評価系と決定水準

——決定理論的接近——

松 原 望

1. 導入と要約

意思決定モデルへの数理的接近を考える場合，端緒となる問題は評価である。評価を細かくすれば，それに対応して，導かれる望ましい決定方式は必然的に限定され，ある場合は最適として一意的に提示される。

この厳格な一意性は，しかしながら，モデルの自己完結性のために要請され，論理必然性により担保されているものであって，それ以上の根拠はない。むしろ，モデルと現実との結節点を考えると，多元主義的思考原理を導入して緊縛を解き，望ましい決定方式の**選択範囲**として提示する方が，より具体的妥当性をもった結果をもたらすと思われる。一方このように決定水準 (Decision Level) を緩いレンジに転換することは，端緒となるべき評価にどのような変化をもたらすであろうか。評価には大別して，基数的評価 (Cardinal Valuation) と序数的評価 (Ordinal Valuation) とがあり，これらを評価系と呼んでおこう。前者は多寡・大小等の数量的構造を，後者は比較，選好，好悪等の順序的構造をもつが，明らかに，前者は後者より細かく，後者は前者より緩い，粗い概念である。しからば，我々は評価として序数的評価を要請すれば，目的に合致する上で十分，という予想が立つ。しかも序数的評価に基礎を置くことは，十分に正当理由がある。実際，人間の行動決定の局面に関する限り，基数的評価は序数的評価の記述法であったり (例: 効用理論)，あるいは外的要因 (例: 財貨の量的多寡と選好行動) であったりする。その意味で，**序数的評価**こそ，人間行動のより本質的把握と思われる。

以上の過程を，統計的決定理論の枠組を発展させることにより，明らかにする。

2. 統計的決定理論の構造

概略をのべれば，まず θ は問題にしている現象の生起様式を支配している (と設定される) パラメーターで，未知とされる。「自然の状態」とよばれる。a は決定を行う者 (決定者) の対処様式であって，「行動」とよばれる。x は，問題にしている確率的な (不確定な) 現象 X の観測結果である。最後に行動 a の結果的評価として，θ に関連して，$L(a,\theta)$ あるいは $L_\theta(a)$ というスカラー量が与えられている。「損失関数」といわれるが，評価を負の価値で行うのは，沿革以上の理由はない。L を小さくする a が望まれる。

周知の如く，統計理論はこの構造をもち，またそれが「統計的決定理論」の名称の由来でもある。ここでは，統計データ x を資料にして，分布の母数 θ に関する推論 a を行うことが目的となっている。a は推定論では推定値，検定論では仮説の棄却・採択の別を表わす。L は θ に関する推論 a の精確さの評価量で，分散・平均二乗誤差，第1，2種の過誤確率に関連する。また，いわゆる意思決定理論では，実現している状況 (広義のデータ) x を資料に，行動 a を最も望ましく決定することが，追求される。θ は，決定者の支配できない，しかし，状況 x の生起様式を支配する要因を包括したもの，$L(a,\theta)$ は行動 a の何らかの評価である。

実際には，a は x に基づいて選択されるので，a 自身でなく，むしろ関数 $a=d(x)$ が決定者に許されている。d は「決定方式」といわれる。これに対応して，評価も a でなく d に対するものが必要となり，通常は，X がもたらす行動 $d(X)$ のうける評価 (損失の値) の統計的期待値 $R(d,\theta)=\mathcal{E}L(\theta,d(X))$ を考える。R は d の「危険度関数」とよばれる。統計的決定理論の目的は望ましい d の選択だが，それはこの危険度を標準とする。

ところで，モデルの性質上，θ が確定されていない (未知) ので，各 d に賦与される R の値が，数値として定まらない。θ の関数となっている。そこで，通常，(イ) θ の主観確率で $R(d,\theta)$ を平均した量 $r(d)$ を最小にする「ベイズ決定方式」，(ロ) 危険度を最大に見積った量 $\max_\theta R(d,\theta)$ を最小にする「ミニマックス決定方式」などを採用する。これらは，いずれも最適性を有している。

しかし，当初意識されなかった問題点として，(i) 最適性追求の自己目的化，(ii) 最適性は唯一性という一元主義，(iii) 損失関数 L の数値の確定 (基数的評価) の必要，等が指摘されている。(i)，(ii) はある程度は言語の問題であるが，おそらく誤解以上の問題もあり，(iii) は当面の応用上は，かなり致命的である。小論はこれらの

難点を克服することはもとより(一応，標題はそれであるが)，その解釈の一つの重要な場面として，意思決定と情報の受容様式の関連につき，新たな見地を提供する。

3. 完備クラスと状況的評価系

ベイズ，ミニマックス方式は θ のかかわりを一挙に除去する方法であるが，むしろ θ をしばしとどめて，各 θ ごとに d を評価する方法がむしろ穏健である。そこで，どの θ に対しても $R(d_1,\theta)\leqq R(d_2,\theta)$，かつ，ある θ_0 に対しては $R(d_1,\theta_0)<R(d_2,\theta_0)$ が成立するとき，「d_1 は d_2 よりも良い (better than)」と定め，$d_1 \succ d_2$ と記す。(関係 $\succ$ はいわゆる順序の公理を満たす。) この比較基準を標準にしつつ，すべての決定方式の全体 D の中から，望ましい部分集合 D^*(決定方式の「完備クラス」)を

$d \notin D^*$ ならば，$d' \succ d$ となる $d' \in D^*$ がある

と定める。これは次の意味をもつ。D^* に属さない d を採用する決定者は最善に採用しているとはいえない；なぜなら，D^* の中から d より良い d' を見出して採用できるからである。したがって，少くも D^* の中から選べば安全・妥当である。なお，完備クラスの存在は大きいものなら限りがなく，D^{**} が D^* より集合として大 $(D^*\subset D^{**})$ ならば，D^{**} も完備クラスとなる。決定方式を選ぶ範囲だから，完備クラスである限り，小さい方が望ましい。以後，そのいかなる真部分集合も，もはや完備でないような「最小完備クラス」に限定する。

完備クラスの概念は，従来の統計的決定理論では，単なる思考の経済の一場面と考えられてきたが，それ以上の意味を賦与することができる。第1に，完備クラスは一つの決定方式でなく，それらの**集合**である。集合としての妥当性・安全性を有する。そこには，唯一の決定方式を最適として他の全てを考慮外へ排除するのでなく，決定方式案の束を提示するという，複数的思考・多元主義の原理をもりこむことができる。具体的にどの決定方式を実行するかは，論理必然的には決まらないし，また決めない。自由が留保されている。しかして，完備クラスは「安全」と「自由」のトレード・オフの妥当な均衡を実現している。第2に，完備クラスは以下に展開するごとく，行動に対する選好順序(序数的評価)に一意的に対応している。すなわち，決定者の評価の根本的な様式を反映し，担っている。

第1表

全体	分類	方式	第1期	第2期	
				E	$\bar{E}$
D	D_A	d_1	a_2	a_1	a_2
		d_2	a_2	a_2	a_1
		d_3	a_1	a_2	a_1
		d_4	a_1	a_1	a_2
	D_N	d_5	a_2	a_1	a_1
		d_6	a_2	a_2	a_2
		d_7	a_1	a_1	a_1
		d_8	a_1	a_2	a_2

モデルは次の様に設定される。(具体的設定例として，第5節の例が好都合である。) 可能な行動を a_1, a_2 とし，一方，$x=E, \bar{E}$ (E の否定)を生み得る確率現象 X があって，決定者はその不確定性下におかれている。X の出現前に第1期の行動，出現後に X の出方を見て第2期の行動をとる。可能な決定方式は，表1の8通りとなる。例えば d_1 は第1期に a_2，第2期には，E が出れば a_1(この結果たる過程を a_2Ea_1 と書く)，$\bar{E}$ が出れば a_2 (同じく $a_2\bar{E}a_2$)をとる方式である。以下同様である。さて

各状況 $E, \bar{E}$ での，結果 $a_iEa_j, a_i\bar{E}a_j$ の選好順序 $\succ$ のパターン(選好パターン)がきまれば，その基数的評価のいかにかかわらず，完備クラス D^* は一意的に定まる。

例えば，選好パターンが

$a_2Ea_1 \succ a_1Ea_1 \succ a_2Ea_2 \succ a_1Ea_2$,

$a_1\bar{E}a_2 \succ a_1\bar{E}a_1 \succ a_2\bar{E}a_1 \succ a_2\bar{E}a_2$

ならば，$l_{ij}, \bar{l}_{ij}$ をそれぞれ $a_iEa_j, a_i\bar{E}a_j$ の状況的な(後述)損失値として，

$l_{21}<l_{11}<l_{22}<l_{12}$,　$\bar{l}_{12}<\bar{l}_{11}<\bar{l}_{21}<\bar{l}_{22}$

である。$P(E)=\theta$(確率のパラメーター)とすれば，$R(\theta, d_1)=\theta l_{21}+(1-\theta)\bar{l}_{22}$ 等であるから，$R(\theta,d_5)\leqq R(\theta,d_1)$，$R(\theta,d_4)<R(\theta,d_2)$，$R(\theta,d_4)\leqq R(\theta, d_3)$，$R(\theta,d_5)<R(\theta, d_6)$，$R(\theta,d_4)\leqq R(\theta,d_7)$，$R(\theta,d_4)<R(\theta,d_8)$。　しかも $\theta=1/2$ に対しては，各所で，$\leqq$ でなく $<$ が成立する。ゆえに $d_5 \succ d_1, d_4 \succ d_2, d_4 \succ d_3, d_5 \succ d_6, d_4 \succ d_7, d_4 \succ d_8$ となる。d_4 と d_5 は比較ができない ($d_4 \succ d_5$ も，$d_5 \succ d_4$ も成立しない)。以上から，D^* は d_4, d_5 から成る。また，パターンの第1列が今度は，$a_1Ea_1 \succ a_2Ea_1 \succ a_2Ea_2 \succ a_1Ea_2$ と変った場合は，D^* は d_4 のみから成る。

いずれにせよ，完備クラスは第1期にある行動をとったとして，第2期に，実現した状況 $x=E, \bar{E}$ に於いて最も好ましい行動をとるような方式からできている，と解釈される。これらの結果は，行動を $a_1, \cdots, a_n$, X の出方を $x=E_1, \cdots, E_k$ として拡張しても成り立つ。

いまひとつ重要なことは，評価の問題が実現した「状況」のなかでなされていることである。これは従来の統計的決定理論において，行動の評価(基数的，序数的)が，$L(a,\theta)$ と，自然の状態 θ を背景にして行われたことと

対照的である。θ は，決定者には支配も観察もできない迂遠な存在であるが，状況 x はまさに，実現し観察もできる生の現実であって，より我々に近接している。評価をそれにかかわらしめて行うことは，より説得的と思われる。これは，いわゆる「状況倫理」的発想法であるが，これ以上は述べない。

4. 情報の受容様式とその価値

「情報」は極めて漠とした概念である。単に「知る」ことと解するならば，決定者(人間)に負の価値をもたらしうる。にもかかわらず，従来の情報の数理の分野では，情報の評価は，専ら現象の確率的構造に対する計数にほとんど終始してきた。これは，確率の概念自体が事実上不可能である現実の歴史現象(事実の一回性！)にほとんど無力のみならず，情報がきわめて大なる程度に決定者の価値体系に依存する局面を，無視している。

そこで，この問題を究明するために，一場面として，市場構造とランダム機構の関係を考える。ある財(商品取引・株式売買を典型として想像されたい)を所有する(a_1)か，しない(a_2)かを決定したい。$E, \bar{E}$ はその財の価格の上げ要因，下げ要因として作用する何らかの事件である。E が「上げ要因」であるとは，代数的に

$$a_1Ea_1 > a_2Ea_1,\quad a_1Ea_2 > a_2Ea_2$$

と定義される。E の生起後どうしようと，それを固定して考える限り，騰貴後よりも騰貴前に購入の方がよい，ということである。$\bar{E}$ が「下げ要因」であるとは，

$$a_2\bar{E}a_1 > a_1\bar{E}a_1,\quad a_2\bar{E}a_2 > a_1\bar{E}a_2$$

と定義される。(上と比べると，第1期の行動が $>$ の両辺で入れ替っている。)

このとき，$\#D^*=2$ なることが容易に示される。問題はその2個が，D_A, D_N のいずれから来ているかである。前者は $E, \bar{E}$ に応じて行動を変える方式，後者は変えない，つまり情報($E, \bar{E}$ のいずれが生起したか)を利用一少くとも見かけ上一しない方式である。情報を利用すべきか，利用すべきでないか，それを決めるのは，その財の所有がもたらす収益性の条件である。a_1-a_1, a_1-a_2; a_2-a_1, a_2-a_2 は，- が E であるにせよ，$\bar{E}$ であるにせよ，buy and retain, buy and sell; wait and buy, wait and do nothing をそれぞれあらわすから，収益性の様相は4個のペア

$$\pi_1=(a_1Ea_1, a_1Ea_2),\quad \pi_2=(a_2Ea_1, a_2Ea_2)$$

$$\bar{\pi}_1=(a_1\bar{E}a_1, a_1\bar{E}a_2),\quad \bar{\pi}_2=(a_2\bar{E}a_1, a_2\bar{E}a_2)$$

の各々で，どちら向きの順序 $(>, <)$ が成立するかで記述される。$>$ ならば収益的，$<$ ならば損失的という。なお $\pi, \bar{\pi}$ の添字 $i=1, 2$ は第1期の行動が，上のいい方で，buy, wait であることを，それぞれ示している。

1. π_i と $\bar{\pi}_i$ の収益性が各 i に対し一致する場合

(i) $i=1, 2$ に対し収益的，(ii) $i=1$ に対し収益的，$i=2$ に対し損失的，(iii) (ii)の逆，(iv) $i=1, 2$ に対し損失的，の場合があるがそれぞれ D^* は (i) d_5, d_7，(ii) d_6, d_7，(iii) d_5, d_8，(iv) d_6, d_8 から成り，いずれも $D^* \subset D_N$。

これらの場合は，D^* の各方式は全く情報を利用しない。しかも，D^* の一般的定義から，利用する方式はむしろ悪い結果を招く。

2. π_i と $\bar{\pi}_i$ の収益性が各 i に対し相反する場合

例えば，π_1, π_2 が収益的，$\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2$ が損失的の場合は，D^* は d_1, d_4 から成る。この場合の他に3通りあるが，いずれも $D^* \subset D_A$。すなわち，D^* の各方式は情報を利用する。情報を利用しない方式はむしろ悪い結果を招く。

3. π_i と $\bar{\pi}_i$ の収益性が，ある i に対し一致，他の i に対し相反する場合

例えば，$\pi_1, \pi_2, \bar{\pi}_1$ は収益的，$\bar{\pi}_2$ は損失的の場合は，D^* は d_1, d_7 から成る。この場合の他に7通りあるが，いずれも $D^* \cap D_A \neq \phi, D^* \cap D_N \neq \phi$ である。D^* は D_A, D_N の双方にまたがり，情報を利用する方式，しない方式の一つづつを含む。

そこで，$\alpha=\#(D^* \cap D_A)$, $\nu=\#(D^* \cap D_N)$ を情報の実質的利用性 (Essential Availability)，実質的無効性 (Essential Nullity) という。(無効の中には，有害性も含まれている。) 因みに **1.** では $\alpha=0, \nu=2$，**2.** では $\alpha=2, \nu=0$，**3.** では $\alpha=\nu=1$ である。また，$\alpha+\nu=2$ で，α と ν は互に相補的である。

このように，決定者のある選好パターンが与えられたとき，$\alpha=$(π_i と $\bar{\pi}_i$ の収益性の相反数)，$\nu=$(π_i と $\bar{\pi}_i$ の収益性の一致数)，であるから，その決定者から見た情報の価値・無価値は，彼の選好パターンにより一意的に定まる。しかも，確率的現象の確率構造と無関係である。なお，$\#D^*$(決定方式の選択の自由度で，上例では2)も，選好パターンだけで決まることに注意されたい。

5. H. Theil の企業家モデル

上に述べたところによれば，ある決定者にとっての情報の価値は，その選好パターンからきわめて簡単な手続きで導出される。そこで，これを応用する例として，H. Theil の設定したモデルを用いることにする。

[設定例] ある企業家がいて自動車会社を所有していたとしよう。彼には十分な利益金の蓄積があり，しかも自動車の販売市場も大方飽和したと判断したので，新たに航空機産業に進出する可能性を考慮した。その場合，

航空機会社をそっくり買収するのである。ところが一大困難が横たわっている。近い将来に2人の候補が激突する大統領選挙があって，1人は，折柄航空機産業は政府契約が多いので，公正という立場から特別課税をせよと提唱しているのである。従って，この企業家は，課税賛成候補($\bar{E}$)と課税反対候補(E)のどちらが，将来当選するかわからない，という不確定性にさらされることになる。しかも，選挙が終ってしまった後では，当然買収価格は市場機構の中で上昇あるいは下落する。だから選挙の結果を待っていて，もし賛成候補が当選した場合，選挙前に買うよりも大幅に高い価格に直面してしまうことになる。さて，この企業家は航空機会社を買うか(a_1)否か(a_2)，買うとすれば選挙前か後か，選挙後に手放すべきか否か。

Theil の導入した利得の値は，我々の記法で，

$$a_1Ea_1:5,\ a_1Ea_2:2,\ a_2Ea_1:0\ \ a_2Ea_2:1,$$

$$a_1\bar{E}a_1:-5,\ a_1\bar{E}a_2:-4,\ a_2\bar{E}a_1:-3\ \ a_2\bar{E}a_2:1$$

これから，選好パターンを作ると，

$$a_1Ea_1>a_1Ea_2>a_2Ea_2>a_2Ea_1,$$

$$a_2\bar{E}a_2>a_2\bar{E}a_1>a_1\bar{E}a_2>a_1\bar{E}a_1.$$

前節の条件をチェックすれば，$E, \bar{E}$ はたしかに，上げ要因，下げ要因になっており，したがって $\sharp D^*=2$. また，π_1 は収益的，$\pi_2, \bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2$ は損失的であるから，相反数が1，一致数も1となり，$\alpha=\nu=1$(**3.** の場合)である。従って，情報は高度に利用性が高いとはいえないが，全く無効でもない。実際，D^* は d_4, d_6 から成る。選挙前に買えば，選挙の結果は利用する価値があるが(d_4)，買わない場合は，選挙の結果(したがって選挙自体)も無視して，買わないで通す(d_6)のが妥当である。それ以外の6つの方式は，机上案にさえする価値もない。ただし，d_4, d_6 のいずれを選ぶか，つまり，選挙前に買うか否かは，何らかの方法で決めることになる。

Theil はこれらの数字に内部構造を考えなかったが，それを考えてみよう(表2)。

表 2

状況,行動 / 内訳	選挙前		選挙後			
			課税反対(E)		課税賛成($\bar{E}$)	
	進出	現状	進出	現状	進出	現状
買収価格	4	0	$4\frac{1}{2}$	0	$3\frac{3}{4}$	0
売上げ	8	2	8	2	8	2
課　税	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0

表2から，収支勘定をしてみると

$$\begin{array}{lcccc}
 & -=E & & -=\bar{E} & \\
a_1\text{-}a_1: & 2 & ① & 1\frac{1}{2} & ④ \\
a_1\text{-}a_2: & \frac{1}{2} & ② & -\frac{1}{4} & ⑤ \\
a_2\text{-}a_1: & 1\frac{1}{2} & ③ & 1\frac{3}{4} & ⑥ \\
a_2\text{-}a_2: & 0 & & 0 &
\end{array}$$

それぞれの意味は，現状を基準として，①=利益(選挙前)，②=価格上昇分，③=利益(選挙後)，④=税引利益(選挙前)，⑤=価格下落分，⑥=税引利益(選挙後)である。また当然，①−②=③ および ④−⑤=⑥ となる。この会計上の恒等式は，π_1 と π_2 の収益性の一致，$\bar{\pi}_1$ と $\bar{\pi}_2$ の収益性の一致を，意味するものに他ならない。したがって，この企業家にとって，選挙の結果という情報を受容する態度は，偏に選挙後の利益(課税反対候補当選)，あるいは税引利益(課税賛成候補当選)の2要素だけで最終的に決定される。これは既に予想したことである。今の場合 ③>0, ⑥>0 で，$\pi_1, \pi_2, \bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2$ すべて収益的だから，$\alpha=0, \nu=2$ である。情報は利用するに値せず，選挙の存在自体が無視されるので，彼にとって「確率的」現象はない。D^* は d_5, d_7 から成る。

重要なことは，同じく E によってもたらされるのであっても，価格騰貴の程度が激しく ② が2を超えるようであると，③<0，よって $\alpha=2, \nu=0$ となることである。すなわち，他の条件は全く変えずとも，一転して，選挙の確率的結果は支配的に有用な情報となる。したがって

結語: 社会現象においては，確率(不確定)的過程は，それ自身の本来的な生起様式だけで確率的と考えられるのではなく，それがもたらす結果を決定者が受容・評価することを通して，はじめて，最終的に「確率的」現象として登場するか否かが，判断される。それが，機械論的な概念規定と異なる点である。　(統計数理研究所)

参 考 文 献

[1]　T. Ferguson: *Mathematical Statistics—A Decision Theoretic Approach* (Academic Press).

[2]　D. Blackwell, M. Girshick: *Theory of Games and Statistical Decisions* (John Wiley and Sons).

[3]　藤本熙，松原望:『決定の数理』(筑摩書房)。

[4]　宮沢光一:『情報・決定理論序説』(岩波書店)。

[5]　H. Theil: *Optimum Decision Rules for Government and Industry* (North Holland).

[6]　松原望:「状況的決定理論 I」『統計数理研究所彙報』21巻1号(1973)。