の factor limitational production function (Ozaki (1970)) の1つの

商品技術仮定をこのように定式化すると，おそらく次のような疑問に答える必要が生じよう。第1の疑問は，$\boldsymbol{F}$ がはたして非負の投入係数行列として使いうるかである。(2.13)から明らかに，この設問を一般に肯定することは困難である。しかし，われわれは第3節の数値計算の結果にもとづいて，この定式化の可動性はかなり高いのではないかと考える。

第2の疑問は，商品技術仮定を(2.12)の形式に定式化するとして，SNA の数学附録(第3章と第4章)における推論の展開に障害を生じないかである。この疑問に対しては肯定的に答えることができる。ここではスペースの制約のため，例示的に次の2点の成立を示す。

(i)　商品別産出水準の決定(3.82節)

(2.1), (2.2), (2.12)から，

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Ui}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{FV'i}+\boldsymbol{e}$$
$$=\boldsymbol{Fq}+\boldsymbol{e}$$
$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{e} \tag{2.14}$$

なお産業別産出水準の決定も容易で

$$\left.\begin{array}{ll} & \boldsymbol{g}=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{e}\ \ [(2.5)\text{の場合}] \\ \text{or} & \boldsymbol{g}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{e}\ \ [(2.6)\text{の場合}]\end{array}\right\} \tag{2.15}$$

となることが知られる[6)]。

(ii)　商品別の附加価値($\boldsymbol{z}$)と産業別附加価値($\boldsymbol{y}$)の対応(4.96節)

いま(2.1)～(2.3), (2.12)と併せて(2.6)の成立を前提する。

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{z}+\hat{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{F'i}$$
$$=\boldsymbol{z}+\hat{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U'i}$$
$$\boldsymbol{Dq}=\boldsymbol{Dz}+\boldsymbol{D}\hat{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U'i}=\boldsymbol{Dz}+\boldsymbol{U'i}$$

他方，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{U'i}$

$$\boldsymbol{Dq}=\boldsymbol{D}\hat{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{i}=\boldsymbol{Vi}=\boldsymbol{g}$$

であるから，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Dz} \tag{2.17}$$

以上数学附録とパラレルの推論が可能であり，(3.12)の利用によっていずれの場合にも演算がかなり直接的で単純化されることが知られる。

第3の疑問は，SNA の技術仮定の両極とみなされた商品技術仮定と産業技術仮定の(ルーズな意味での)双対性が損われ，従って混合技術仮定(3.87節以下)の存在理由が失われるのではないかという点である[7)]。そこで，ここでは前述の商品技術仮定を産出行列が(通常)の副次生産物と副産物に分割されて，混成される場合へ拡張することを考えてみよう。まず産出行列 $\boldsymbol{V}$ が

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2 \tag{2.18}$$

の形で構成されていると仮定する。ここで，$\boldsymbol{V}_1$ は主要生産物と(通常の)副次的生産物とから成る産出行列，$\boldsymbol{V}_2$ は副産物のみから成る産出行列である。$\boldsymbol{V}_1$ と $\boldsymbol{V}_2$ の投入－産出の技術関係について次の仮定をおく。

(A.3)　$\boldsymbol{V}_1$ に対しては(2.12)の形式に表現された商品技術仮定が支配し，$\boldsymbol{V}_2$ に関しては $\boldsymbol{V}_1$ に従属し，次の関係で結ばれている。

$$\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{E} \tag{2.19}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$ は定数を要素とする $n\times n$ の COM×COM 行列である。

(A.3)によって

$$\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{V}_1'=\boldsymbol{U} \tag{2.20}$$

ところで(2.1)と(2.20)から，

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Ui}+\boldsymbol{e}$$
$$=\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{V}_1'\boldsymbol{i}+\boldsymbol{e} \tag{$*$}$$

一方(2.12)と(2.20)から

$$\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{V}_1'+\boldsymbol{E}'\boldsymbol{V}_1'$$
$$=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')\boldsymbol{V}_1'$$

$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')$ の正則性を仮定して，

$$\boldsymbol{V}_1'=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')^{-1}\boldsymbol{V}' \tag{$**$}$$

($*$)と($**$)から，

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')^{-1}\boldsymbol{V'i}+\boldsymbol{e}$$
$$=\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')^{-1}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{e}$$
$$=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')^{-1}]^{-1}\boldsymbol{e} \tag{2.21}$$

したがって $[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')^{-1}]$ の正則性を併せて仮定するならば，(2.18)の形で副次的生産物と副産物が混成される生産物の構成を持つ商品別の産出水準 $\boldsymbol{q}$ は，(A.3)によって，(2.21)のように決定される。ここで，

表現形式と考えることができる。

6)　商品別および産業別の産出ベクトルの決定関係は，SNA，3.82節の推論と形式的に類似する。事実，産業別の産出ベクトル(2.15)は簡単な計算によって，

$$\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{FC})^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{e}\quad[(2.5)\text{の場合}]$$
$$\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{DFD}^{-1})^{-1}\boldsymbol{De}\quad[(2.6)\text{の場合}]$$

と書ける。この関係は産業×産業の投入行列が $\boldsymbol{F}$ の相似な変換によって与えられることを示唆している。

7)　SNA の4.95節によると，(2.17)に対応して産業別附加価値と商品別附加価値の間に，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Dz}$$

が成立すると同時に，次の関係

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{Cy}$$

が成立することが主張されている。ルーズな意味での双対性と言ったのは，産業別と商品別の附加価値を結ぶこの一対の関係を念頭においている。しかし，この意味の双対性は，商品技術仮定と産業技術仮定が併用されることによって成立する。前述した理由によって，これら2つの技術仮定の併用には疑問が残る。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V_2}' \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}' \\ \boldsymbol{F}^* \end{bmatrix} [\boldsymbol{V_1}'] \qquad (2.22)$$

であることに注意するならば，$\boldsymbol{E}$ の要素 e_{kl} は $\boldsymbol{F}^*$ の第 k 列ベクトルの1単位を稼動することによって生産される副産物としての商品 l の大きさであることがわかる。そこで i 産業が各商品の生産のため $(v_{i1}{}^1, \cdots\cdots, v_{il}{}^1, \cdots\cdots, v_{in}{}^1)$ の生産能力の稼動に伴って生産される副産物としての j 商品の量は，$\sum_{h=1}^{n} v_{ih}{}^1 e_{hj}$ と表わすことができるのであり，これが (A. 3) の (2. 19) に内蔵される意味である。(A. 3) の仮定がどれだけ可動的であるかについては，次節の数値計算による実験結果と照らして，あらためて検討することにしよう。

3. $\boldsymbol{F}$ 行列に関する若干の数値実験

前節で行った F 行列に関する推論は，商品技術仮定を純化し，徹底させることによって，技術仮定をめぐる SNA の議論に統一を与えることを企図したのである。前節の議論の要点はつぎの2つの論点に要約される。

(i) (2. 12) で定義される $\boldsymbol{F}$ 行列の可動性は，現実に (2. 13) によって非負の $\boldsymbol{F}$ 行列を誘導できるかどうかに依存する。

(ii) 産出行列が主要生産物と第2次生産物とから構成される場合 (2. 18) に $\boldsymbol{F}$ 行列の考え方を拡充する可能性は，(A. 3) の仮定が現実に受け入れられるかどうかに依存する。

われわれはこれらの論点の解決に大よその目安を与える趣旨にもとづいて，若干の数値実験を行った。この節ではその概略と結果を要約的に報告しておくことにしよう。前述の論点の本格的な解決のためには，(2. 12) の関係で結ばれる $\boldsymbol{U}$ 行列と $\boldsymbol{V}$ 行列の(現実の)データが必要である。言い換えると，第1表の枠組みによって表わされる 商品×産業 の投入行列と 産業×商品 の産出行列のデータが必要である。ところが多くの国では，この形式の投入＝産出表のデータは必ずしもただちに利用可能とは限らない。したがって，われわれの数値実験も仮設のデータを利用している。この意味で結果の評価も論点の解決に対する概略の見当を示すことに限定されるものと理解されるべきである。

われわれが利用した仮設の数値データは，SNA の表 3. 1 と 3. 2 に掲げられた数値例である。これらの数値例において商品の数と産業の数は同数(＝13)であって，前節の (A. 1) の仮定を満す。また表 3. 1 は $\boldsymbol{U}$ 行列，表 3. 2 は $\boldsymbol{V}$ 行列に対する情報を与える。$\boldsymbol{U}$ 行列と $\boldsymbol{V}$ 行列が与えられると，(2. 13) から容易に $\boldsymbol{F}$ 行列を計算することができる。その結果は第2表に示されている。一見して明らかのように，$\boldsymbol{F}$ 行列の非負性が観察される。1個所マイナスの要素が現われているが，結果の数値から判断して計数の丸めに起因するもので，ゼロとみなして大過ないものと判断される。

第2表 $\boldsymbol{F}$ 行列 (単位：$\times 10^{-3}$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	45	0	176	73	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
2	1	19	5	8	62	41	2	33	223	11	12	2	1
3	166	0	130	1	3	0	0	1	0	0	10	1	0
4	5	6	3	384	21	1	7	22	0	2	5	19	3
5	103	33	38	73	266	59	35	57	54	30	40	31	15
6	0	29	2	1	7	304	167	4	11	64	4	1	0
7	43	45	24	21	33	31	263	35	60	52	65	20	29
8	5	30	34	13	28	10	30	249	12	147	10	53	62
9	7	21	7	9	28	43	12	19	69	2	2	22	14
10	30	47	3	6	5	5	3	4	2	175	18	30	13
11	40	37	22	21	38	43	19	32	36	25	202	25	7
12	32	20	14	19	18	45	14	33	18	17	17	23	9
13	33	19	27	27	38	40	37	51	19	38	23	31	12

前にも注意したように，$\boldsymbol{F}$ 行列は 商品×商品 の投入係数行列である。ところで，SNA はわれわれが利用したのと同じデータから 商品×商品 の投入係数行列を計算しているので，$\boldsymbol{F}$ 行列との比較が可能である。そこで，SNA が例示する 商品×商品 の投入係数行列表が5つの場合に即して5つ示されている(3. 3 表～3. 7 表)。この中で 3. 6 表と 3. 7 表の場合は後に議論する主要生産物と第2次生産物との分離に関連しているので，さしあたりはじめの 3. 3～3. 5 表に限定して比較することにしよう。この中で 3. 4 表と 3. 5 表はそれぞれ SNA が説くところの商品技術仮定および産業技術仮定に基づいて計算された投入係数行列である。これに対して，3. 3 表は「産出のみの調整」(transfer of outputs alone) の名で呼ばれている $\boldsymbol{V}$ 行列の対応する j 行と j 列の非対角要素の行和と列和をそれぞれ対角要素に加えて作られた対角産出行列 $\boldsymbol{V}^*$ に基づいて計算された投入係数行列である。この方法によると，産出側に関しては産業と商品の両面において主要生産物と第2次生産物を合体するための調整が行われるのに対し，投入側では対応する調整を全く欠いている難点が付きまとうことになる。商品技術仮定と産業技術仮定は，これら投入と産出の両面における調整を達成するための方法と言ってもよいものである。

これら3つの想定に基づく投入係数行列と $\boldsymbol{F}$ 行列の比較は，f_{ij} を $\boldsymbol{F}$ 行列の (i, j) 要素，比較される投入係数行列の (i, j) 要素を a_{ij} で表わし，相対偏差の形式で

第3表　*F* 行列との相対偏差(産出のみの調整)　　(単位：%)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	−2.22	*	−2.84	−2.74	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	100.00	0.00	20.00	0.00	−1.61	2.44	50.00	3.03	−13.90	0.00	0.00	0.00	0.00
3	−1.20	*	−3.08	0.00	300.00	*	*	100.00	*	*	0.00	100.00	*
4	0.00	0.00	0.00	−2.08	0.00	0.00	0.00	9.09	*	0.00	0.00	21.05	0.00
5	−0.97	6.06	47.37	1.37	−9.40	−1.69	2.86	8.77	98.15	0.00	0.00	0.00	0.00
6	*	−3.45	0.00	0.00	57.14	−6.58	−56.89	100.00	336.36	−1.56	25.00	0.00	*
7	0.00	−2.22	0.00	4.76	6.06	109.68	−3.04	20.00	−30.00	21.15	1.54	0.00	0.00
8	40.00	13.33	−2.94	23.08	7.14	10.00	10.00	−4.02	41.67	2.04	0.00	−1.89	0.00
9	0.00	4.76	0.00	0.00	117.86	−2.33	0.00	0.00	−13.04	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	66.67	125.00	0.00	−2.29	0.00	−3.33	0.00
11	0.00	−2.70	−4.55	0.00	−5.26	−4.65	5.26	−3.13	−8.33	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	50.00	47.37	0.00	−6.67	7.14	−3.03	−11.11	0.00	−5.88	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00	−3.70	−5.26	−5.00	2.70	−3.92	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

(注)　* は $f_{ij}=0$ の場合に対応する。

第4表　*F* 行列との相対偏差(商品技術仮定)　　(単位：%)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0.00	*	0.00	0.00	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	0.00	−5.26	0.00	0.00	1.61	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	*	0.00	0.00	0.00	*	*	0.00	*	*	0.00	0.00	*
4	−20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	*	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	3.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	*	−3.45	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	*
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	−25.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	−8.33	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	4.76	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.57	0.00	0.00	0.00
11	0.00	−2.70	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00	0.00	5.56	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	−5.88	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.63	0.00	0.00	0.00

(注)　* は $f_{ij}=0$ の場合に対応する。

第5表　*F* 行列との相対偏差(産業技術仮定)　　(単位：%)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	−2.22	*	−2.84	−2.74	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	100.00	0.00	20.00	12.50	9.68	2.44	50.00	0.00	−13.45	0.00	0.00	0.00	0.00
3	−1.20	*	−3.08	0.00	100.00	*	*	100.00	*	*	0.00	100.00	*
4	0.00	16.67	33.33	−2.08	−4.76	100.00	0.00	4.55	*	50.00	0.00	15.79	0.00
5	−0.97	3.03	13.16	0.00	−8.27	0.00	2.86	3.51	46.30	0.00	0.00	0.00	0.00
6	*	−3.45	0.00	0.00	28.57	−4.93	0.00	100.00	109.09	1.56	25.00	0.00	*
7	0.00	0.00	4.17	4.76	6.06	38.71	−2.66	8.57	−26.67	3.85	1.54	0.00	0.00
8	40.00	3.33	0.00	15.38	3.57	20.00	6.67	−3.61	25.00	−0.68	0.00	−1.89	0.00
9	0.00	4.76	14.29	11.11	7.14	−2.33	0.00	0.00	−8.70	50.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	33.33	50.00	50.00	−2.29	0.00	−3.33	0.00
11	0.00	−2.70	0.00	0.00	0.00	−4.65	5.26	0.00	2.78	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	7.14	0.00	5.56	−6.67	7.14	0.00	5.56	0.00	−5.88	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00	0.00	−2.63	−2.50	0.00	−1.96	15.79	2.63	0.00	0.00	0.00

(注)　* は $f_{ij}=0$ の場合に対応する。

$(a_{ij}-f_{ij})/f_{ij}$ の百分比表示で示される(第3～5表)。***F*** 行列は商品技術仮定の徹底を企てたものであるから，***F*** 行列との相違は商品技術仮定に基づく投入係数行列との比較において最も少い。両者が完全に一致しないのは，前節でも注意しておいたように，商品技術仮定の推論の中に産業技術仮定の残滓が潜在しているためと思われる。しかし，若干の例外的な相違を別にすれば，***F*** 行列と商品技術仮定に基づく投入係数行列との近似は印象的である。他の2つの場合との比較ではそれぞれに ***F*** 行列との間にかなりの相違が現われる。相違の程度は比較的に言って，いわゆる「産出のみの調整」の想定に基づく投入係数行列の場合の方が大きいようである。

第6表　$(I\text{-}F)^{-1}$ 行列　(単位: $\times 10^{-3}$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1087	1	221	130	6	1	2	5	1	2	4	1	1
2	25	1039	23	39	108	93	39	68	261	42	29	19	13
3	209	1	1193	29	7	2	2	4	1	2	15	2	1
4	21	18	17	1637	54	16	27	58	10	22	18	39	12
5	189	76	115	205	1401	151	117	135	116	102	91	67	38
6	33	72	26	29	45	1470	342	38	63	147	44	20	17
7	101	89	76	85	94	100	1399	95	127	125	129	50	53
8	49	68	77	60	77	52	82	1362	50	263	41	92	94
9	22	34	20	31	53	81	43	41	1091	23	13	32	21
10	49	64	19	26	21	23	16	18	23	1223	32	42	19
11	83	66	61	73	87	103	69	76	78	71	1270	47	20
12	51	34	35	49	40	80	46	58	36	44	31	1033	16
13	64	39	57	70	73	81	82	89	45	81	46	48	1024

第7表　$(I+E')(I+E'-F^*)^{-1}$ 行列　(単位: $\times 10^{-3}$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1087	1	221	130	6	1	2	5	1	2	4	1	1
2	25	1039	23	39	108	92	39	68	261	42	29	19	13
3	209	1	1193	29	7	2	2	4	1	2	15	2	1
4	21	18	18	1637	54	16	27	58	10	22	18	39	12
5	189	75	115	205	1401	150	117	135	116	101	91	67	38
6	33	72	26	29	46	1470	342	38	63	147	45	20	17
7	101	89	76	86	94	100	1399	95	127	125	129	50	53
8	49	68	77	59	77	52	82	1362	50	263	41	92	95
9	22	34	20	31	53	81	43	41	1091	23	13	32	21
10	49	64	19	26	21	23	16	18	23	1223	32	42	19
11	83	66	61	73	87	103	68	76	78	71	1270	47	20
12	51	34	35	49	40	80	46	58	36	44	31	1033	16
13	64	39	57	70	73	81	82	89	45	81	46	48	1023

商品別ならびに産業別産出水準の決定には $[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}]^{-1}$ の情報が必要になる。理論によってこの逆行列は非負であることが期待されるが，第6表の結果はこの予想が満されていることを示している。ところで，前節では $\boldsymbol{V}$ 行列を主要生産物と副次的生産物から成る行列 $\boldsymbol{V}_1$ と，副産物から成る行列 $\boldsymbol{V}_2$ とに分解し，(A. 3) のような技術関係を想定することによって，$\boldsymbol{F}$ 行列の応用を試みた。SNA の 3. 38 節には混合技術仮定の設例の必要から，前述の $\boldsymbol{V}_1$ 行列と $\boldsymbol{V}_2$ 行列の分割に関する数値例を与えている。そこで，この数値例を用いて，(A. 3) の仮定の可動性と現実性の検討を試みよう。

前節の議論によると，$\boldsymbol{V}$ 行列が (2. 18) の形に分割され，かつ (A. 3) の技術関係が想定されるならば，商品別産出ベクトル $\boldsymbol{q}$ は (2. 21) によって決定される。ここで，最終需要ベクトル $\boldsymbol{e}$ に対する中間生産物と産出の派生需要を与える逆行列は $[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')^{-1}]^{-1}$ によって与えられ，前記の数値例を用いて

$$\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{V}_1')^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}' \tag{3. 1}$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{V}_1')^{-1}=\boldsymbol{F}^* \tag{3. 2}$$

であることに注意するならば，ただちに計算ができる。しかし，ここではチェックの目的で $\boldsymbol{q}$ を求めるもう1つの試みを示す。いま

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{V}'\boldsymbol{i}=(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2)'\boldsymbol{i}$$
$$=\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2 \tag{3. 3}$$

と表わす。(A. 3) から

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{E}'\boldsymbol{q}_1$$
$$=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')\boldsymbol{q}_1 \tag{3. 4}$$

と書ける。他方，

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{V}_1'\boldsymbol{i}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{e} \tag{3. 5}$$

であることに注意すると，

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{F}^*)^{-1}\boldsymbol{e}^{8)} \tag{3. 6}$$

$$\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{E}'\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{F}^*)^{-1}\boldsymbol{e}$$

したがって，(3. 4) を考慮して，

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{F}^*)^{-1}\boldsymbol{e} \tag{3. 7}$$

次の第7表は (3. 7) の右辺の2つの行列の積の形で表わされた中間生産物と産出を派生する波及行列—$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{F}^*)^{-1}$—の計算結果を示したものである。ここでも，この波及行列は非負行列となっており，予想の結果が得られている。この意味で $\boldsymbol{F}$ 行列の考え方を $\boldsymbol{V}$ 行列が分解される場合に拡張するわれわれの仮説は実験的に十分可動的であると言ってよいであろう[9]。

8)　ここで，$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{F}^*)$ の正則性が仮定されている。

9)　なお7表の行列が6表のそれと一致することは次のように確かめられる。

$$\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}')^{-1}=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{V}_1')^{-1}[\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{V}_1')^{-1}]^{-1}$$
$$=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{V}')^{-1}=\boldsymbol{F}$$

であるから，(2. 21) は，結局

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{e}$$

に帰着する。

(附記)　第2表以下の商品×商品行列の分類は次のように定められている。

1. 農，林，水産物。
2. 鉱業品。
3. 食料，飲料，タバコ。
4. 織物，被服，革製品。
5. ゴム，化学，石油生産物。
6. 基礎金属。
7. 金属製品，機械，設備。
8. その他の工業品。
9. ガス，電気，水道。
10. 建設。

第II部
投入構造，産出構造と技術仮説

1. 考察の視野と前提

第I部の議論では投入・産出表を SNA の基本的な枠組みの中で考察し，そこで展開される技術仮定の性格と問題点を明らかにした。当然に投入と産出のフローも価値額の次元で議論された。また，SNA の投入・産出表を特徴づける技術仮定も投入と産出を結ぶ固有の技術関係のみならず，それをとりまく市場の条件や産業間の組織が複合された全体として理解される余地が残されていた。例えば第I部の(2.5)および(2.6)に表現される産出の構成は固有の技術関係だけではなく市場の条件や産業の組織によって左右される可能性を内蔵している。それにも拘らず，そこで展開された技術仮定が固有の技術関係によって基本的に制約を受けていることも否定しえない事実である。

以下の考察は，こうした技術仮定を固有の技術関係の目を通して見直し，その含意を明らかにすることを目的とする。固有の技術関係は投入構造と産出構造の生産理論的な基礎づけを軸にして展開されるが，それを結合生産の場で展開することに特に留意した。言うまでもなく，SNA の投入・産出表は結合生産を常套とすることにおいて，伝統的なレオンチェフ型の投入・産出表と根本的な相違を示しているからである。また固有の技術関係の性格を明示する趣旨から，以下の考察は物量の次元において進められる。従って第1部と第2部の考察の間には投入価格と産出価格の決定，費用構造と投入構造の解明と言ったギャップが埋められないままに残されている。この間のギャップのあるものは推論の過程で解決の方向が示唆されるが，主要な部分の解決はなお今後の課題に委ねられる。

2. 結合生産と線型構造

われわれの議論は以下の原始概念を出発点とする。

i) あらゆる(有限の)財およびサービスから成る商品空間 Z。その部分集合である産出の集合 V および投入の集合 X。

$$V=\{\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\geqq 0\}$$

$$X=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\geqq 0\}$$

ii) ある投入のベクトル $\boldsymbol{x}$ と産出のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$P(\boldsymbol{x})\subset\{\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\geqq 0\}=R_+{}^m \tag{2.1}$$

によって定義される可能な産出の集合 $P(\boldsymbol{x})$。

iii) 次の産出対応。

$$P: X\to V \tag{2.2}$$

ii) と iii) に代えて，次の概念を用いることもできる。

ii)′ 次に定義される可能な投入の集合 $L(\boldsymbol{v})$,

$$L(\boldsymbol{v})=\{X|\boldsymbol{v}\in P(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in X\}\subset R_+{}^n \tag{2.3}$$

iii)′ 次に定義される P の逆対応 L。

$$L: V\to X \tag{2.4}$$

ただし，任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に関し，その写像集合 $L(\boldsymbol{v})$ は，可能な投入の集合

$$L(\boldsymbol{v})=\{\boldsymbol{x}|v\in P(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in X\}$$

である。

これらの原始概念に基づいて，次の定義を与えることができる。

(D.1) $P(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in X$ は生産要素 $\boldsymbol{x}$ の投入によって生産される可能な産出 $\boldsymbol{v}$ の集合を表わす。簡単に，P を産出構造，$P(\boldsymbol{x})$ を産出集合と呼ぶ。

逆に，$L(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}\in V$ は産出 $\boldsymbol{v}$ を少くとも生産するのに必要な生産要素の投入 $\boldsymbol{x}$ の可能な集合を表わす。L を投入構造，$L(\boldsymbol{v})$ を投入集合と呼ぶ。

(2.1)および(2.3)から明らかのように，可能な産出と投入はそれぞれ m 次元および n 次元非負実数空間上の点として表現されることが前提されている。

ここで，産出対応 P(2.2) と投入対応 L(2.4) に関し，それぞれ以下の仮定を置く。

(A−P) (2.2)において前提された産出対応 P は次の性質を満す。

(P.1) $P(\boldsymbol{0})=\{0\}$

(P.2) $P(\boldsymbol{x})$ はすべての $\boldsymbol{x}\in X$ に関し有界である。すなわち

$$\boldsymbol{v}\geqq 0,\|\boldsymbol{v}\|=+\infty\Longrightarrow\boldsymbol{v}\notin P(\boldsymbol{x}),\ \text{all }\boldsymbol{x}\in X$$

(P.3) $\boldsymbol{x}'\geqq\boldsymbol{x}\Longrightarrow P(\boldsymbol{x}')\supset P(\boldsymbol{x})$

(P.4) $0\leqq\boldsymbol{v}'\leqq\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\in P(\boldsymbol{x})\Longrightarrow\boldsymbol{v}'\in P(\boldsymbol{x})$

(P.5) すべての $\boldsymbol{x}$ に対し，$P(\boldsymbol{x})$ は凸集合である。

(P.6) $P(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\supset P(\boldsymbol{x})\cap P(\boldsymbol{y})$, all $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$, $\lambda\in[0,1]$

(P.7) 次の表現によって定義される P のグラフ G_P,

$$G_P=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})|\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{v}\in P(\boldsymbol{x})\}, \tag{2.5}$$

は，$X\times V$ の閉集合である。

産出対応 P に関し仮定される性質は生産の理論において周知のことがらであるから多くの注釈を必要しないであろう[1)]。必要と思われる若干の補足をつけ加えるなら

---

11. 運輸，通信。
12. 流通。
13. サービス。

ば，(P. 6) は産出対応が「準凹性」(quasi-concavity) を持つことを主張する。(2. 1) と (2. 3) から明らかのように，産出対応 P は n 次元(非負)実数ベクトル空間より m 次元(非負)実数ベクトル空間への写像である。(P. 6) は準凹函数の一般化となっている。(2. 5) によって定義される P のグラフ G_P は直積空間 $R_+{}^n \times R_+{}^m$ の上に張られる $n \times m$ 次元の順序対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ を表現する。したがって，(P. 7) は投入と産出を関連づける性質を表現するものであるから，G_P を生産技術の表現と見なすことができる。(P. 7) によって生産技術はそれ自体として完結する全体であって，未知と望洋の混沌とはみなされないことが含意される。

(A－L) (2. 4) において前提された投入対応 L は次の性質を満す。

(L. 1) $L(\boldsymbol{0}) = X,\ \boldsymbol{0} \notin L(\boldsymbol{v})$ all $\boldsymbol{v} \in V (\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$

(L. 2) 有限の投入 $\boldsymbol{x}(\|\boldsymbol{x}\| < +\infty)$ から無限大の産出 $\boldsymbol{v}(\|\boldsymbol{v}\| = +\infty)$ を生産することはできない。すなわち

$$\boldsymbol{x} \in X, \|\boldsymbol{x}\| < +\infty\,;\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0},$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = +\infty \Longrightarrow \boldsymbol{x} \notin L(\boldsymbol{v})$$

(L. 3) $\boldsymbol{v}' \geqq \boldsymbol{v} \in V \Longrightarrow L(\boldsymbol{v}') \subset L(\boldsymbol{v})$

(L. 4) $\boldsymbol{x}' \geqq \boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x} \in X \Longrightarrow \boldsymbol{x}' \in L(\boldsymbol{v})$

(L. 5) すべての $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，$L(\boldsymbol{v})$ は凸集合である。

(L. 6) $L(\lambda \boldsymbol{v} + (1-\lambda)\boldsymbol{w}) \supset L(\boldsymbol{v}) \cap L(\boldsymbol{w})$,
all $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V,\ \ \lambda \in [0, 1]$

(L. 7) 次の表現によって定義される L のグラフ G_L,

$$G_L = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{x} \in L(\boldsymbol{v})\} \tag{2. 6}$$

は，$V \times X$ の閉集合である。

さきに述べた産出対応 P の性質との類推から，投入対応 L も (L. 6) によって準凹性を持つ。また (L. 7) は事実上 (L. 7) と同じ内容を持つことに注意すべきである。なぜならば，定義によって，G_L は直積空間 $R_+{}^m \times R_+{}^n$ の上に張られる $m \times n$ 次元の順序対 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$ を表現し，内容的には G_P から得られる $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ と同じものを表現するからである。

産出対応 P と投入対応 L にこれだけの性質を仮定するならば，次の性質の成立を主張することは容易である。

(R. 1) 産出構造 P が (P. 1)－(P. 7) を満すならば，その逆対応である投入構造 L は (L. 1)－(L. 7) を満す。この逆も成立する。

証明の過程で (A－P) と (A－L) の諸性質は以下の関連で結ばれていることを示すことができる。

(P. 1) and (P. 3) $\Longrightarrow$ (L. 1) $\Longrightarrow$ (P. 1),

(P. 2) $\Longleftrightarrow$ (L. 2), (P. 3) $\Longleftrightarrow$ (L. 4),

(P. 4) $\Longleftrightarrow$ (L. 3), (P. 5) $\Longleftrightarrow$ (L. 6),

(P. 6) $\Longleftrightarrow$ (L. 5), (P. 7) $\Longleftrightarrow$ (L. 7),

投入と産出を結ぶ技術に関し，われわれの選択の関心はその効率性に向けられる。そこで，産出集合と投入集合に関する効率性を次のように定義する。

(D. 2) 産出集合 $P(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in X$, および投入集合 $L(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{v} \in V$ の有効集合をそれぞれ $E_P(\boldsymbol{x}), E_L(\boldsymbol{v})$ と書き，次の関係

$$E_P(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \in P(\boldsymbol{x}) \Longrightarrow \boldsymbol{w} \notin P(\boldsymbol{x})\},\quad \boldsymbol{x} \in X\,; \tag{2. 7}$$

$$E_L(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in L(\boldsymbol{v}) \Longrightarrow \boldsymbol{y} \notin L(\boldsymbol{v})\},\quad \boldsymbol{v} \in V, \tag{2. 8}$$

によって定義する。

これまでの仮定に基づいて，有効産出集合 $E_P(\boldsymbol{x})$ と有効投入集合 $E_L(\boldsymbol{v})$ がともに空でない集合として存在することは次の主張によって確められる。

(R. 2) (A－P) を仮定する。そのとき，

$$E_P(\boldsymbol{x}) \neq \phi,\ \text{all } \boldsymbol{x} \in X \tag{2. 9}$$

同様に，(A－L) を仮定すれば，

$$E_L(\boldsymbol{v}) \neq \phi,\ \text{all } \boldsymbol{v} \in V \tag{2. 10}$$

(R. 2) によって，技術選択の範囲は一般の産出対応 P もしくは投入対応 L の中からさらにせばめて，有効産出集合を生成する対応 $E_P: X \to V$ もしくは有効投入集合を生成する対応 $E_L: V \to X$ に限定してもよい。そこで次の定義を与える。

(D. 3) 有効産出集合を生成する対応 $E_P: X \to V$ が一価函数として表わされるとき，産出構造 P は本質的に要素制限的であると言い，IFLOS と略記する。また，この対応 E_P を IFL 生産函数と呼ぶ。

逆に，有効投入集合を生成する対応 $E_L: V \to X$ が一価函数として表わされるとき，投入構造 L は本質的に非代替的であると言い，INSIS と略記する。また，この対応 E_L を INS 投入函数と呼ぶ。

IFLOS もしくは INSIS の構造が以下の性質を持つことは見易い[2)]。

---

1) 結合生産と相似拡大性の分析の典型としては，Ronald W. Shephard, *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton 1970 を参照。

2) IFLOS および INSIS はそれぞれ intrinsically factor limitational output structure および intrinsically non-substitutable input structure の略記である。フリッシュは factor limitational の表現に代え factor determined の用語を用いている (Ragnar Frisch, *Theory of Production*, Dordrecht 1965)。な

(R. 3)　(i)　$E_P: X \to V$ が一価函数であることは，$P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in X$ が常に最大元を持つことと同値である。ここで，最大元を $\text{Max}\,P(\boldsymbol{x})$ で表わすと，

$$\boldsymbol{v}^* = \text{Max}\,P(\boldsymbol{x}) \Longrightarrow \boldsymbol{v}^* \geqq \boldsymbol{v}, \text{ all } \boldsymbol{v} \in P(\boldsymbol{x}) \tag{2.11}$$

(ii)　$E_L: V \to X$ が一価函数であることは，集合 $L(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \in V$ が常に最小元を持つことと同値である。ここで，最小元を $\text{Min}\,L(\boldsymbol{v})$ で表わすと，

$$\boldsymbol{x}^* = \text{Min}\,L(\boldsymbol{v}) \Longrightarrow \boldsymbol{x}^* \leqq \boldsymbol{x}, \text{ all } \boldsymbol{x} \in L(\boldsymbol{v}) \tag{2.12}$$

(R. 4)　P が (P. 4) を満し IFLOS ならば

$$\left.\begin{aligned} &P(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{v} \in V | \boldsymbol{v} \leqq \phi(\boldsymbol{x})\}, \quad \boldsymbol{x} \in X; \\ &\phi(\boldsymbol{x}) = \text{Max}\,P(\boldsymbol{x}) = E_P(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in X \end{aligned}\right. \tag{2.13}$$

同様に，L が (L. 4) を満し INSIS ならば，

$$\left.\begin{aligned} &L(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{x} \in X | \boldsymbol{x} \geqq \psi(\boldsymbol{v})\}, \quad \boldsymbol{v} \in V; \\ &\psi(\boldsymbol{v}) = \text{Min}\,L(\boldsymbol{v}) = E_L(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v} \in V \end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

(R. 5)　結合生産が存在せず

$$V \subset R_+$$

であると仮定する。このとき，函数 $\phi: X \to V$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \text{Max}\,P(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in X$$

が定義され，ϕ は IFL 生産函数である。

また，結合生産が存在するとき ($V \subset R_+{}^m$) 産出構造が IFLOS であるならば，同様に IFL 生産函数 ϕ: $X \to V$ を定義することができて，ϕ は m 次元のベクトル値函数として表わされる。

(R. 5) に関連して特に言及を必要とする論点は，結合生産の構造を一次元の産出に縮退させた世界においては，かならず IFLOS となっていることである。IFLOS の構造は結合生産の世界における一つの特殊な限定にほかならないのであるが，これを一次元の産出(すなわち結合生産のない場合)の場に還元したとき，(*R*. 5) によってむしろ IFLOS が産出の構造を支配するから，IFLOS は独自の市民権を主張しうる根拠を持っていると言えよう。

IFLOS の構造から導かれる IFL 生産函数にはさらに注目すべき性質を具えているが，そのことを示すための準備として次の定義を与えよう。

(D. 4)　産出構造 P が IFLOS であるとする。産出対応 $P: X \to V$ が次の性質，

(i)　$P(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = P(\boldsymbol{x}) + P(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$,

(ii)　$P(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda P(\boldsymbol{x}), \quad \text{any } \lambda > 0, \quad \boldsymbol{x} \in X$,

を満すとき，産出構造 P は線型かつ本質的に要素制限的であると言い，LIFLOS と略記する。

同様に，投入構造 L が INSIS であるとする。投入対応 $L: V \to X$ が次の性質，

(i)′　$L(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = L(\boldsymbol{v}) + L(\boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,

(ii)′　$L(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda L(\boldsymbol{v}), \quad \text{any } \lambda > 0, \quad \boldsymbol{v} \in V$,

を満すとき，投入構造 L は線型かつ本質的に非代替的であると言い，LINSIS と略記する[3]。

(D. 5)　LIFLOS 産出構造 P から導出される IFL 生産函数 $\phi: X \to V$ は次の条件

(i)　$\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$,

(ii)　$\phi(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \phi(\boldsymbol{x}), \quad \text{any } \lambda > 0, \quad \boldsymbol{x} \in X$,

を満す。この ϕ を線型生産函数と言う。

同様に，LINSIS 投入構造 L から導出される INS 投入函数 $\psi: V \to X$ は次の条件，

(i)　$\psi(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \psi(\boldsymbol{v}) + \psi(\boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,

(ii)　$\psi(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda \psi(\boldsymbol{v}), \quad \text{any } \lambda > 0, \quad \boldsymbol{v} \in V$,

を満す。この ψ を線型投入函数と言う。

線型の生産函数と投入函数は次の重要な性質を持っている。

(R. 6)　線型生産函数 $\phi: X \to V$，線型投入函数 ψ: $V \to X$ は行列を用いて，

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \tag{2.15}$$

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v} \tag{2.16}$$

の形式に表現できる。ここに $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はそれぞれ $m \times n$, $n \times m$ の非負行列である。また行列 $\boldsymbol{B}$ は

$$\sum_i b_{ij} > 0 \qquad \text{for all } j \tag{2.17}$$

を満足する。(2.15), (2.16), (2.17) によって条件づけられた行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ をそれぞれ生産係数行列，投入係数行列と名づける。

(R. 7)　線型函数 $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ から導かれる産出構造 $P_A: X \to V$ を，

$$P_A(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{v} \in V | \boldsymbol{v} \leqq \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\}\,; \boldsymbol{x} \in X, \quad \boldsymbol{A} \geqq 0\,(m \times n) \tag{2.18}$$

で定義する。P_A は (A−P) を満し，LIFLOS である。さらに $\boldsymbol{A}$ が次の条件，

$$\sum_j a_{ij} > 0\,; \text{all } i, \tag{2.19}$$

を満すならば，P_A は次の性質 (i) を満す。

(i)　$\boldsymbol{x} > 0$; or $\boldsymbol{x} \geq 0, \ \bar{\boldsymbol{v}} \in P_A(\bar{\lambda}\boldsymbol{x}), \ \bar{\lambda} > 0, \bar{\boldsymbol{v}} > 0$

$$\Longrightarrow {}^{\exists}\lambda_v \geqq 0 : \boldsymbol{v} \in P_A(\lambda_v \boldsymbol{x}) \text{ any given } \boldsymbol{v} \in V$$

お，このフリッシュの書物は古典解析の手法を用い，結合生産の分析を試みた数少い研究の1つである。

3)　LIFLOS および LINSIS はそれぞれ linear and intrinsically factor limitational output structure と linear and intrinsically non-substitutable input structure の略記である。

同様に，線型函数 $\psi(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{Bv}$ から導かれる投入構造 $L_B: V\to X$ を，

$$L_B(\boldsymbol{v})=\{\boldsymbol{x}\in X|\boldsymbol{x}\geqq \boldsymbol{Bv}\}\ ;\boldsymbol{v}\in V,\ \ \boldsymbol{B}\geqq 0\,(n\times m)$$
$$\sum_i b_{ij}>0 \text{ for all } j \tag{2.20}$$

で定義する。L_B は (A−L) を満し，LINSIS である。さらに $\boldsymbol{B}$ が次の条件，

$$\sum_j b_{ij}>0:\text{all } i, \tag{2.21}$$

を満すとき，L_B は次の性質 (ii) を満す。

(ii) $\boldsymbol{x}>0$; or $\boldsymbol{x}\geqq 0$, $\bar{\lambda}\boldsymbol{x}\in \mathrm{L}_B(\bar{\boldsymbol{v}})$ some $\bar{\lambda}>0$, $\bar{\boldsymbol{v}}>0$ $\Longrightarrow \{\lambda\boldsymbol{x}|\lambda\geqq 0\}\cap L_B(\boldsymbol{v})\neq\phi$ for all $\boldsymbol{v}\in V$

(R. 7) の産出構造 $P_A(\boldsymbol{x})$ に関して与えられた性質 (i) は投入ベクトル $\boldsymbol{x}$ を十分に大きくするならばどんな産出ベクトルも達成可能であることを主張するもので，一般に産出の狭義達成可能性と呼ばれる性質である[4]。この産出の狭義達成可能性を投入構造の場に移しかえたのが $L_B(\boldsymbol{v})$ に関する性質 (ii) である。この性質 (ii) は，どんな投入ベクトルも十分に大きく延ばしてやるならば，必ず投入集合と交ることを主張しているからである。

伝統的なレオンチェフ型の生産函数をこれまで述べて来た産出構造(および投入構造)と関連づけることは1つの興味ある演習である。それを以下に例示しよう。

(例 1) 結合生産が行われない伝統的なレオンチェフ型の生産函数は，産出対応を

$$\phi: X\to V,\ \ V=R_+$$

と与え，産出構造 P と投入構造 L を

$$P(\boldsymbol{x})=\{v\in V|\,(x_j/a_j)\geqq v,\ {}^\forall j\in N\},\ \ \boldsymbol{x}\in X \tag{2.22}$$

$$L(v)=\{\boldsymbol{x}\in X|\,(x_j/a_j)\geqq v,\ {}^\forall j\in N\},\ \ v\in V \tag{2.23}$$

で定義する。このとき P と L はそれぞれ IFLOS と INSIS となる。伝統的なレオンチェフ型生産函数は，P の IFL 生産函数として，

$$\phi(\boldsymbol{x})=\underset{j\in N}{\mathrm{Min}}\,(x_j/a_j),\ \ a_j>0,\ \ {}^\forall j\in N \tag{2.24}$$

の形に表わすことができる。この $\phi(x)$ は上に定義された線型函数とはならない。

(例 2) 上記の伝統的なレオンチェフ型生産函数を結合生産を含む場合に拡張することも可能である。すなわち，産出構造 P と投入構造 L をそれぞれ次のように定義する。

$$P(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{v}=(v_i)\in V|x_j/a_{ij}\geqq v_i,\ {}^\forall j\in N, i\in M\},$$
$$\boldsymbol{x}=(x_i)\in X \tag{2.25}$$
$$L(\boldsymbol{v})=\{\boldsymbol{x}\in X|\boldsymbol{v}\in P(\boldsymbol{x})\},\ \ \boldsymbol{v}\in V \tag{2.26}$$

このとき産出構造 P, 投入構造 L は，それぞれ IFLOS, INSIS である。

産出構造 P に対する IFL 生産函数 $\phi: X\to V$ は，

$$\phi(\boldsymbol{x})=(\phi_i(\boldsymbol{x}))$$
$$\phi_i(\boldsymbol{x})=\underset{j\in M}{\mathrm{Min}}\,(x_j/a_{ij}),\ i\in M \tag{2.27}$$

と特定化することができる。また対応する INS 投入函数 $\psi: V\to X$ は，

$$\psi(\boldsymbol{v})=(\psi_j(\boldsymbol{v}))$$
$$\psi_j(\boldsymbol{v})=\underset{i\in M}{\mathrm{Max}}\,(a_{ij}v_i),\ j\in N\} \tag{2.28}$$

と特定化することができる。ここで M と N はそれぞれ商品および生産要素を表わす指標の集合である[5]。

3. 産出構造および投入構造の相似拡大性

最近の生産および消費の理論に関する研究が示しているように，「相似拡大的」な生産函数あるいは効用函数の特定化によって理論の展開と見通しが飛躍的に拡大することがしばしばある。そこで，この研究の本来のすじ道からすれば多少逸脱するきらいはあるが，これまで述べて来た産出構造および投入構造に相似拡大性を導入することによって，何が得られるかについて若干の言及を与えておくことにしよう。事実，前節で議論した産出構造と投入構造に相似拡大性を持ち込むことによって，数々の興味深い帰結を導くことが可能となるのであるが，それらのすべてを紹介するスペースを持っていない。本節ではその中から主要なものを取り出し，それらに若干のコメントを与えるに止める。これらの帰結の多くは続く第4節の議論においても利用されるから，相似拡大的な産出と投入構造を結合生産の場へ拡大することの試みとは別に，本節の議論はわれわれの分析の本来の目的にとっても無視しえない役立ちを持つことが理解されよう。

はじめに，相似拡大性を導入するための前提として次のことを仮定する。

(A—F) 函数 $F: V\to R_+$ は次の性質を満足する。

(a) $F(0)=0$, $F(\boldsymbol{v})>0$, for all $\boldsymbol{v}\in V(\boldsymbol{v}\neq 0)$

(b) $\boldsymbol{v}'\geqq\boldsymbol{v}\Longrightarrow F(\boldsymbol{v}')\geqq F(\boldsymbol{v})$

(c) $\{F(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}\in V\}=R_+(=[0,+\infty))$,

4) 産出の狭義達成可能性の議論は望ましくない財の生産の存在と関連する。詳しくは Shephard, *op. cit.*, pp. 185–187 を参照。

5) 結合生産の理論的な研究の系列としてはほかに，Burmeister＝久我による研究 (Edwin Burmeister and Kiyoshi Kuga, "The Factor-Price Frontier, Duality and Joint Production," *Review of Economic Studies*, January 1970) および派生する一連の研究がある。これら一連の研究との関連には立入りえない。

$\|\boldsymbol{v}\| \to +\infty \Longrightarrow F(\boldsymbol{v}) \to +\infty$

(d)　F は V 上で連続である。

(e)　F は V 上で準凸である。

($A-f$)　函数 $f: R_+ \to R_+$ は R_+ 上で $(A-F)$ の性質 (a)－(e) を満す実数値函数である。

($A-G$)　函数 $G: X \to V$ は X 上で $(A-F)$ の性質 (a)－(d) を満す実数値，準凹函数である。

($A-g$)　函数 $g: R_+ \to R_+$ は R_+ 上で $(A-F)$ の性質 (a)－(d) を満す実数値，準凹函数である。

ある投入対応 $L: V \to X$ に対し投入構造の相似拡大性は次の定義によって与えられる。これは1財の生産に基礎をおく通常の投入集合に関する相似拡大性の一般化となっている。

(D. 6)　投入対応 $L: V \to X$ が次の性質，

$$L(\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}) L^\circ,\ \boldsymbol{v} \in V (\boldsymbol{v} \neq 0) \tag{3.1}$$

を満すとき，投入構造 L は相似拡大的であると言う。ただし，函数 $F: V \to R_+$ は $(A-F)$ を満し，また集合 L° は以下の性質 (1)－(4) を満す X の部分集合である。

(1)　$L^\circ \neq \phi,\ L^\circ \not\ni 0$

(2)　$\boldsymbol{x}' \geqq \boldsymbol{x} \in L^\circ \Longrightarrow \boldsymbol{x}' \in L^\circ$

(3)　L° は閉集合である。

(4)　L° は凸集合である。

(D. 6)′ 投入対応 $L: V \to X$ が次の性質，

$$L(\lambda \boldsymbol{v}) = f(\lambda) L(\boldsymbol{v}),\ \lambda > 0,\ \boldsymbol{v} \in V (\boldsymbol{v} \neq 0), \tag{3.2}$$

を満すとき，投入構造 L は産出規模に関して相似拡大的であると言う。ただし，函数 $f: R_+ \to R_+$ は ($A-f$) を満し，対応 $L: V \to X$ は ($A-L$) を満すものとする。

$V = R_+$ の場合，すなわち結合生産が1財生産に縮退する場合，(D. 6) と (D. 6)′ は一致することを注意しておく。

相似拡大性を持つ投入構造は特別の性質を持つ費用函数を派生する。そのことを明らかにするため，投入対応 $L: V \to X$ から導かれる費用函数の定義を次に与えよう。

(D. 7)　投入対応 $L: V \to X$ が与えられたとき最小の要素投入費用を与える費用函数(以下単に費用函数と呼ぶ) $Q: V \times X \to R_+$ を

$$Q(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}) = \mathrm{Min}\,\{\boldsymbol{px} \mid \boldsymbol{x} \in L(\boldsymbol{v})\},\ \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{p} \in X \tag{3.3}$$

で定義する。

(D. 7) における $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ は要素投入の価格ベクトルであって，その集合 $\{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p} \in R_+{}^n\}$ を考え，投入の集合 X の上に重ね合わせる。従って $\boldsymbol{p} \in X$ と考えることができる。前節で投入構造の1つの特定化として INSIS を考えた。その場合の費用函数は次のような形に表わすことができる。

(R. 8)　投入構造 L が INSIS であるとする。派生する INS 投入函数を $\psi: V \to X$ で表わす。そのとき費用函数は次の形に表わすことができる。

$$Q(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\psi(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{p} \in X$$

相似拡大的な投入構造のもとでは次の命題の成立を主張できる。

(P. 1)　投入構造 $L: V \to X$ が相似拡大的であるならば，次の条件 (i) と (ii) において，(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。

(i)　$L(\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}) L^\circ,\ \boldsymbol{v} \in V (\boldsymbol{v} \neq 0)$,

ただし，函数 $F: V \to R_+$ は ($A-F$) を満し，集合 L° は (D. 6) の (1)－(4) を満す。

(ii)　$Q(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}) = F(\boldsymbol{v}) \pi(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{p} \in X$

ただし，函数 $F: V \to R_+$ は $(A-F)$ を満し，函数 $\pi: X \to R_+$ は次の性質，

(1)　$\pi(0) = 0,\ \pi(\boldsymbol{p}) > 0$ for some $\boldsymbol{p} \in X (\boldsymbol{p} \neq 0)$

(2)　$\pi(\lambda \boldsymbol{p}) = \lambda \pi(\boldsymbol{p}),\ \lambda > 0,\ \boldsymbol{p} \in X$

(3)　$\pi(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) \geqq \pi(\boldsymbol{p}) + \pi(\boldsymbol{q}),\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in X$

(4)　π は $\boldsymbol{p}$ の連続函数である。

(5)　π は $\boldsymbol{p}$ の凹函数である，

を満す。

(P. 1) によって，投入構造の相似拡大性は誘導される費用函数の形を価格のみに依存する部分 $\pi(\boldsymbol{p})$ と産出のみに依存する部分 $F(\boldsymbol{v})$ とに分離することを可能にする[6)]。のみならず $\pi(\boldsymbol{p})$ は一次同次函数となる。(P. 1) は次の投入拡張集合の概念の導入によって，さらに興味ある性質を附加することができる。

(D. 8)　$T_L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{px} = Q(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}),\ x \in L(\boldsymbol{v})\}$,

$\boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{p} \in X$

から作られる集合，

$$T_L{}^*(\boldsymbol{p}) = \cup_{\boldsymbol{v} \in V(\boldsymbol{v} \neq 0)} T_L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{p} \in X (\boldsymbol{p} \neq 0)$$

を $\boldsymbol{p}$ に関する投入拡張集合と言う。また，

$$T_L{}^{**}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}) = \cup_{\lambda > 0} T_L(\lambda \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}),$$

$$\boldsymbol{v} \in V (\boldsymbol{v} \neq 0),\ \boldsymbol{p} \in X (\boldsymbol{p} \neq 0)$$

を $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p})$ における産出規模に関する投入拡張集合と名

---

6)　古典解析の方法を用いて，結合生産の存在しない場合について，この事実を明らかにした例としては，Finn R. Førsund, *Studies in the Neo-classical Theory of Production*, Memorandum from Institute of Economics, University of Oslo, February 1974, がある。

付ける。

T_L^*(あるいは T_L^{**})のイメージを一層明確にするためには $\boldsymbol{v}$ が一次元に縮退し，したがって結合生産の行われない場合に特殊化するのが便利である。このとき，(D. 7) を想起するならば，T_L は投入集合とそれを支持する超平面との接する部分を定義する。それゆえ T_L^* は $\boldsymbol{v}$ を変えることによって得られる支持超平面の接する部分から作られる集合であり，フリッシュの言う「代替経路」(the substitumals) の一般化となっている[7]。

(D. 8) に照らして，次の命題が成立する。

(P. 2) 投入構造 $L: V\to X$ が相似拡大的であるとせよ。次の条件 (i), (ii), (iii) において，(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)。

(i) $L(\boldsymbol{v})=F(\boldsymbol{v})L^\circ,\ \boldsymbol{v}\in V(\boldsymbol{v}\neq 0)$

ただし，函数 F および集合 L は (P. 1) の (i) を満し，かつ

$$\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in L(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}\in V(\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0})\}=X-\{0\}$$

とする。

(ii) $Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p})=F(\boldsymbol{v})\pi(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{v}\in V(\boldsymbol{v}\neq 0),$
$\boldsymbol{p}\in X(\boldsymbol{p}\neq 0)$

ただし，函数 F および π は (P. 1) (ii) の条件を満し，

$\{\boldsymbol{p}\in X|\lambda\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}=\pi(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}\neq 0$ for some $\lambda>0\}\neq\phi,$
for all $\boldsymbol{x}\in X(\boldsymbol{x}\neq 0)$

であるとする。

(iii) $T_L(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p})=F(\boldsymbol{v})T_{L^\circ}(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{v}\in V(\boldsymbol{v}\neq 0),$
$\boldsymbol{p}\in X(\boldsymbol{p}\neq 0)$

ただし，函数 $F: V\to R_+$ は (A$-F$) を満し，かつ対応 $T_{L^\circ}: X\to X$ は次の性質を満す。

(1) $0\notin T_{L^\circ}(\boldsymbol{p})$ for all $\boldsymbol{p}\in X(\boldsymbol{p}\neq 0)$

(2) $\boldsymbol{x}\geqq 0,\ \|\boldsymbol{x}\|=+\infty\Longrightarrow\boldsymbol{x}\notin T_{L^\circ}(\boldsymbol{p})$ for all $\boldsymbol{p}\in X(\boldsymbol{p}\neq 0)$

(3) $T_{L^\circ}(\boldsymbol{p})$ はすべての $\boldsymbol{p}\in X(\boldsymbol{p}\neq 0)$ に対して凸集合である。

(4) 次の関係によって定義される T_{L° のグラフ

$$G(T_{L^\circ})=\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in T_{L^\circ}(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}\in X\}$$

は $X\times X$ の閉集合である。

(5) $T_{L^\circ}(\lambda\boldsymbol{p})=T_{L^\circ}(\boldsymbol{p}),\ \lambda>0,\ \boldsymbol{p}\in X(\boldsymbol{p}\neq 0)$

(6) $\bigcup_{p\neq 0}T_{L^\circ}(\boldsymbol{p})\cap\{\lambda\boldsymbol{x}|\lambda>0\}\neq\phi$ for all $\boldsymbol{x}\in X(\boldsymbol{x}\neq 0)$。特に，

$\boldsymbol{x}\in T_{L^\circ}(\boldsymbol{p}_1),\ \boldsymbol{y}\in T_{L^\circ}(\boldsymbol{p}_2),\ \lambda\in[0,1]$
$\Longrightarrow{}^\exists\theta\in[0,1],\ {}^\exists\boldsymbol{p}^*\geqq 0:$

$$\theta(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\in T_{L^\circ}(\boldsymbol{p}^*)$$

(D. 6) と併行的に産出構造の相似拡大性を考えることもできる。

(D. 9) 産出対応 $P: X\to V$ が次の性質

$$P(\boldsymbol{x})=G(\boldsymbol{x})P^\circ,\ \boldsymbol{x}\in X$$

を満すとき，産出構造 P は相似拡大的であると言う。ただし，函数 $G: X\to R_+$ は (A$-F$) の (a)$-$(d) を満す準凹函数であって，集合 P° は次の性質，

(1) ${}^\exists\boldsymbol{v}>0;\boldsymbol{v}\in P^\circ$ かつ P° は有界，

(2) $\boldsymbol{v}\leqq\boldsymbol{v}'\in V\Longrightarrow\boldsymbol{v}\in P^\circ,$

(3) P° は閉集合，

(4) P° は凸集合，

を満す V の部分集合である。

(D. 9)′ 産出対応: $X\to V$ が次の性質，

$$P(\lambda\boldsymbol{x})=g(\lambda)P(\boldsymbol{x}),\ \lambda>0,\ \boldsymbol{x}\in X$$

を満すとき産出構造 P は投入規模に関し相似拡大的であると言う。ただし，函数 $g: R_+\to R_+$ は (A$-g$) を満し，対応 $P: X\to V$ は (A$-P$) を満すものとする。

投入対応 L が費用函数 $Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p})$ を派生するのと併行的に，産出対応 P から次に定義される収入函数が導かれる。

(D. 10) 産出対応 $P: X\to V$ が与えられたとき，(産出価値額を最大にする) 収入函数 $B: X\times V\to R_+$ を

$$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})=\mathrm{Max}\{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\in P(\boldsymbol{x})\},\ \boldsymbol{x}\in X,\ \boldsymbol{r}\in V$$

で定義する。

$\boldsymbol{r}$ は産出価格のベクトルであって，その集合 $\{\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}\in R_+{}^m\}$ を V に重ね合わせて，$\boldsymbol{r}\in V$ が考えられている。$\boldsymbol{p}\in X$ と同様である。

産出構造 P が相似拡大的であると，派生する収入函数 B には次のような性質が成立する。

(P. 3) 産出構造 $P: X\to V$ が相似拡大的であると，次の条件 (i), (ii) に関して，

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(i) $P(\boldsymbol{x})=G(\boldsymbol{x})P^\circ,\ \boldsymbol{x}\in X$

ただし，函数 $G: X\to R_+$ は (A$-G$) を満し，集合 P° は (D. 9) の性質 (1)$-$(4) を満す。

(ii) $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{x}\in X,\ \boldsymbol{r}\in V(\boldsymbol{r}\neq 0)$

ただし，函数 $G: X\to R_+$ は (A$-G$) を満し，函数 $\rho: V\to R_+$ は以下の性質 (1)$-$(6) を満す。

(1) $\rho(0)=0;\rho(\boldsymbol{r})\geqq 0,\ \boldsymbol{r}\in V;\rho(\boldsymbol{r})>0$ for some $\boldsymbol{r}\geqq 0$

(2) $\rho(\lambda\boldsymbol{r})=\lambda\rho(\boldsymbol{r}),\ \lambda>0,\ \boldsymbol{r}\in V$

(3) $\rho(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})\leqq\rho(\boldsymbol{r})+\rho(\boldsymbol{s}),\ \boldsymbol{r},\boldsymbol{s}\in V$

(4) $\{\boldsymbol{v}\in V|\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}\leqq\rho(\boldsymbol{r}),{}^\forall\boldsymbol{r}\in V,\boldsymbol{v}>0\}\neq\phi$

7) Frisch, *op. cit.*, p. 158 et seq.

(5)　ρ は $\boldsymbol{r}$ の連続函数。

(6)　ρ は $\boldsymbol{r}$ の凸函数。

(P. 3) は (P. 1) と比較される性質であるが，次の定義は (D. 8) と対応する。

(D. 11)

$$T_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})=\{\boldsymbol{v}\in V|\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}),\boldsymbol{v}\in P(\boldsymbol{x})\},$$
$$\boldsymbol{x}\in X,\ \ \boldsymbol{r}\in V(\boldsymbol{r}\neq 0)$$

とする。そのとき，

$$T_P{}^*(\boldsymbol{r})=\cup_{\boldsymbol{x}\in X}T_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{r}\in V(\boldsymbol{r}\neq 0)$$

を $\boldsymbol{r}$ に関する産出拡張経路と呼ぶ。また，

$$T_P{}^{**}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})=\bigcup_{\lambda>0}T_P(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{x}\in X,\ \ \boldsymbol{r}\in V(\boldsymbol{r}\neq 0)$$

を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$ における投入規模に関する産出拡張集合と呼ぶ。

相似拡大的な投入構造 L に関する命題 (P. 2) との対比において，同様の性質を相似拡大的な産出構造 P についても誘導することができる。しかし，その前にまず以下の事実に注意しておく。

(R. 9)

$$I_P(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{v}\in V|\boldsymbol{v}\in P(x),\lambda>1\Longrightarrow\lambda\boldsymbol{v}\notin P(\boldsymbol{x})\},$$
$$\boldsymbol{x}\in X$$

とする。このとき

(1)　任意の $\boldsymbol{v}\in I_P(\boldsymbol{x})$ に対して，

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$$

を満足する $\boldsymbol{r}\geq 0$ が存在する。

(2)　$P(\boldsymbol{x})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda I_P(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x}\in X$

(3)　$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})=\mathrm{Sup}\,\{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\in I_P(\boldsymbol{x})\},\ \ \boldsymbol{x}\in X,\ \ \boldsymbol{r}\in V$

が成立つ。

(R. 10)　対応 $P:X\to V$ が $(A-P)$ を満すならば，

$$P(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{v}\in V|0\leqq\boldsymbol{v}\leqq\boldsymbol{w}\in T_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}),$$
$$\text{for some }\boldsymbol{r}\in V\},\ \ \boldsymbol{x}\in X$$

が成立つ。

(R. 9) の (1) は，等投入量集合の任意の点を決めてやると，派生する収入函数と接する部分を持つ支持超平面を定める非負の産出価格ベクトルが必ず存在することを主張する。(R. 9) の (2) と (3) の主張は産出集合および収入函数を等投入量集合との関係に置き換えることができることを示している。また (R. 10) は，同様に産出集合を産出拡張集合との関係に表現し換えた主張である。

相似拡大的な産出構造を前提にすると次の性質の成立を主張することができる。

(P. 4)　産出構造 $P:X\to V$ が相似拡大的であるとする。次の条件 (i), (ii), (iii) において，(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)。

(i)　$P(\boldsymbol{x})=G(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{P}^\circ,\boldsymbol{x}\in X$

ただし，函数 $G:X\to R_+$ および集合 P° は (P. 3) の (i) の条件を満し，かつ

$$\bigcup_{\boldsymbol{x}\in X}P(\boldsymbol{x})=V$$

とする。

(ii)　$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{x}\in X,\ \ \boldsymbol{r}\in V$

ただし，函数 $G:X\to R_+$ および $\rho:V\to R_+$ は (P. 3) の (ii) の条件を満し，かつ

$$\{\boldsymbol{r}\in V|\lambda\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}=\rho(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}\neq 0,\text{ for some }\lambda>0\}\neq\phi,$$
$$\text{for any }\boldsymbol{v}\in V(\boldsymbol{v}\neq 0)$$

とする。

(iii)　$T_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{x})T_P{}^*(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{x}\in X,\ \ \boldsymbol{r}\in V$

ただし，函数 $G:X\to R_+$ は (A−G) を満し，対応 $T_P{}^*:V\to V$ は次の性質を満足する。

(1)　$T_P{}^*(\boldsymbol{r})$ はすべての $\boldsymbol{r}\in V$ に関し有界である。

(2)　$T_P{}^*$ はすべての $\boldsymbol{r}\in V$ に関し凸である。

(3)　$T_P{}^*$ のグラフ

$$G(T_P{}^*)=\{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}\in T_P{}^*(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}\in V\}$$

は $V\times V$ の閉集合である。

(4)　$T_P{}^*(\lambda\boldsymbol{r})=T_P{}^*(\boldsymbol{r}),\ \ \lambda>0,\ \ \boldsymbol{r}\in V$

(5)　$\boldsymbol{v}\in V(\boldsymbol{v}\neq 0)\Longrightarrow(\bigcup_{r\geq 0}T_P{}^*(\boldsymbol{r}))\cap\{\lambda\boldsymbol{v}|\lambda>0\}\neq\phi$

(6)　$\boldsymbol{v}\in T_P{}^*(\boldsymbol{r}_1),\ \ \boldsymbol{w}\in T_P{}^*(\boldsymbol{r}_2),\ \ \lambda\in[0,1]$

$$\Longrightarrow{}^\exists\theta\geqq 1,\ \ \boldsymbol{r}^*\geqq 0;$$
$$\theta(\lambda\boldsymbol{v}+(1-\lambda)\boldsymbol{w})\in T_P{}^*(\boldsymbol{r}^*)$$

(P. 4) の主張は，投入構造の相似拡大性から導かれる主張 (P. 2) を産出構造の場に移し替えたものであり，内容も類推できる。

4. SNA の技術仮説

はじめに，以下に用いられる記号を一括して示しておくのが便利である。

$K=\{1,2\cdots\cdots,k\}$：生産活動の場を与える産業を表わす添字の集合。$\alpha\in K$

$M=\{1,2,\cdots\cdots,m\}$：生産活動の対象物となる商品を指示する添字の集合。$\beta\in M$

$\boldsymbol{x}_\alpha\in X=R_+{}^m$：$\alpha$ 産業の投入列ベクトル。$\alpha\in K$

$x_{\alpha\gamma}$：α 産業の γ 商品投入量。$\alpha\in K,\gamma\in M$

$\boldsymbol{v}_\alpha\in V=R_+{}^m$：$\alpha$ 産業の産出列ベクトル。$\alpha\in K$

$v_{\alpha\beta}$：α 産業の β 商品産出量。$\alpha\in K,\beta\in M$

$P^\alpha:X^\alpha\to V^\alpha$：$\alpha$ 産業の生産対応，$\alpha\in K$

$P^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha)$：$\alpha$ 産業の産出集合，$\alpha\in K$

$L^\alpha:V^\alpha\to X^\alpha$：$\alpha$ 産業の投入対応，$\alpha\in K$

$L^\alpha(\boldsymbol{v}_\alpha)$：$\alpha$ 産業の投入集合，$\alpha\in K$

第I部においても注意したようにSNAの言う技術仮定―商品技術および産業技術―の基礎を形作るものは(2.4)の形に表現された「投入係数」一定の関係である。この関係を上記の記号を用いて書き改めるならば,

$$\boldsymbol{x}_\alpha=(\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta})\boldsymbol{b}_\alpha,\ \ ^\forall\alpha\in K,$$
$$\boldsymbol{x}_\alpha=(x_{\alpha\gamma})\in X,\ \gamma\in M;\boldsymbol{v}_\alpha=(v_{\alpha\beta})\in v,\ \beta\in M \quad (4.1)$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{b}_\alpha(\alpha\in K)$ は定数から成る列ベクトルである。明らかに(4.1)は第1節で議論の対象とした V から X への n 次元ベクトル値函数として表わされる投入対応にほかならない。いま(4.1)の形に表現される投入対応を便宜上「技術仮説A」と名付けておこう。この投入対応 $V\to X$ が一価函数として定まるとき,第2節の議論に基づいて「技術仮説A」を以下のように解釈することができる。便宜上そのように解釈された投入対応のことを「技術仮説 A_1」と呼んでおこう。そのとき,次のように言える。

技術仮説 $\mathbf{A_1}$: すべての産業の投入構造 L^α が INSIS であり,従ってその INS 投入函数 $\psi_\alpha: V\to X$ は,

$$\psi_\alpha=(\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta})\boldsymbol{b}_\alpha,\ \ ^\forall\alpha\in K \quad (4.1)'$$

で表わされる。

第2節の議論から明らかなように,投入構造 L^α が INSIS であることは,投入集合 $L^\alpha(\boldsymbol{v}_\alpha),\boldsymbol{v}_\alpha\in V$ が常に最小元を持つことを意味し,技術選択の対象はこの最小元に限定される。

SNA における商品技術仮定の特質は,上述の「投入係数」一定の関係を第I部(2.5)の形式に表現された特定の産出構成に結びつけるところにある。この特定の産出構成は各産業の産出について,その商品別の構成の一定を要請するのであって,再び本節の冒頭に列記した記号を用いて書き改めるならば

$$\boldsymbol{v}_\alpha=(\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta})\boldsymbol{c}_\alpha,\ \ ^\forall\alpha\in K \quad (4.2)$$

のように表わすことができる。ここで,$\boldsymbol{c}_\alpha$ は定数より成る列ベクトルである。(4.2)をこれまでの前2つの節で議論した産出構造もしくは投入構造に関連づけて誘導しうるとするならば,(4.2)も第2節の(A-P)の(P.7)で注意した意味において1つの技術仮説と考えることが許されよう。そこで,かりに(4.2)の関係を「技術仮説B」と名付けておこう。

いま $\boldsymbol{v}_\alpha$ の産出構造 P^α に着目して,P^α が相似拡大的であるとする。その第3節で議論した産出構造の相似拡大性の性質に注意するならば,

$$\boldsymbol{v}_\alpha\in P^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha)=G^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha)P_\alpha{}^\circ,\ \boldsymbol{v}_\alpha\neq 0$$
$$\Longrightarrow {}^\exists\boldsymbol{v}^\circ{}_\alpha\geq 0;\boldsymbol{v}_\alpha{}^\circ\in P_\alpha{}^\circ,\ \boldsymbol{v}_\alpha=G^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha)\cdot\boldsymbol{v}_\alpha{}^\circ \quad (4.3)$$

である。そこで,$\boldsymbol{c}_\alpha=(\boldsymbol{v}_\alpha{}^\circ/\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta}{}^\circ)$

とおくならば,

$$\boldsymbol{v}_\alpha=(\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta})\boldsymbol{c}_\alpha$$

が得られる。逆に,任意の $\boldsymbol{v}_\alpha{}^\circ\in P_\alpha{}^\circ\ (\boldsymbol{v}_\alpha{}^\circ\neq 0)$ に対して,

$$\boldsymbol{c}_\alpha=(\boldsymbol{v}_\alpha{}^\circ/\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta}{}^\circ)$$

とおくならば,任意の投入ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha\in X(\boldsymbol{x}_\alpha\neq 0)$ に対して,

$$\boldsymbol{v}_\alpha=(\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta})\cdot\boldsymbol{c}_\alpha,\boldsymbol{v}_\alpha\in P^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha)$$

を満す産出ベクトル $\boldsymbol{v}_\alpha$ が得られる。

しかし,以上の推論において $\boldsymbol{c}_\alpha$ は一意に決定されない。$\boldsymbol{c}_\alpha$ を一意に決定する「技術仮説B」の変種としては次のものが考えられる。

技術仮説 $\mathbf{B_1}$: すべての産業 $\alpha\in K$ について次の条件が満される。

$$\boldsymbol{v}_\alpha\in T_P{}^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{v}_\alpha\neq 0,\ \boldsymbol{x}_\alpha\in X,\ \boldsymbol{x}_\alpha\neq 0,\ \boldsymbol{r}\in V,$$
$$\boldsymbol{r}\neq 0\Longrightarrow\{\lambda\boldsymbol{v}_\alpha|\lambda>0\}\cap T_P{}^\alpha(\boldsymbol{x}'_\alpha,\boldsymbol{r})\neq\phi,\ \text{for all}$$
$$\boldsymbol{x}_\alpha{}'\in X,\ \boldsymbol{x}_\alpha{}'\neq 0 \quad (4.4)$$

技術仮説 $\mathbf{B_2}$: すべての産業 $\alpha\in K$ について次の条件が満される。

$$\boldsymbol{v}_\alpha\in T_P{}^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{v}_\alpha\neq 0,\ \boldsymbol{x}_\alpha\in X,\ \boldsymbol{x}_\alpha\neq 0,$$
$$\boldsymbol{r}\in V,\ \boldsymbol{r}\neq 0$$
$$\boldsymbol{v}_\alpha{}'\in T_P{}^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha{}',\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{v}_\alpha{}'\neq 0,\ \boldsymbol{x}_\alpha{}'\in X,\ \boldsymbol{x}_\alpha{}'\neq 0$$
$$\Longrightarrow\boldsymbol{v}_\alpha/\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta}=\boldsymbol{v}_\alpha{}'/\sum_{\beta\in M}v'_{\alpha\beta}=\boldsymbol{c}_\alpha(\boldsymbol{r}) \quad (4.5)$$

技術仮説 $\mathbf{B_3}$: すべての産業 $\alpha\in K$ について次の条件が満される。

$$\boldsymbol{v}_\alpha\in T_P{}^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{v}_\alpha\neq 0,\ \boldsymbol{x}_\alpha\in X,\ \boldsymbol{x}_\alpha\neq 0,\ \boldsymbol{r}>0$$
$$\boldsymbol{v}_\alpha{}'\in T_P{}^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha{}',\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{v}_\alpha{}'\neq 0,\ \boldsymbol{x}_\alpha{}'\in X,\ \boldsymbol{x}_\alpha{}'\neq 0,$$
$$\boldsymbol{r}'>0\Longrightarrow(\boldsymbol{v}_\alpha/\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta})=(\boldsymbol{v}_\alpha{}'/\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta}{}')=\boldsymbol{c}_\alpha \quad (4.6)$$

$\boldsymbol{c}_\alpha$ を一意に決定する「技術仮説B」の変種において,「技術仮説 B_3」が最も強い条件となっている。すなわち,r に関する産出拡張経路の中で産出価格のベクトルが必ず正となっているものを選ぶことができるならば,$\boldsymbol{c}_\alpha$ を $\boldsymbol{r}$ とは関係なく一意に決めることができる。これに対して,「技術仮説 B_2」は,同じく $\boldsymbol{r}$ に関する産出拡張経路の中で適当な,ゼロでない産出価格ベクトルを見出すことができるならば $\boldsymbol{c}_\alpha$ の一意性を確保することが可能であることを主張するからである。「技術仮説 B_1」では条件がさらに緩められている。産出拡張経路の要素は収入函数とそれの支持超平面の切する部分にほかなら

ない。産出のスケールを適当に伸縮してやるならば，収入函数とそれの支持超平面が接する部分との交点が存在し，その産出のレベルに応じて $\boldsymbol{c}_\alpha$ を決めることができる。いずれにしても SNA における商品技術を形成する条件の1つである(2.5)—ここで言う「技術仮説 B」—をこのように技術仮説として位置づけることは1つの仮定でしかない。果してこの仮定が当を得たものであるかどうかは別に検討を要することがらである。しかし，この仮定をかりに承認しうるとするならば，「技術仮説 B」を技術仮説とし解釈することは可能であって，それは産出拡張経路上の適当な産出レベルの決定に帰着する[8]。

同様の見地から SNA の言う産業技術の仮定を技術仮説の見地から見直してみることも興味のあることであろう。当然，ここでも産業技術仮定の重要な構成要素となっている(2.6)の関係が技術仮説としていかなる意味を持ちうるかがさしあたりの検討の対象である。ところで前にも述べたように，(2.6)の条件は上述の(2.5)の場合と同様に産出構成のパターンを示すものである。すなわち，(2.6)は各商品に関して産出の産業別構成の一定を要請しているのである。本節の冒頭に列記せられた記号を用いて(2.6)を書き改めるならば，

$$\boldsymbol{v}_\beta=(\sum_{\alpha\in K} v_{\alpha\beta})\boldsymbol{d}_\beta \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{v}_\beta=(v_{\alpha\beta}),\ \ \alpha\in K, \beta\in M$$

と表わすことができる。ここで $\boldsymbol{d}^\alpha$ は定数より成る列ベクトルである。すなわち，(4.7)は各商品 $\beta\in M$ の産業別産出比率が各産業の投入ベクトル $\boldsymbol{x}^\alpha$ に依存することなく一定比率 $\boldsymbol{d}_\beta$ によって表わされることを含意する。いま一歩を譲って，$\boldsymbol{d}_\beta$ が $\sum_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha$(ベクトル和)に依存することは認められたとしよう。すなわち $\boldsymbol{d}_\beta$ は各産業の投入ベクトル $\boldsymbol{x}^\alpha$ には依存していないが，投入全体(ベクトル和)には依存するものと仮定しうるとしよう。それにも拘らず，各産業の技術構造が独立，すなわち第2節で議論した G_P が各産業について定義される，とするならば，各産業は投入 $\boldsymbol{x}_\alpha$ を動かすことによってその産出 $\boldsymbol{v}_\alpha$ を変えうるわけであって，産業間の産出比率の一定を言うことはできない。換言するならば，(4.7)の条件は各産業がそれぞれ独立に(A−P)と(A−L)を設定しうるとするわれわれの推論の基本的な前提と衝突している。

SNA の商品技術仮定と産業技術仮定は公刊の過程においてそれらの解釈と評価に関しいくつかの変遷があったことはよく指摘される事実である[9]。商品技術仮定を主とする「社会会計行列」(social accounting matrix)の当初の発想から始り，両技術仮定の併行的な提案，さらには中間的な混合技術仮定の導入と言うように変遷の方向は必ずしも直截ではない。こうした変遷の経過は SNA の技術仮定が統一された原理に基づいて展開されたものではないことを示唆する。これらの技術仮定を投入構造と産出構造を結ぶ「技術仮説」に位置づけを企てるわれわれの試みは，そうした1つの—唯一のではない—統一原理の設定を目指している。少くともわれわれの設定する技術仮説の見地からするならば，産業技術仮定は商品技術と同じ平面に立って代置しうる対立仮説とは認められない[10]。

産出構造に相似拡大性を前提すると，「技術仮説 B」の3つの変種の間には次の関係が成立している。

(P.6)　すべての産業の産出構造が相似拡大的であるとする。そのとき，

(i)　技術仮説 B_1 が満される。

(ii)　すべての産業の産出集合 $P^\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha), \boldsymbol{x}_\alpha\in X$ が狭義凸ならば，技術仮説 B_2 が満される。

(iii)　すべての産業の産出構造が IFLOS ならば，技術仮説 B_3 が満される。逆にすべての産業の産出構造が IFLOS で，かつ技術仮説 B_3 が満されるならば，その産出構造は相似拡大的である。

第I部においてわれわれは SNA の商品技術仮定および産業技術仮定に代る F 技術の考え方を提案しておいた。この F 技術の考え方は，これまで議論して来た「技術仮説」の見地からいかなる位置と特徴づけを与えられる性質のものであろうか。そのことを明らかにするため，本節の冒頭に掲げた記号を用いて F 技術を書き改めることから始めよう。

いま，すべての産業が同一の投入構造を持ち，かつ LINSIS であるとする。従って各産業の線型投入函数が導かれ，

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}_\alpha=\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_\alpha,\ \ \boldsymbol{v}_\alpha\in V,\ \ \alpha\in K \\ \boldsymbol{F}=[f_{\gamma\beta}],\ \ m\times m,\ \ f_{\gamma\beta}\geqq 0,\ \ {}^\forall\gamma,\beta\in M \\ \sum_{\gamma\in M} f_{\gamma\beta}>0,\ \ {}^\forall\beta\in M,\ \ \sum_{\beta\in M} f_{\gamma\beta}>0,\ \ {}^\forall\gamma\in M\end{gathered} \tag{4.8}$$

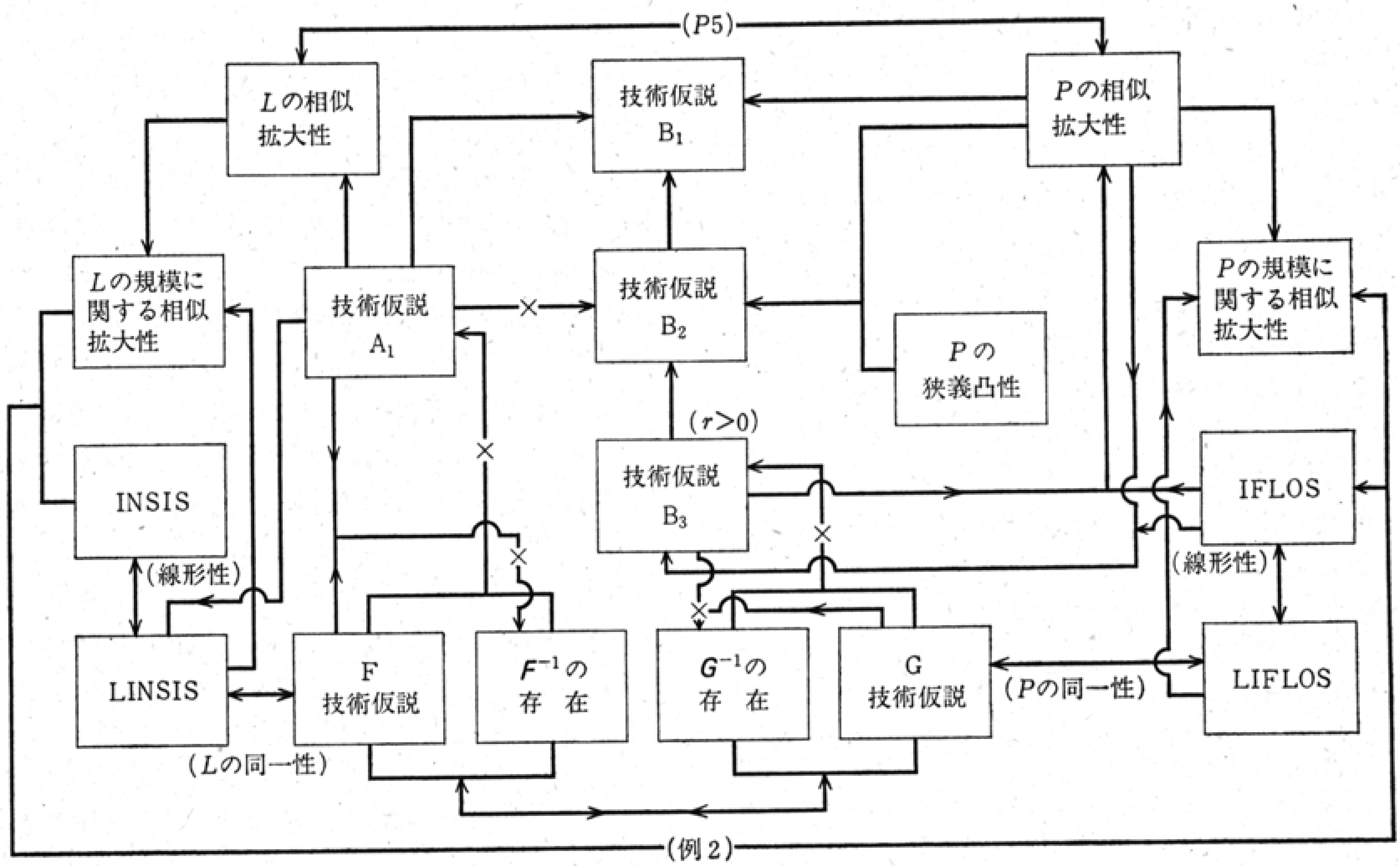
と表わされるような行列 $\boldsymbol{F}$ が存在するとき，経済の生

8)　技術仮説 B_2 もしくは B_3 が成り立つときには産出価格ベクトルは所与である。従って，これらの技術仮説は価値額の次元においても成立している。

9)　例えば，宮沢健一，「新 SNA 投入産出表と技術仮説」『一橋論叢』，昭和46年5月号参照。

10)　第I部ではこの論点を技術構造の解明とはやや異なる観点から指摘している。

第 II-1 図 投入構造，産出構造と技術仮説の関連



産構造は F 技術を持つと言う。このことを産出構造の側から見て，すべての産業が同一の産出構造を持ち，かつ LIFLOS であるとする。当然に，線型産出函数が導かれ，

$$\boldsymbol{v}_\alpha=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_\alpha,\quad \boldsymbol{x}_\alpha\in X,\quad {}^\forall\alpha\in K \tag{4.9}$$
$$\boldsymbol{G}=(g_{\beta\gamma}),\quad m\times m,\quad g_{\beta\gamma}\geqq 0,\quad {}^\forall\beta,\gamma\in M$$
$$\sum_{\gamma\in M}g_{\beta\gamma}>0,\quad {}^\forall\beta\in M$$

と表わされるような行列 $\boldsymbol{G}$ が存在するとき，経済の生産構造は G 技術を持つと言う。以下便宜上，これらの技術仮説をそれぞれ「**F 技術仮説**」および「**G 技術仮説**」と略称する。そのとき F 技術仮説および G 技術仮説が次のような産出構造と投入構造を基礎に置いていることは見易い。

(P. 7) (1) F 技術仮説を与える投入構造 L_F および産出構造 P_F は次の形に書かれる。

$$L_F(\boldsymbol{v}_\alpha)=\{\boldsymbol{x}_\alpha\in X|\boldsymbol{x}_\alpha\geqq\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_\alpha\},$$
$$\boldsymbol{v}_\alpha\in V,\quad \alpha\in K \tag{4.10}$$
$$P_F(\boldsymbol{x}_\alpha)=\{\boldsymbol{v}_\alpha\in V|\boldsymbol{x}_\alpha\geqq\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_\alpha\},$$
$$\boldsymbol{x}_\alpha\in X,\quad \alpha\in K \tag{4.11}$$

このとき，投入構造 L_F および産出構造 P_F はともに規模に関し相似拡大的である。

(2) G 技術仮説を与える投入構造 L_G および産出構造 P_G は次の形に書かれる。

$$L_G(\boldsymbol{v}_\alpha)=\{\boldsymbol{x}_\alpha\in X|\boldsymbol{v}_\alpha\leqq\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_\alpha\},$$
$$\boldsymbol{v}_\alpha\in V,\quad \alpha\in K \tag{4.12}$$
$$P_G(\boldsymbol{x}_\alpha)=\{\boldsymbol{v}_\alpha\in V|\boldsymbol{v}_\alpha\leqq\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_\alpha\},$$
$$\boldsymbol{x}_\alpha\in X,\quad \alpha\in K \tag{4.13}$$

F 技術仮説を SNA の技術仮説 A と比較するための1つの手がかりとして，技術仮説 A_1 の投入構造 L^{A1} および産出構造 P^{A1} を考えよう。容易にそれらは次のような表現と性質によって特徴づけられる。

(P. 8) 技術仮説 A_1 を与える投入構造 L^{A1} と産出構造 P^{A1} は，それぞれ，

$$L_\alpha{}^{A1}(\boldsymbol{v}_\alpha)=\{\boldsymbol{x}_\alpha\in X|\boldsymbol{x}_\alpha\geqq(\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta})\boldsymbol{b}_\alpha\},$$
$$\boldsymbol{v}_\alpha\in V \tag{4.14}$$
$$P_\alpha{}^{A1}(\boldsymbol{x}_\alpha)=\{\boldsymbol{v}_\alpha\in V|\boldsymbol{x}_\alpha\geqq(\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta})\boldsymbol{b}_\alpha\},$$
$$\boldsymbol{x}_\alpha\in X \tag{4.15}$$

である。このとき，

$$L_\alpha{}^{A1}(\boldsymbol{v}_\alpha)=(\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta})\{\boldsymbol{x}_\alpha\in X|\boldsymbol{x}_\alpha\geqq\boldsymbol{b}_\alpha\},\ \boldsymbol{v}_\alpha\geqq0$$

$$L_\alpha{}^{A1}(0)=X$$

$$P_\alpha{}^{A1}(\boldsymbol{x}_\alpha)=\underset{\gamma\in N}{\mathrm{Min}}\ (x_{\alpha\gamma}/b_{\alpha\gamma})\{\boldsymbol{v}_\alpha\in V|\sum_{\beta\in M}v_{\alpha\beta}\leqq1\}$$

$$N=\{\gamma\in M|b_{\alpha\gamma}>0\}\neq\phi,\ \boldsymbol{x}_\alpha\in X$$

である。従って投入構造 L^{A1} は LINSIS かつ相似拡大的である。また産出構造 P^{A1} は相似拡大的である。(P. 8) によって，産出構造 P^{A1} は技術仮説 B_1 を満すが，同 B_2, B_3 は満さない。

技術仮説 A_1 と F 技術仮説はある特殊な条件のもとでは同値となる。すなわち，

(P. 9)　すべての産業が同一の投入構造を持つとする。そのとき次の条件 (i), (ii) において，(i) ⟺ (ii)

(i)　技術仮説 A_1 が満される。

(ii)　F 技術仮説が満足され，かつ行列 $\boldsymbol{F}$ において

$$\boldsymbol{F}=[f_{\gamma\beta}],\ f_{\gamma\beta}=f_{\gamma\beta'},\ {}^\forall\beta,\beta'\in M,\ \gamma\in M$$

すなわち，$\boldsymbol{F}$ 行列が各行同一の要素から構成されるならば，F 技術仮説は技術仮説 A_1 に帰着する。また産出構造を LIFLOS に特定化するならば，次の性質が成立する。

(P. 10)　産出構造が LIFLOS であるとする。従って，

$$P(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{v}\in V|\boldsymbol{v}\leqq\phi(\boldsymbol{x})\},\ \boldsymbol{x}\in X$$

$$\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}=[a_{\beta\gamma}],\ a_{\beta\gamma}\geqq0.\ {}^\forall\beta,\gamma\in M$$

となる非負行列 $\boldsymbol{A}$ が存在する。このとき，次の条件 (a), (b), (c) の間に，(a) ⟺ (b) ⟺ (c)

(a)　技術仮説 B_3 が満される。

(b)　行列 $\boldsymbol{A}$ は次の条件を満す。

$$\boldsymbol{a}_{(\gamma)}'=(a_{1\gamma},a_{2\gamma},\cdots\cdots,a_{\beta\gamma},\cdots\cdots,a_{m\gamma}),\ \gamma\in M$$

$$\boldsymbol{h}'=(h_1,\cdots\cdots,h_\beta,\cdots\cdots,h_m)$$

$$\boldsymbol{a}_{(\gamma)}=\lambda_\gamma\cdot\boldsymbol{h},\ \text{some }\lambda_\gamma>0,\ \gamma\in M$$

(c)　産出構造は相似拡大的である。

投入構造と産出構造および技術仮説に関する性質とその相互関係を図示してみるならば第 II-1 図のようになる。図の中の矢印は関連の存在を示し，カッコによって示された条件は関連を成立せしめるための条件を表示する。また矢印の間に×印が挿入されてある場合には，矢印の関連が否定されていることを示す[11]。

倉林義正（一橋大学経済研究所）
作間逸雄・八東厚生（一橋大学院博士課程）

11)　図 II-1 の (P. 5) は紙幅の関係で省略してある。その内容は Shephard の意味で L, P が相似拡大的であると，D. 6, D. 9 の意味でも L, P は相似拡大的であることから明らかである (Shephard, *op. cit*, p. 200 参照)。

投稿規程

本誌は，1962 年 7 月発行の第 13 巻 3 号で紙面の一部を研究者の自発的な投稿制による原稿のために割くことを公表いたしましたが，それ以来かなりの数の研究者の投稿を経て今日にいたりました。ここに改めて本誌が投稿制を併用していることを明らかにし，投稿希望者を募ります。投稿規程は次のとおりです。

1.　投稿は「論文」(400 字詰 40 枚)「寄書」(400 字詰 20 枚) の 2 種とします。
2.　投稿者は，原則として，日本学術会議選挙有権者と，同資格以上のもの (大学院博士課程後期に在籍する学生をふくむ) に限ります。
3.　投稿の問題別範囲は，本研究所がその業務とする研究活動に密接な関係をもつ分野に限ります。本研究所の研究部門は次のとおりです。
    日本経済。アメリカ経済。ソ連経済。英国および英連邦経済。中国および東南アジア経済。国民所得・国富。統計学およびその応用。国際経済機構。経済計測。学説史および経済史。比較経済体制。金融経済。現代経済分析。
4.　投稿原稿の採否は，編集部の委嘱する審査委員の審査にもとづき編集部で決定させていただきます。原稿は採否にかかわらずお返ししません。
5.　原稿の送り先：(〒 186) 東京都国立市中 2 丁目 1 番地　一橋大学経済研究所『経済研究』編集部 (電話 0425 (72) 1101　内線 374)
6.　投稿を希望される方には『経済研究』執筆要綱をお送りしますので，送付先住所，氏名記入・50 円切手貼付の封筒を添えて編集部までお申込み下さい。