# 系列相関の検定と検出力[1)]

栗　山　規　矩

## 1　はじめに

線型回帰モデルに最小2乗法を適用する場合，誤差項はたがいに無相関であると仮定される。この仮定が満たされないと，回帰係数の最小2乗推定量は不偏であるが最小分散でなくなり，分散の推定量は偏りをもつようになる。計量経済分析においては，正の系列相関の存在を見落したために，推定された係数の標本分散が過小に推定され，それを使った予測の精度がしばしば過大に評価される。このような理由から，系列相関の検定問題は時系列回帰分析の一分野を構成するにいたっている。

系列相関の検定方法としては，最小2乗法を適用した場合の残差 $\hat{\boldsymbol{u}}=[\hat{u}_1, \hat{u}_2, \cdots, \hat{u}_n]'$ を使って定義されるダービン・ワトソン比 $d=\sum_{i=2}^{n}(\hat{u}_i-\hat{u}_{i-1})^2\Big/\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$ を計算し，ダービン・ワトソン表を使って検定する方法が長らく用いられてきた。この検定方法には棄却・受容の決定を下せない場合が存在するので，この問題をめぐって種々な解決法が試みられた。それらは，(1) $d$ の真の有意点を推定する方法と(2)説明変数に依存しない有意点を与える検定統計量の作成とに大別できる。いずれもある程度の計算を必要とするが，高速度電子計算機の発達によって，検定不能域の問題はほぼ解決可能になった。さらに，ダービン・ワトソン比の1階正規マルコフ過程に対する検出力もほぼ明らかとなった。現在の興味は，系列相関の種々の検定方法の比較検討と高次の確率過程の検定問題に移っている。そこでは，新しい検定統計量を作ることや，いくつかのデータに対して検出力を調べ，その結果から検定量の性質に関してある程度一般性のある結論を導くことが一つの課題となる。さらに，実際に検定を行う場合，何を目安に検定量の良否を決めるべきか，使用上の注意は何かという重要な問題も生じる。これらの問題が十全に解かれるためには，系列相関の検定にまつわる問題点が認識されていることが是非とも必要である。この論文では，系列相関の検定理論を相似検定という視点から展開し，いくつかの代表的な検定方式について，1階正規マルコフ過程に対する検出力と問題点を比較検討する。

第2節では，誤差項が直接に観測されるとし，系列相関の検定理論を展開する。第3節では，2節で得られた結果を線型回帰モデルにおける系列相関の検定に適用し，回帰モデルにまつわる系列相関の検定の問題点を明らかにする。第4節では，一様最強力相似検定が存在する場合の検出力を検討する。第5節では，対立仮説を1階正規マルコフ過程とし，代表的な検定量の特性を比較検討する。

## 2　誤差項が直接に観測可能な場合の系列相関の検定

**2.1**　誤差項は正規分布にしたがうものとする。帰無仮説および対立仮説を

$$\begin{aligned} &H_0:\ \boldsymbol{v}\sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_0)\\ &H_1:\ \boldsymbol{v}\sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_1)\end{aligned}\tag{1}$$

とすると，変換 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{\Sigma}$ によって

$$\begin{aligned} &H_0:\ \boldsymbol{u}\sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n)\\ &H_1:\ \boldsymbol{u}\sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Sigma})\end{aligned}\tag{2}$$

となる。そこで，一般性を失うことなく，帰無仮説および対立仮説を(2)のようにする。ここで，$\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}$ は $n\times n$ の正定符号行列，$\boldsymbol{I}_n$ は $n\times n$ の単位行列，$\sigma^2$ は未知な分散である。

帰無仮説のもとで仮説を誤まって棄却する確率が，撹乱母数($\sigma^2$)の値のいかんにかかわらず有意水準 $\alpha$ に等しくなる検定は，相似な検定と呼ばれ，その棄却域は相似な棄却域と呼ばれる。密度関数が $f_0=K\exp\{-(1/2\sigma^2)\cdot\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}\}$ の場合は，確率変数 $u_i$ をその標準偏差の推定量，例えば $\sqrt{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}/n}$ で割って標準化してやると，それは $\sigma$ と無関係になるから，$\sigma^2$ に関して相似な棄却域は，標準化された誤差項の分布する空間に存在する。すなわち，確率変数の分布する $n$ 次元空間において，原点を中心とする球面上で面積比が $\alpha$ となる部分の集合の族となる。[6][35][37]。

---

1)　本稿は1974年に東京大学に提出した学位論文の第5章に手を加えたものである。

相似な棄却域のうちで，対立仮説のもとでその棄却域のなかに落ちる確率が最も高いものは，最強力相似検定棄却域と呼ばれる。対立仮説の $\boldsymbol{\Sigma}$ の値が指定されている場合は，必ず最強力相似検定が存在する。すなわち，直交行列 $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1}, & & & 0\\ & \frac{1}{\lambda_2}, & & \\ & & \ddots, & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$$

によって変換 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}$ をほどこすと

$$\begin{aligned}&H_0:\ \boldsymbol{w}\sim N(\boldsymbol{0},\sigma^2\boldsymbol{I}_n)\\&H_1:\ \boldsymbol{w}\sim N(\boldsymbol{0},\sigma^2\boldsymbol{\Lambda})\end{aligned}\tag{3}$$

となるので，$H_1$ に対する $H_0$ の有意水準 $\alpha$ の最強力相似検定は

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}w_i^2}{\sum_{i=1}^{n}w_i^2}\leq r_0\tag{4}$$

のとき，$H_0$ を棄却すればよい[2)]。ここで，$w_i$ は $\lambda_i$ に対応する確率変数であり，$r_0$ は任意の $\sigma^2$ に対して

$$P_r\{r\leq r_0|H_0\}=\alpha$$

によって定められる。(4)を変換前の $\boldsymbol{u}$ で表現すると

$$r=\frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}\leq r_0\tag{5}$$

となる。また，(1)式の $\boldsymbol{\Sigma}_0,\boldsymbol{\Sigma}_1$ を用いると

$$r=\frac{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\boldsymbol{v}}\leq r_0\tag{6}$$

と表現できる[26]。

この検定方法は，対立仮説のもとで帰無仮説の棄却される確率が有意水準よりも大きな不偏な検定であり[3)]，また，尤度比検定でもある。

**2.2**　上記の検定方式では，$\boldsymbol{\Sigma}$ のかわるたびに $r_0$ を定めねばならない。このわずらわしさも，検定が単に不偏であることで満足するならば解決可能である。すなわち，変換後の確率変数 $w_i$ と適当なウェイト $\pi_i$ を用いて，次のような検定関数を作ればよい。

$$r_u=\frac{\sum_{i=1}^{n}\pi_i w_i^2}{\sum_{i=1}^{n}w_i^2}\leq r_0'\tag{7}$$

ここで，$\pi_i$ は

$$\begin{aligned}&0\leq\pi_1\leq\pi_2\leq\cdots\leq\pi_n\\&0\leq\frac{1}{\lambda_1}\leq\frac{1}{\lambda_2}\leq\cdots\leq\frac{1}{\lambda_n}\end{aligned}\tag{8}$$

である。$r_0'$ は，任意の $\sigma^2$ に対して

$$P_r\{r_u\leq r_0'|H_0\}=\alpha$$

によって定められるから，ウエイト $\pi_i$ のみに依存し，前もって作表可能である。たとえば，$\pi_i$ としてノイマン比の固有根 $\pi_i=\frac{2n}{n-1}\left\{1-\cos\frac{\pi(i-1)}{n}\right\}$ を用いれば，検出力は低くなるが，Hart のノイマン比の有意点表[19]を利用することができる。また，ダービン・ワトソン比が上限もしくは下限に一致する場合の固有根を用いるならば，ダービン・ワトソン表[12]の上限の値あるいは下限の値を有意点として利用することができる。3者は，そのウエイトが互に似かよっているので，ほぼ同等の検出力をもつ不偏で相似な検定である[4)]。

検定関数(7)では，検出力を出来るだけ高くするために，変換後の確率変数 $w_i$ のすべてを用いているが，不偏で相似な検定を行うだけならば，異なった固有値に対応する $w_i$ を複数個用いればよい。すなわち，ある標本数 $n_0$ に対して有意点を求めておけば，$n_0$ 以上の標本数に対しては常に $n_0$ の場合の有意点を用いて不偏な検定を行うことができる。この場合最も計算量が少なく実用性のあるのは，$n_0=2$ で，最大固有値と最小固有値に対応する確率変数 $w_1$ と $w_n$ を用いる場合である。

**2.3**　変換された確率変数 $w$ を用いる系列相関の検定では，(3)式から明らかなように，$\boldsymbol{\Sigma}$ の固有値で1と異なるものが存在することを検出できればよいから，検出力をあまり問題にしないならば，正規確率変数の分散に関する種々の検定が $\boldsymbol{w}$ に対して適用できる。たとえば，互に独立な標準正規確率変数の比がコーシー分布をするという性質を用いて，かなり実用性のある系列相関の不偏な検定を行うことができる。

2変量正規確率変数 $\boldsymbol{\xi}'=(\xi_1,\xi_2)$ を

$$\begin{aligned}&E\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}\\&E\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'=\sigma^2\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{12}&\sigma_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{9}$$

とする。ここで $\sigma^2$ は未知，$\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{22}$ は既知である。$a=(\sigma_{22}-\sigma_{12}^2/\sigma_{11})^{1/2}$ とおくと，2つの確率変数 $(\sigma_{12}\xi_1/\sigma_{11}a)-(\xi_2/a)$ と $(\xi_1/\sigma_{11}^{1/2})$ は互に独立な標準正規確率変数となるから，その比 $\eta$

---

2)　証明は T. W. Anderson [6]，栗山 [35]，[37] 参照。

3)　証明は Kadiyala [21]，栗山 [35]，[37] 参照。

4)　不偏性の証明は Kadiyala [21]，栗山 [35]，[37] 参照。

$$\eta=\frac{\dfrac{\sigma_{12}\xi_1}{\sigma_{11}a}-\dfrac{\xi_2}{a}}{\dfrac{\xi_1}{\sigma_{11}{}^{1/2}}}=\frac{\sigma_{12}}{a\sigma_{11}{}^{1/2}}-\frac{\sigma_{11}{}^{1/2}}{a}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) \tag{10}$$

は，コーシー分布

$$f(\eta)=\frac{1}{\pi(1+\eta^2)}$$

にしたがう。$\boldsymbol{L}_1$ と $\boldsymbol{L}_2$ を直交する $n\times1$ ベクトル，$\boldsymbol{L}_i'\boldsymbol{L}_j=\delta_{ij}$, $(i, j=1, 2)$ とすると，

$$s=\frac{\boldsymbol{L}_2'\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{L}_1'\boldsymbol{w}} \tag{11}$$

は，帰無仮説のもとでコーシー分布をする。対立仮説のもとでは，$b+ds$ がコーシー分布をする。ここで

$$b=\frac{-\boldsymbol{L}_1'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}_2}{(\boldsymbol{L}_1'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}_1)^{1/2}\left[\boldsymbol{L}_2'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}_2-\dfrac{(\boldsymbol{L}_1'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}_2)^2}{\boldsymbol{L}'_1\boldsymbol{w}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}_1}\right]^{1/2}}$$

$$d=\frac{(\boldsymbol{L}'_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}_1)^{1/2}}{\left[\boldsymbol{L}_2'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}_2-\dfrac{(\boldsymbol{L}_1'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}_2)^2}{\boldsymbol{L}_1'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}_1}\right]^{1/2}}$$

である。そこで，

$$|s|=\frac{|\boldsymbol{L}_2'\boldsymbol{w}|}{|\boldsymbol{L}_1'\boldsymbol{w}|}\geqslant s_0 \tag{12}$$

のとき帰無仮説を棄却するという相似な検定方式が考えられる。これは，$d\leq1$ ならば，不偏な検定となる[5]。ここで，$s_0$ は $p_r\{|s|\geq s_0|H_0\}=\alpha$ となるように定められる。

$\boldsymbol{L}_1$ と $\boldsymbol{L}_2$ の選び方はいろいろあるが，不偏性の条件 $d\leq1$ をみたし，検出力も比較的高くて実用性のあるのは，最大固有値と最小固有値に対応する $w_1$ と $w_n$ を検定に使う方法

$$\boldsymbol{L}_1'=(0, 0, \cdots, 0, 1)$$
$$\boldsymbol{L}_2'=(1, 0, \cdots, 0, 0) \tag{13}$$

$\boldsymbol{w}$ を大きな固有値と小さな固有値の 2 つのグループに分けて検定に使う方法

$$\boldsymbol{L}_1'=\sqrt{\frac{2}{n}}(0, 0, \cdots, 0, 1, \cdots, 1, 1)$$

$$\boldsymbol{L}_2'=\sqrt{\frac{2}{n}}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0, 0) \tag{14}$$

である。(上の例は $n$ を偶数とした場合である。)

**2.4**　対立仮説の密度関数が 1 つのパラメータの線型関数として

$$H_1:\ \boldsymbol{u}\sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Sigma})$$
$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=c^2(\boldsymbol{I}_n+\gamma\boldsymbol{\Theta}) \tag{15}$$

と表わせるとする。ここで，$c^2$ は $\gamma$ の関数でスカラー，$\boldsymbol{\Theta}$ は与えられた既知の行列，$\gamma$ はパラメータで $\boldsymbol{I}_n+\gamma\boldsymbol{\Theta}$ が正値行列となるようなスカラーである。

帰無仮説を $\gamma=0$, 対立仮説を $\gamma>0$ (または $\gamma<0$) とする片側検定の場合は，(5) 式の最強力相似棄却域がすべての $\gamma>0$ (または $\gamma<0$) に対して一致し，一様最強力相似検定が存在する。すなわち，$\gamma>0$ に対しては

$$r=\frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}\leq r_0 \tag{16}$$

のとき，帰無仮説を棄却すればよい。$r_0$ は $P_r\{r\leq r_0'|H_0\}=\alpha$ によって定められる。$r<0$ に対しては

$$r\geq r_0' \tag{17}$$

のとき，帰無仮説を棄却すればよい。$r_0'$ は $P_r\{r\geq r_0'|H_0\}=\alpha$ によって定められる。上の検定は，不偏検定であり，尤度比検定である。

対立仮説を $\gamma\neq0$ とする両側検定の場合は，一様最強力相似検定が存在しない。検定を不偏なクラス (対立仮説のもとで棄却される確率が有意水準よりも高くなる検定) に限定すると，一様最強力不偏検定が存在し，それは，

$$r=\frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}\leqslant r_1$$

あるいは

$$r\geq r_1' \tag{18}$$

のとき，帰無仮説を棄却すればよい。$r_1$ および $r_1'$ は，$g(r)$ を $r$ の密度関数とするとき，

$$\int_{r_1}^{r_1'}g(r)\,dr=1-\alpha$$

$$\int_{r_1}^{r_1'}rg(r)\,dr=(1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}rg(r)\,dr \tag{19}$$

によって定められる [6]。$g(r)$ の分布が対称な場合は，$P_r\{r\leq r_1|H_0\}=\alpha/2$, $P_r\{r\geq r_1'|H_0\}=\alpha/2$ となるように $r_1, r_1'$ を定めればよい。なお，検出力はパラメータ $\gamma$ に関して連続であるので，不偏な検定は相似な検定になっていて，(18) は一様最強力不偏相似検定である。

**2.5**　対立仮説を表現するのに複数個のパラメータの必要な場合は，一般に一様最強力相似検定が存在しない。たとえば，相関行列を

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=c^2(\boldsymbol{I}_n+\gamma_1\boldsymbol{\Theta}_1+\gamma_2\boldsymbol{\Theta}_2) \tag{20}$$

とする。帰無仮説を

$$H_0:\gamma_1=\gamma_2=0$$

とし，対立仮説を $\gamma_1, \gamma_2$ のある特定の値

$$H_1:\gamma_1=\gamma_1{}^*,\quad \gamma_2=\gamma_2{}^*$$

とすると，最強力相似検定は

---

5)　不偏性の証明は Kadiyala [21] 参照。

$$r=\frac{u'(\gamma_1{}^*\Theta_1+\gamma_2{}^*\Theta_2)u}{u'u}\leq r_0 \tag{21}$$

となる。パラメータの値が $\gamma$—空間内で原点を通る直線上に乗る場合，いいかえると，$\gamma_1$ と $\gamma_2$ との間に，$\gamma_1=\rho\gamma_1{}^*$，$\gamma_2=\rho\gamma_2{}^*$ で，$\gamma_1{}^*$ と $\gamma_2{}^*$ は定数という関係が成立するならば，対立仮説は $\rho(\gamma_1{}^*\Theta_1+\gamma_2{}^*\Theta_2)$ と表現でき，$\rho>0$ の片側検定に対して一様最強力相似検定が(21)式で与えられる。それ以外の場合には，一様最強力相似検定が存在しない。

## 3 線型回帰モデルにおける系列相関の検定

**3.1** 線型回帰モデルを

$$y=X\beta+u$$
$$u\sim N(0,\sigma^2\Sigma) \tag{22}$$

とする。ここで，$y$ は $n$ 次元従属変数ベクトル，$X$ は $k$ 個の説明変数ベクトルからなる $n\times k$ の定数行列でランクが $k$，$\beta$ は未知な $k$ 次元の回帰係数ベクトル，$u$ は $n$ 次元誤差ベクトルである。

帰無仮説および対立仮説を(2)と同様

$$H_0:\ u\sim N(0,\sigma^2 I_n)$$
$$H_1:\ u\sim N(0,\sigma^2\Sigma) \tag{23}$$

とする。

撹乱母数$(\sigma^2,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$に関して相似な棄却域は，$\hat{\beta}$ を $\beta$ の最小2乗推定量とすると，帰無仮説のもとでの密度関数が

$$f_0=K\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2}(y-X\beta)'(y-X\beta)\right\}$$
$$=K\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta})+(X\hat{\beta}-X\beta)'(X\hat{\beta}-X\beta)]\right\}$$

と書け，最小2乗残差 $y-X\tilde{\beta}$ が $\beta$ と無関係になるから，$\sigma$ の推定量で割って標準化した最小2乗残差の分布する空間に存在する。すなわち，回帰モデルにおける系列相関の相似な検定は，最小2乗残差を直接に観測された誤差項とみなし，前節の議論を適用すればよい。そうして，回帰モデルにおける系列相関の検定の問題は，もとの誤差項が最小2乗法の適用によってどう変形されるかという点にある。

最小2乗残差 $\hat{u}$

$$\hat{u}=y-X\hat{\beta}=(I-X(X'X)^{-1}X')u=Mu \tag{24}$$

の分布は，$H_0$ および $H_1$ のもとで退化した正規分布

$$H_0:\ \hat{u}\sim N(0,\sigma^2M)$$
$$H_1:\ \hat{u}\sim N(0,\sigma^2M\Sigma M) \tag{25}$$

となる。$M$ と $M\Sigma M$ は可換であるから直交行列 $P$ で

$$P'MP=\begin{bmatrix}I_{n-k} & 0\\ 0 & 0_k\end{bmatrix}$$

$$P'M\Sigma MP=\begin{bmatrix}\nu_1, & & & & & 0\\ & \nu_2, & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \nu_{n-k}, & & \\ & & & & 0, & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & 0_k\end{bmatrix} \tag{26}$$

なるものが存在する。変換 $\hat{u}=Pw$ によって

$$H_0:\ w\sim N(0,\sigma^2I_{n-k})$$
$$H_1:\ w\sim N(0,\sigma^2D) \tag{27}$$

となる。

対立仮説の $\Sigma$ の値が指定されている場合は，$D$ が既知となり，(2.1)の議論から最強力相似検定が存在して，それは

$$r=\frac{w'D^{-1}w}{w'w}\leq r_0 \tag{28}$$

のとき，帰無仮説を棄却すればよい。(28)式を $u$ で表現すると

$$r=\frac{u'(\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X\Sigma^{1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1})u}{u'Mu} \tag{29}$$

$$=\frac{\text{一般化最小2乗残差平方和}}{\text{最小2乗残差平方和}}$$

となる。これは尤度比検定であり，不偏な検定である[6]。

有意点 $r_0$ は $\Sigma$ と $x$ に依存する。そこで，(7)のように変換後の確率変数 $w_i$ と適当なウエイト $\pi_i$ を用いて不偏検定を行うのが実用的である。さらに，(2.2)や(2.3)で述べたような不偏検定を行うのはきわめて簡便である。

**3.2** (28)式で与えられた検定方式では，説明変数の数が標本数の半分に等しくなると，$r$ の値がつねにある値に等しくなり，系列相関の検定が行えなくなる可能性がある。$\Sigma$ の固有値を $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$，$\lambda_i$ に対応するノルム1の固有ベクトルを $a_i$，$M\Sigma M$ の固有値を $\nu_1\leq\nu_2\leq\cdots\leq\nu_{n-k}$ とすると

$$\lambda_i\leq\nu_i\leq\lambda_{i+k}\qquad i=1,2,\cdots,n-k \tag{30}$$

が成立する。$n$ が偶数ならば，$k=\dfrac{n}{2}$ で

$$\lambda_{n/2}\leq\nu_1=\nu_2=\cdots=\nu_{n/2}\leq\lambda_{n/2+1} \tag{31}$$

6) 検定関数(28)の最強力性，不偏性，および尤度比検定であることの証明は，Kadiyala [21]，栗山[35]，[37] 参照。

となる可能性が生じ，$n$ が奇数ならば，$k=\dfrac{n-1}{2}$ で

$$\nu_1=\nu_2=\cdots=\nu_{(n-1)/2}=\lambda_{(n-1)/2} \tag{32}$$

となる可能性が生じる。このような $\boldsymbol{X}$ は，たとえば，次のようなものである。固有値 $\lambda$ を小さな固有値と大きな固有値の２つのグループ

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i, \cdots, \lambda_{[n/2]}\}$$
$$\{\lambda_{[(n+3)/2]}, \lambda_{[(n+5)/2]}, \cdots, \lambda_j, \cdots, \lambda_n\}$$

に分ける。各グループから重複しないように１つづつ固有値を選んで，$\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 個の対 $(\lambda_i, \lambda_j)$ をつくる。一般性を失うことなく $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}_k$ と仮定し，各説明変数ベクトルを

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_i=\alpha_i\boldsymbol{a}_i+\alpha_j\boldsymbol{a}_j\\&\alpha_i^2+\alpha_j^2=1\\&\lambda_j\alpha_i^2+\lambda_i\alpha_j^2=c_0\\&\quad i=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right],\\&\quad \lambda_{[n/2]}\leq c_0\leq\lambda_{[(n+3)/2]}\end{aligned} \tag{33}$$

とする。ただし，$n$ が奇数の合場は $c_0=\lambda_{(n+1)/2}$ とする。すると，$r$ は

$$r=\frac{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{w}}=\frac{\dfrac{1}{c_0}\sum_{i=1}^{[n/2]}w_i^2}{\sum_{i=1}^{[n/2]}w_i^2}=\frac{1}{c_0} \tag{34}$$

となり，定数 $\dfrac{1}{c_0}$ に退化する。これは，説明変数の数が標本数の半分に等しくなると，最小２乗残差の等密度面が球面となる可能性があり，最小２乗残差にもとづく系列相関の検定が意味をなさなくなる場合が必ず存在することを示している。$\boldsymbol{\Sigma}$ の固有値が重根を待つ場合は，説明変数の数が標本数の半分以下でも，$r$ が定数に退化する可能性が存在する。たとえば，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Sigma}=(1-\rho)\boldsymbol{I}_n+\rho\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}'\\&\boldsymbol{1}'=(1,1,\cdots,1)\end{aligned} \tag{35}$$

の場合は，説明変数として定数項を含むと，最小２乗残差は独立となり，

$$E(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}')=\sigma^2(1-\rho)\boldsymbol{I}_{n-k}$$

したがって，

$$r=1/(1-e)$$

となり，系列相関の検定はできない [21]。

**3.3**　対立仮設の密度関数が１つのパラメータの線型関数として $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=c^2(\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{\Theta})$ と表わせる場合でも，一般に，一様最強力相似検定は存在しない。これは，対立仮説のもとにおける最小２乗残差の相関行列 (26) が１つのパラメータの線型関数として $\boldsymbol{D}^{-1}=c_0^2(\boldsymbol{I}_{n-k}+\gamma_0\boldsymbol{\Theta}_0)$，$c_0^2$ は $c$ と $\gamma$ の関数，$\gamma_0$ は $\gamma$ の関数，$\boldsymbol{\Theta}_0$ は $\gamma$ を含まない対角行列という形で表わせないためである。ただし，$k$ 個の説明変数が $\boldsymbol{\Theta}$ の $k$ 個の固有ベクトルに一致，あるいはそれらの１次結合で表現できる場合は，最小２乗推定量が一般化最小２乗推定量に一致し，密度関数が

$$\begin{aligned}f_1=K\exp\Big\{-\frac{c^2}{2\sigma^2}\big[&(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\\&+\gamma(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})+(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})\\&+\gamma(\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})\big]\Big\}\end{aligned}$$

と表現できるので，$\gamma>0$ の片側検定に対して一様最強力相似検定が存在し，それは

$$\begin{aligned}r&=\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}\\&=\frac{\hat{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Theta}\hat{\boldsymbol{u}}}{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}\leq r_0\end{aligned} \tag{36}$$

のとき帰無仮説を棄却すればよい。(T. W. Anderson の定理 [6])。これは不偏な検定であり，尤度比検定である。両側検定に対しては，一様最強力不偏(相似)検定が存在する。$\boldsymbol{D}^{-1}$ は，説明変数となる $k$ 個の固有ベクトルの固有値を $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ とすると

$$\boldsymbol{D}^{-1}=c^2\begin{bmatrix}1+\gamma\theta_{k+1}, & & & 0\\ & 1+\gamma\theta_{k+2}, & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1+\gamma\theta_n\end{bmatrix}$$

である。なお，$\boldsymbol{D}^{-1}$ が１つのパラメータで表現できるのは，後に 4.4 の (69) 式でみるように，説明変数が固有ベクトルに一致する場合に限られるわけではないが，通常はそう考えてよい。

**3.4**　検定量 (36) は，説明変数が $\boldsymbol{\Theta}$ の固有ベクトルに一致するとき，一様最強力相似検定となるが，説明変数が条件を満たさないと，最適な検定量とならず検出力が有意水準以下[7]になることもある。極端な場合は，説明変数の数が標本数の半分以上になると，$r$ の値が $\gamma$ の値のいかんにかかわらず常にある定数に等しくなり，(36) による系列相関の検定が不可能になることがある。これは，3.2 で述べた系列相関の検定が不可能な場合ではなく，適当な検定量を考えれば可能であるが，(36) 式の $r$ では系列相関の検定が行えない場合である。すなわち，(33) の場合と同様，各説明変数ベクトルを

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_i=\alpha_i\boldsymbol{a}_i+\alpha_{j(i)}\boldsymbol{a}_{j(i)}\\&\alpha_i^2+\alpha_{j(i)}^2=1\\&\theta_{j(i)}\alpha_i^2+\theta_i\alpha_{j(i)}^2=c_0\\&\quad i=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right],\quad \theta_{[n/2]}\leq c_0\leq\theta_{[(n+3)/2]}\end{aligned} \tag{37}$$

とする。ここで，$\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{\Theta}$ の固有値 $\theta_i$ に対応する固有ベ

クトルである。(36)の $r$ は，変換 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ をほどこすと

$$r=\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\theta_{j(i)}\alpha_i^2+\theta_i\alpha_{j(i}^2)(\alpha_{j(i))}z_i-\alpha_i z_{j(i)})^2}{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{j(i)}z_i-\alpha_i z_{j(i)}^2)}$$

$$=c_0 \tag{38}$$

となり，常に $c_0$ に等しくなる。しかしながら，対立仮説のもとでの最小2残差の相関行列 $\boldsymbol{D}$ は，対角要素が $\alpha_{j(i)}^2/(1+\gamma\theta_i)+\alpha_i^2/(1+\gamma\theta_{j(i)})$ からなる対角行列となり，ある $\gamma$ の値に対しては最強力相似検定が存在して $\boldsymbol{w}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{w}/\boldsymbol{w}'\boldsymbol{w}\leq r_0$ によって与えられる。

**3.5**　上で考察した対立仮説の特徴は，密度関数が1つのパラメータによって，いいかえると，相関行列の逆行列が1つのパラメータによって

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{\Theta} \tag{39}$$

と表現できることであった。これと双対な関係にある，相関行列が1つのパラメータで表現できる場合

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{\Theta} \tag{40}$$

は，$\gamma$ に対する一様最強力相似検定が存在しない。さらに，この対立仮説では，説明変数の数が標本数の半分以上になると，最小2乗残差の等密度面が $\gamma$ の値のいかんにかかわらず球面となる可能性があり，3.2で考察したように系列相関の検定が行なえない場合がある。すなわち，説明変数ベクトルを(37)のように選ぶと，$\boldsymbol{D}=(1+\gamma c_0)\boldsymbol{I}_{n-[n/2]}$ となり，$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{\Theta}$ のの場合とちがって，すべての $\gamma$ に対して検定が一様に不可能となる。(40)式が(35)式の一般形になっていることからもわかるように，$\boldsymbol{\Theta}$ が適当な重根をもつならば，より少ない説明変数のもとでも検定不能となる可能性がある。

3.6　対立仮説の密度関数を表現するのに複数個のパラメータが必要な場合は，一般に，一様最強力相似検定が存在しない。しかし特殊な場合には，最小2乗残差の密度関数が1つのパラメータで表現できる。そうして，一様最強力相似検定が存在したり，しなかったりする。一様最強力相似検定の存在しない例としては

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=c^2(\boldsymbol{I}+\gamma_1\boldsymbol{\Theta}_1+\gamma_2\boldsymbol{\Theta}_2)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & & & & 0\\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1\\ 0 & & & & 1 & 1\end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_2=\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}'=\begin{bmatrix}1, & 1, & \cdots, & 1\\ 1, & 1, & \cdots, & 1\\ \vdots & \vdots & & \\ 1, & 1, & \cdots, & 1\end{bmatrix}$$

がある。$\boldsymbol{\Theta}_1$ と $\boldsymbol{\Theta}_2$ は可換であるから同時に対角化できる。$\boldsymbol{\Theta}_2$ の固有値は $n-1$ 個がゼロで，1個が $n$，その固有ベクトルは単位ベクトルである。回帰モデルが定数項を含むと，最小2乗残差の密度関数から $\gamma_2$ の部分が消える。したがって，$k-1$ 個の説明変数が $\boldsymbol{\Theta}_1$ の固有ベクトルに一致するならば，最小2乗残差の密度関数は $\gamma_1$ の線型関数として表現できる。しかし，$\gamma_2$ に対する検定ができず，一様最強力相似検定は存在しない。

一方，一様最強力相似検定の存在するのは，$\boldsymbol{\Theta}_1$ と $\boldsymbol{\Theta}_2$ が可換で，その固有値の少くとも $n-k$ 個が互に等しい場合である。すなわち，共通な固有値を $\lambda_i$，共通でない固有値をそれぞれ $\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)}$，固有ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とするとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}_1&=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_i'+\sum_{j=m+1}^{n}\theta_j^{(1)}\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_j'\\ \boldsymbol{\Theta}_2&=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_i'+\sum_{j=m+1}^{n}\theta_j^{(2)}\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_j'\end{aligned} \tag{42}$$

となる場合である。説明変数が固有ベクトルに一致し，しかも，固有値の共通でない固有ベクトル $\boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を全べて含むならば，最小2乗残差の相関行列は

$$\boldsymbol{D}^{-1}=c^2\left\{\boldsymbol{I}_{n-k}+(\gamma_1+\gamma_2)\begin{bmatrix}\lambda_1, & & 0\\ & \lambda_2, & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_{n-k}\end{bmatrix}\right\}$$

となる。したがって，$(\gamma_1>0, \gamma_2>0)$ と $(\gamma_1<0, \gamma_2<0)$ に対しては一様最強力相似検定が，それ以外の場合に対しては一様最強力不偏相似検定が存在する。(41)式は，$\boldsymbol{\Theta}_1=\sum_{i=1}^{n}\theta_i^{(1)}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_i'$，$\boldsymbol{\Theta}_2=\theta_1^{(2)}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1'$ の場合に相当する。上の二つの例は，より複雑な系列相関のモデルに容易に拡張できる。

3.7　これまで，相似検定，不偏検定，尤度比検定についてみてきたが，他に，不変検定と呼ばれるものがある。系列相関の検定は，説明変数を測定する尺度や観測値をすべて定数倍する操作と，本来，無関係であるべきと考えられる。そこで，変換

$$y_t^*=\delta_0 y_t+\delta_1 x_{1t}+\delta_2 x_{2t}+\cdots+\delta_k x_{kt}, \quad (t=1, 2, \cdots, n)$$

---

注 7)　検出力が有意水準以下になる例は，5.2の図1，あるいはダービン・ワトソン比の検出力曲線表（栗山[36]）参照。

$$0<\delta_0\le\infty,\ -\infty\le\delta_i\le\infty,\ (i=1,2,\cdots,k) \tag{43}$$

のもとで不変であるような系列相関の検定を問題にすることがある。不変検定を考える利点は，攪乱母数を含む複合仮説検定を単純仮説検定に置きかえることができる点である。不変検定のうちで最も検出力の高いものは最強力不変検定と呼ばれる。帰無仮説および対立仮説を(23)とすると，$\boldsymbol{\Sigma}$ に対する最強力不変検定は

$$r=\frac{\tilde{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}}}{\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}}}\le r_0 \tag{44}$$

のとき帰無仮説を棄却すればよい[8)]。ここで，$\tilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ で，分子に出てくる場合の $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ は，相関行列を $\boldsymbol{\Sigma}$ とする場合の $\boldsymbol{\beta}$ の一般化最小2乗推定量を表わし，分母に出てくる場合の $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ は相関行列を $\boldsymbol{I}$ とする場合の一般化最小2乗推定量(したがって，最小2乗推定量)を表わしている 。これは，(28)ないし(29)に一致していて，最強力相似検定は最強力不変検定でもある。さらに，相関行列が $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{\Theta}$ の場合は，最強力不変検定は

$$r=1+\frac{\gamma\tilde{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Theta}\tilde{\boldsymbol{u}}}{\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}}}\le r_0 \tag{45}$$

となる。説明変数が固有ベクトルに一致するならば，$\tilde{\boldsymbol{u}}$ が $\hat{\boldsymbol{u}}$ に等しくなるから，最強力不変検定の棄却域は $\gamma$ の片側検定に対してすべて一致する。すなわち，$\gamma>0$ の片側検定に対する一様最強力相似検定(36)は一様最強力不変検定である。両側検定に対しては，一様最強力不変検定は存在しない。なお，今までに取り上げた検定はすべて不変な検定となっている。

## 4 一様最強力相似検定の検出力

**4.1** 一様最強力相似検定の検出力曲線の特徴について調べてみよう。一様最強力相似検定の存在する密度関数で実用上興味あるのは

$$K\exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\{(1+\rho^2)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})-2\rho(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\}\Big] \tag{46}$$

というタイプである。$\boldsymbol{\Theta}$ としては次のものが重要である。

(i)
$$\boldsymbol{\Theta}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&&&&&1\\1&0&1&&&&\\&1&0&1&&&\\&&\cdot&\cdot&\cdot&&\\&&&\cdot&\cdot&\cdot&\\&&&&1&0&1\\1&&&&&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Theta}_c \tag{47}$$

$\boldsymbol{\Theta}_c$ の固有値は $\theta_h=\cos\dfrac{2\pi(h-1)}{n}$，$\theta_l=\cos\dfrac{2\pi l}{n}$，固有ベクトルは，$a_h=\left(\cos\dfrac{2\pi(h-1)}{n},\ \cos\dfrac{4\pi(h-1)}{n},\ \cdots,\ \cos\dfrac{2\pi n(h-1)}{n}\right)'$，$h=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}+1$，($n$ が偶数の場合)，$h=1,2,\cdots,\dfrac{n+1}{2}$，($n$ が奇数の場合)，と $\boldsymbol{a}_l=\left(\sin\dfrac{2\pi l}{n},\ \sin\dfrac{4\pi l}{n},\ \cdots,\ \sin\dfrac{2\pi nl}{n}\right)'$，$l=1,2,\cdots,\dfrac{n-2}{2}$，($n$ が偶数の場合)，$l=1,2,\cdots,\dfrac{n-1}{2}$，($n$ が奇数の場合)である。同時密度関数は，循環的に1期前の実現値のみに依存するという性質

$$f(y)=f_1(y_1|y_n)\cdot f_2(y_2|y_1)\cdots f_n(y_n|y_{n-1})$$

をもち，循環型の1階マルコフ過程

$$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t\quad t=1,2,\cdots,n$$
$$u_0=u_n \tag{48}$$

に対応している。説明変数が固有ベクトルに一致すると，片側検定に対して一様最強力相似検定が存在し，それは，たとえば $\rho>0$ に対しては

$$r_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu}_i)(y_{i-1}-\hat{\mu}_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu}_i)^2}=\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{\Theta}_c(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}\ge r_c{}^0$$
$$\hat{\mu}_i=\sum_{j=1}^{k}x_{ij}\hat{\beta}_j$$
$$y_0=y_n,\quad \hat{\mu}_0=\hat{\mu}_n \tag{49}$$

のとき，帰無仮説を棄却すればよい。定数ベクトル $\mathbf{1}$ は固有ベクトルになっているから，$E(y_t)=\beta$，$t=1,2,\cdots,n$ の場合は，R. L. Anderson [4] の循環系列相関係数

$$r_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(y_{i-1}-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2} \tag{50}$$
$$y_0=y_n$$

は，一様最強力相似検定量である。R. L. Anderson and T. W. Anderson [5] の回帰モデル

$$E(y_t)=\sum_{g'}\alpha_{g'}\cos\frac{2\pi t(g'-1)}{n}+\sum_{g'}\beta_{g'}\sin\frac{2\pi t(g'-1)}{n}$$

8) 不変検定の説明は，レーマン [25]，Durbin & Watson [13] 参照。最強力不変検定の証明は栗山 [37] 参照。

の場合も，(49)式の $r_c$ は一様最強力相似検定である。

(ii)
$$\boldsymbol{\Theta}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&&&&&\\1&0&1&&&&\\&1&0&1&&&\\&&\cdot&\cdot&\cdot&&\\&&&\cdot&\cdot&\cdot&\\&&&&1&0&1\\&&&&&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Theta}_K \tag{51}$$

$\boldsymbol{\Theta}_K$ の固有値は $\theta_h=\cos\dfrac{\pi h}{n+1}$, 固有ベクトルは $\boldsymbol{a}_h=\left(\sin\dfrac{\pi h}{n+1}, \sin\dfrac{2\pi h}{n+1}, \cdots, \sin\dfrac{n\pi h}{n+1}\right)'$, $h=1, 2, \cdots, n$ である。同時密度関数は，1期前の実現値のみに依存するという性質

$$f(y)=f_1(y_1)\cdot f_2(y_2|y_1)\cdots f_n(y_n|y_{n-1})$$

をもつ。

(iii)
$$\boldsymbol{\Theta}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&&&&&\\1&0&1&&&&\\&1&0&1&&&\\&&\cdot&\cdot&\cdot&&\\&&&\cdot&\cdot&\cdot&\\&&&&1&0&1\\&&&&&1&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Theta}_N \tag{52}$$

$\boldsymbol{\Theta}_N$ の固有値は $\theta_h=\cos\dfrac{\pi(h-1)}{n}$, 固有ベクトルは $\boldsymbol{a}_h=\left(\cos\dfrac{\pi(h-1)}{2n}, \cos\dfrac{3\pi(h-1)}{2n}, \cdots, \cos\dfrac{(2n-1)\pi(h-1)}{2n}\right)'$ である。同時密度関数は (ii) と同様一期前の実現値のみに依存する。説明変数が固有ベクトルに一致すると，一様最強力相似検定量が

$$r_N=\frac{\dfrac{1}{2}(y_1-\hat{\mu}_1)^2+\dfrac{1}{2}(y_n-\hat{\mu}_n)^2+\sum_{2}^{n}(y_i-\hat{\mu}_i)(y_{i-1}-\hat{\mu}_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu}_i)^2}=\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{\Theta}_N(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})} \tag{53}$$

となる。定数ベクトルが固有ベクトルであるから，$E(y_t)=\beta$, $t=1, 2, \cdots, n$ の場合，$r_N$ は一様最強力相似検定量となる。$r_N$ の線型関数であるノイマン比 [27][28]

$$\frac{\delta^2}{s^2}=\frac{n}{n-1}\frac{\sum_{2}^{n}(y_i-y_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{2n}{n-1}(1-r_N) \tag{54}$$

も同様である。ダービン・ワトソン比 $d$ は $r_N$ の線型関数として

$$d=\frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{u}_i-\hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}=\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(2\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\Theta}_N)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}=2(1-r_N) \tag{55}$$

と表現できる。$r_N$ が一様最強力相似検定になる場合は，$d$ も一様最強力相似検定となる。

(iv)
$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}-1&1&&&&&\\1&0&1&&&&\\&1&0&1&&&\\&&\cdot&\cdot&\cdot&&\\&&&\cdot&\cdot&\cdot&\\&&&&1&0&1\\&&&&&1&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Theta}_N{}^* \tag{56}$$

$\boldsymbol{\Theta}_N{}^*$ の固有値は $\theta_h=\cos\dfrac{\pi h}{n}$, 固有ベクトルは $\boldsymbol{a}_h=\left(\sin\dfrac{\pi h}{2n}, \sin\dfrac{3\pi h}{2n}, \cdots, \sin\dfrac{(2n-1)\pi h}{2n}\right)'$, $h=1, 2, \cdots, n$ である。同時密度関数は (ii) (iii) と同様1期前の実現値のみに依存する。

**4.2**　4つの密度関数の固有値および固有ベクトルは互に似ているので，一様最強力相似検定の検出力は同様の特徴を示す。ここでは密度関数を (iii) のタイプの (52) 式とし，一様最強力相似検定量を (53) 式の $r_N$ とし，その検出力特性を調べてみる。

$r_N$ が一様最強力相似検定となる場合の説明変数を

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k)=(\boldsymbol{a}_{l_1}, \boldsymbol{a}_{l_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{l_k}) \tag{57}$$

とする。対立仮説 $\rho>0$ に対する一様最強力相似検定は

$$r_N=\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{\Theta}_N(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}\geq r_N{}^0 \tag{58}$$

のとき帰無仮説を棄却すればよい。$\rho<0$ に対する一様最強力相似検定は

$$r_N\leq r_N{}^1 \tag{59}$$

のとき帰無仮説を棄却すればよい。

$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とし，変換 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$, $z=\sqrt{1-\rho^2}\cdot\sigma\cdot\xi_i\Big/\left(\sqrt{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i}\cdot\sqrt{1+\rho^2}\right)$, $i=1, 2, \cdots, n$ をほどこすと，$n-k$ 個の $\xi_i\,(i\neq l_1, l_2, \cdots, l_k)$ は互に独立な，平均ゼロ，分散1の正規確率変数となる。$r_N$ は

$$r_N=\frac{\displaystyle\sum_{i\neq l_1, l_2, \cdots, l_k}\frac{\theta_i\cdot\xi_i^2}{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i}}{\displaystyle\sum_{i\neq l_1, l_2, \cdots, l_k}\frac{\xi_i^2}{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i}} \tag{60}$$

となる。対立仮説 $\rho>0$ に対しては，有意水準 $\alpha$ の有意点 $r_N{}^\alpha$ は

$$\alpha = P_r\{r \geq r_N{}^0 | H_0\}$$
$$= P_r\{\sum_{i \neq l_1, l_2, \cdots, l_k} (\theta_i - r_N{}^0)\xi_i{}^2 \geq 0\} \tag{61}$$

検出力は

$$Power = P_r\{r \geq r_N{}^0 | H_1\}$$
$$= P_r\left\{\sum_{i \neq l_1, l_2, \cdots, l_k} (\theta_i - r_N{}^0)\frac{\xi_i{}^2}{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i} \geq 0\right\} \tag{62}$$

である。対立仮説 $\rho<0$ に対しては，有意点 $r_N'$ は

$$\alpha = P_r\{r_N \leq r^1{}_N | H_1\}$$
$$= P_r\{\sum_{i \neq l_1, l_2, \cdots, l_k} (\theta_i - r_N{}^1)\xi_i{}^2 \leq 0\} \tag{61$'$}$$

検出力は

$$Power = P_r\{r_N \leq r^1{}_N | H_1\}$$
$$= P_r\left\{\sum_{i \neq l_1, l_2, \cdots, l_k} (\theta_i - r_N{}^1)\frac{\xi_i{}^2}{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i} \leq 0\right\} \tag{62$'$}$$

である。$\rho<0$ の場合は，$\rho$ のかわりに $-\rho, \theta_i$ のかわりに $-\theta_{n-i+2}$ を代入し，全体にマイナスをかけてやると，有意点と検出力の式(61)′, (62)′ は $\rho>0$ の場合と同じ形になる。したがって，対立仮説としては $\rho>0$ を考えればよい。

**4.3** 検出力の動きは，確率変数 $\sum_{i \neq l_1, l_2, \cdots, l_k}(\theta_i - r_N{}^0)\xi_i{}^2 \Big/ \left(1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta i\right)$ の係数の変化に依存する。係数部分は検出力への寄与の程度によって3つの部分にわかれる。第1は，$\rho$ が1に近づくにしたがって $\infty$ へと増大してゆく部分 $i=1, 2, 3$ 等($\rho<0$ の場合は $i=n, n-1, n-2$ 等)である。第2は，$\rho$ が1に近づくにしたがってもとの値の $\dfrac{1}{2}$ 倍に減少してゆく部分 $i=n, n-1, n-2$ 等($\rho<0$ の場合は $i=1, 2, 3$ 等)である。第3は，$\rho$ による変化が小さいその他の残りの部分である。回帰係数の推定によって落ちる項$(l_1, l_2, \cdots, l_k)$が上のどの部類に属するかに応じて検出力は大いに異なる。

一様最強力相似検定のなかでその検出力が最も高くなる場合の説明変数ベクトル $\boldsymbol{a}_{l_1}, \boldsymbol{a}_{l_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{l_k}$ は，$(l_1, l_2, \cdots, l_k)$ が $\dfrac{n}{2}$ に近く，$\theta_{l_j}-r_N{}^0$ がゼロに近い場合，すなわち，第3の部類に属する場合である。説明変数が第2の部類に属すると，検出力は上の場合よりやや低くなるが，それほど大きな差はない。分散 $\sigma^2$ は最も過大に推定され，$r_N$ の帰無仮説のもとでの分布は $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-k+1})$ のとき最も右側に，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ のとき最も左側にくる。一様最強力相似検定のうちでその検出力が最も低くなるのは，説明変数が第1の部類に属するときである。(ただし，説明変数の数が多くなると，いくつかの説明変数は第2の部類に属すのが適当となる。)検出力は上の2つの場合とことなりきわめて低くなる。分散 $\sigma^2$ は最も過少に推定され，$r_N$ の帰無仮説のもとでの分布は，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ のとき最も左側に，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-k+1})$ のとき最も右側にくる。説明変数を固定すると，検出力は $\rho>0$ と $\rho<0$ の場合とで一般に等しくない。そうして，第1の部類と第2の部類とは $\rho$ に関して互に逆の関係になる。したがって，両側検定の場合の検出力曲線は一般に非対称であり，一様最強力不偏検定の有意点は(19)式の方法によって定めねばならない。ただし，残った $\theta_i (i \neq l_1, l_2, \cdots, l_k)$ がゼロに関して対称となるならば，検出力はいずれの側の対立仮説に対しても等しくなり，有意点も対称となる。以上の $\boldsymbol{\Theta}_N$ に関する議論は，$\boldsymbol{\Theta}_C, \boldsymbol{\Theta}_K, \boldsymbol{\Theta}_N{}^*$ に対しても成立する。

**4.4** 説明変数が固有ベクトルに一致しない場合は，検出力に関する一般的な結論を導くのは困難なようである。ここでは，説明変数が

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k] = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k)$$
$$= \left(\sqrt{n}\,\boldsymbol{a}_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_2 \pm \boldsymbol{a}_n), \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_3 \pm \boldsymbol{a}_{n-1}), \cdots, \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_k \pm \boldsymbol{a}_{n-k+2})\right) \tag{63}$$

の場合を調べてみる。これは，定数項を含む回帰モデルにおいて，最小2乗推定量の効率が下限に達すると思われる場合に相当している[9]。$\boldsymbol{a}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{1}$ が特別あつかいさ

9) 最小2乗推定量の効率を次のように定義する。

$$E_{ff}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{|Cov(\tilde{\boldsymbol{\beta}})|}{|Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}})|} = \frac{|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}|^2}{|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{X}||\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X}|}$$

ここで，$Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ は最小2乗推定量の分散共分散行列，$Cov(\tilde{\boldsymbol{\beta}})$ は一般化最小2乗推定量の分散共分散行列である。効率の上限は1で，$\boldsymbol{X}$ が $\boldsymbol{\Sigma}$ の $k$ 個の固有ベクトルに一致するときにのみ達せられる。効率の下限は，1説明変数に対しては明らかになっているが，2説明変数以上に対しては明らかにされていない。一つの目安としては，$\boldsymbol{X}$ の各列ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_n),\ \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_2 \pm \boldsymbol{a}_{n-1}),\ \cdots,$$
$$\boldsymbol{x}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_k \pm \boldsymbol{a}_{n-k+1})$$

のとき，効率が下限

$$E_{ff}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{4\lambda_1\lambda_n}{(\lambda_1+\lambda_n)^2}\cdot\frac{4\lambda_2\lambda_{n-1}}{(\lambda_2+\lambda_{n-1})^2}\cdot\cdots\cdot\frac{4\lambda_k\lambda_{n-k+1}}{(\lambda_k+\lambda_{n-k+1})^2}$$

に達するというものがある。ここで，$\lambda_i$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ の固有値，$\boldsymbol{a}_i$ は固有ベクトルである。下限の問題については Watson [34] 参照。

れているのは，$\theta_1$ がゼロに関して対称な固有根をもたないからである。

検定関数を(58)式と同様 $r_N$ とする。$\theta_i=-\theta_{n-i+2}$ なる関係を使って，変換 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Pz}$，$z_i=\sqrt{1-\rho_2}\sigma\eta_i\Big/\left(\sqrt{1+\rho^2}\sqrt{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i}\right)$，$(i=1, k+1, k+2, \cdots, n-k+1)$，$(z_j\mp z_{n-j+2})=\sqrt{1-\rho^2}\sigma\eta_j\Big/\left(\sqrt{1+\rho^2}\sqrt{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_j}\sqrt{1+\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_j}\right)$，$(j=2, \cdots, k)$ をほどこすと，$\eta_i(i=2, 3, \cdots, n-k+1)$ は互に独立な，平均ゼロ，分散1の正規確率変数となる。$r_N$ は

$$r_N=\frac{\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n-k+1}\frac{\theta_i\eta_i^2}{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i}}{\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n-k+1}\frac{\eta_i^2}{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i}+\sum_{j=2}^{k}\frac{\eta_j^2}{\left(1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_j\right)\left(1+\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_j\right)}} \tag{64}$$

である。$\theta_i=-\theta_{n-i+2}$ であるから，$r_N$ の分布は帰無仮説のもとでゼロに関して対称である。(64)式は $\rho$ の偶関数であるから，検出力はいずれの側の検定に対しても等しい。説明変数の数が標本数の半分に等しくなると，$r_N$ はつねにゼロに等しくなる。これは 3.4 の(38)式の特別な場合である。

対立仮説を $\rho>0$ とすると，有意点と検出力は

$$\begin{aligned}\alpha&=P_r\{r_N\geq r_N{}^0|H_0\}\\&=P_r\left\{\sum_{i=k+1}^{n-k+1}(\theta_i-r_N{}^0)\eta_i^2-r_N{}^0\sum_{j=2}^{k}\eta_j^2\geq 0\right\}\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}Power&=P_r\{r_N\geq r_N{}^0|H_1\}\\&=P_r\left\{\sum_{i=k+1}^{n-k+1}\frac{(\theta_i-N_N{}^0)\eta_i^2}{1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i}\right.\\&\quad\left.-r_N{}^0\sum_{j=2}^{k}\frac{\eta_j^2}{\left(1-\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_j\right)\left(1+\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_j\right)}\geq 0\right\}\end{aligned} \tag{66}$$

である。(66)式にあらわれる確率変数の前の項は，一様最強力相似検定の場合と同様である。説明変数の数が多くなると，残った固有値が第3の部類に属するようになり，検出力を高める効果が低くなる。後の項の係数は，$\alpha$ が0.5以下ならば，$-r_N{}^0$ が負となるから，$\rho$ が1に近づくにつれて $-\infty$ へと減少し，$\rho$ の増大にともなって検出力を低める効果をもつ。全体としての検出力は，$\rho$ が小さい場合は上昇し，$\rho$ が1に近づくと下降しはじめる。説明変数の数が増加すると，検出力が下降しはじめる $\rho$ の値がゼロに近づくとともに，検出力が有意水準以下となる $\rho$ の範囲が生じ，しだいに広がってゆく。そうして，$k$ が $\dfrac{n}{2}$ になると $r_N$ はつねにゼロとなる。

ここで，説明変数として新たに，$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ あるいは，$(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-k+2})$ を付け加えてみよう。すると，(64)式において検出力を低める効果をもつ部分が消え，その結果，$d$ の検出力が上昇する。検出力を下げる効果が最も強いのは固有値 $\theta_2$ に関する部分であるから，説明変数として $\boldsymbol{a}_2$ ないし $\boldsymbol{a}_n$ を付け加えると，検出力の上昇がある程度期待できる。

ところで，説明変数が(63)の場合の最強力相似検定は，対立仮説のもとでの最小2乗残差の分散共分散行列が適当な変換のもとで

$$\boldsymbol{D}=\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\sigma^2\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\gamma\theta_2}+\frac{1}{1+\gamma\theta_2}\right),&&&&&\\&\ddots,&&&&\\&&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\gamma\theta_k}+\frac{1}{1+\gamma\theta_k}\right),&&&\\&&&\frac{1}{1-\gamma\theta_{k+1}},&&\\&&&&\ddots,&\\&&&&&\frac{1}{1-\gamma\theta_{n-k+1}}\end{bmatrix}$$

$$\gamma=\frac{2\rho}{1+\rho^2} \tag{67}$$

となるから，

$$r'=\frac{\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n-k+1}\left(1-\frac{2\rho}{1+\rho^2}\theta_i\right)w_i^2+\sum_{j=2}^{k}\left(1-\left(\frac{2\rho}{1+\rho^2}\right)^2\theta_j^2\right)w_j^2}{\displaystyle\sum_{i=2}^{n-k+1}w_i^2}$$

$$\leq r_0 \tag{68}$$

のとき帰無仮説を棄却すればよい。ここでとくに，$k$ が $\left[\dfrac{n}{2}+1\right]$ となると，(67)式の対角要素のうち $\gamma$ に関する1次の項がなくなり，(67)式は

$$\boldsymbol{D}=\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\sigma^2\begin{bmatrix}\frac{1}{1-\gamma^2\theta_2{}^2},&&\\&\ddots,&\\&&\frac{1}{1-\gamma^2\theta_k{}^2}\end{bmatrix} \tag{69}$$

となる。したがって，片側検定に対してのみならず両側検定に対しても一様最強力相似検定が存在し，それは，いずれの場合も

$$r=\frac{\sum_{i=2}^{k}\theta_i{}^2 w_i{}^2}{\sum_{i=2}^{k} w_i{}^2}\geq r_0' \tag{70}$$

のとき帰無仮説を棄却すればよい。これは

$$r=\frac{\hat{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Theta}_N\boldsymbol{\Theta}_N\hat{\boldsymbol{u}}}{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}\geq r_0'$$

と表現できるから，2階の系列相関係数 $\rho^2$ の推定量 $\sum_{t=3}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-2}\Big/\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t{}^2$ を系列相関の検定に使っていることを示している。今得られた結果は，固有値 $\theta_i$ がゼロに関して互に対称になっているためである。

## 5 1階マルコフ過程の検定

**5.1** 誤差項は定常な1階の正規マルコフ過程

$$\begin{aligned} &u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t\\ &\quad \varepsilon_t\sim N(0,\ (1-\rho^2)\sigma^2)\\ &\quad E(\varepsilon_t\varepsilon_s)=0 \qquad t\neq s\\ &\quad |\rho|<1 \end{aligned} \tag{71}$$

にしたがうとする。$\boldsymbol{y}$ の同時密度関数は

$$K\exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\{(1-\rho^2)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) -2\rho(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'\boldsymbol{\Theta}_K(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})-\rho^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})' \boldsymbol{\Theta}_2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\}\Big]$$

$$\boldsymbol{\Theta}_K=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & 0\\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot\\ & & & & 1 & 0 & 1\\ 0 & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{72}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & & 0\\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

である。$\rho,\rho^2$ がパラメータ空間において原点を通る直線上にないことと，$\boldsymbol{\Theta}_K$ と $\boldsymbol{\Theta}_2$ が可換でないことのために，$\rho$ の片側検定に対して一様最強力相似検定が存在しない。ところで，$\rho$ がゼロに近い場合は，$\rho^2$ を無視することによる影響が小さいから，(ii) のタイプの密度関数(51)が1階マルコフ過程をよく近似している。$\rho$ が1に近い場合は，$-\rho^2(u_1{}^2+u_n{}^2)$ を $-\rho(u_1{}^2+u_n{}^2)$ で置きかえることによる影響が小さいから，(iii) のタイプの密度関数(52)が1階マルコフ過程をよく近似している。$\rho$ が$-1$に近い場合は，$-\rho^2(u_1{}^2+u_n{}^2)$ を $\rho(u_1{}^2+u_n{}^2)$ で置きかえることによる影響が小さいから，(iv) のタイプの密度関数(56)が1階マルコフ過程をよく近似している。しかも，固有値および固有ベクトルは，$n$ がある程度の大きさになると互いによく似ている。したがって，説明変数が，(ii) あるいは (iii) あるいは (iv) のタイプの固有ベクトルに一致するか，それらにきわめて近いと判断されるならば，前節でみてきた一様最強力相似検定を与える検定方式は，いずれも一階のマルコフ過程に対して最強力に近い検出力を示すといえる。また，回帰係数の推定効率が低い場合は，いずれの検定方式も低い検出力を示す。そこで，上の三つの検定統計量のいずれを採用するかは，数学的取り扱いや計算手続の簡便さ，対立仮説の性質，親しまれている程度，等によるのが適切であろう。実際，計量経済分析においては，定数項を含む線型回帰モデルが頻繁にあらわれ，正の系列相関の存在が問題になることが多い。さらに，定数項を含まない回帰モデルの場合でも，4.4でみたように，定数項を説明変数に加えると系列相関の検出力が高まることが多い。そこで，1階のマルコフ過程の密度関数を (iii) のタイプの密度関数で近似し，ノイマン比なりダービン・ワトソン比を系列相関の検定に用いるのが一般に実用的であろう。

**5.2** ダービン・ワトソン比 $d$ は，定数項を含む回帰モデル $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u}$ の最小2乗残差を $\hat{\boldsymbol{u}}=(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\cdots,\hat{u}_n)'$ とするとき

$$d=\frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{u}_i-\hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i{}^2}=\frac{\hat{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{Ad}\hat{\boldsymbol{u}}}{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}=\frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{MAdMu}}{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Mu}}$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Ad}&=\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & -1 & 2 & -1\\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}\\ &=2(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Theta}_N)\end{aligned} \tag{73}$$

と定義される。有意水準 $\alpha$ の検定は，対立仮説を $\rho>0$ とすると

$$d\leq d_0 \tag{74}$$

のとき帰無仮説 $\rho=0$ を棄却し，対立仮説を $\rho<0$ とすると

$$d\geq d_1 \quad あるいは \quad 4-d\leq 4-d_1=d_1' \tag{75}$$

のとき帰無仮説を棄却するという形で行なわれる。

この検定方式は相似な検定であるが，1階マルコフ過

程に対して，厳密な意味で最強力相似検定となることはない。ただし，$\rho$ が1にきわめて近いならば，説明変数が $\boldsymbol{\Theta}_N$ の固有ベクトルに一致すると，最強力相似検定にほぼ等しくなる。また，尤度比検定でもないし，任意の $\boldsymbol{X}$ に対してつねに不偏になるわけでもない。さらに，帰無仮説のもとでの $d$ の分布は，説明変数の値に依存するので，検定を行うためには，有意点を推定する必要がある。

ところで，$d$ は，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{MAdM}$ が可換であるから，$\boldsymbol{MAdM}$ のゼロでない $n-k$ 個の固有値を $0<\nu_1\leq\nu_2\leq\cdots\leq\nu_{n-k}<4$ とすると，帰無仮説のもとで

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{n-k}\nu_i\xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n-k}\xi_i^2} \tag{76}$$

と表現できる。ここで，$\xi_i$ は互に独立な平均ゼロ，分散1の正規確率変数である。$\boldsymbol{Ad}$ の固有値を $0=\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<4$ とすると，定数ベクトルが $\lambda_1$ に対応する固有ベクトルになっているから，$\lambda_i$ と $\nu_i$ との間に

$$\lambda_{i+1}\leq\nu_i\leq\lambda_{i+k} \qquad (i=1,2,,\cdots,n-k) \tag{77}$$

なる関係が成立する[10]。したがって，帰無仮説のもとでの $d$ の分布には，分布の上限 $d_U$ と下限 $d_L$ が存在して，それらは次のようにあらわすことができる。

$$d_L=\frac{\sum_{i=1}^{n-k}\lambda_{i+1}\xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n-k}\xi_i^2}\leq d=\frac{\sum_{i=1}^{n-k}\nu_i\xi_i^2}{\sum_{l=1}^{n-k}\xi_i^2}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n-k}\lambda_{i+k}\xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n-k}\xi_i^2}=d_U \tag{78}$$

同一水準の有意点に対しても上と同様の関係が成立するから，有意点の上限の値 $d_U{}^\alpha$ と下限の値 $d_L{}^\alpha$ を使って次のような検定方式を考えることができる。すなわち，対立仮説を $\rho>0$ とする場合は

$$\begin{aligned}&d\leq d_L{}^\alpha \text{ ならば，帰無仮説を棄却する。}\\&d>d_U{}^\alpha \text{ ならば，帰無仮説を受容する。}\\&d_L{}^\alpha<d\leq d_U{}^\alpha \text{ ならば，結論を下さない。}\end{aligned} \tag{79}$$

というものである。この検定方式はダービン・ワトソンの検定と呼ばれており，有意点の上限と下限の値がダービン・ワトソン[12]によって作表されている。この検定方式では有意水準が一般に $\alpha$ 以下となり，相似な検定ではない。なお，$d$ の真の有意点を求めて検定する方法を，以下では，$d$ による検定と呼ぶことにする。

ダービン・ワトソン比 $d$ については，1階の正規マルコフ過程に対する検出力特性がほぼ明らかになっている。すなわち，前節で議論した3つの説明変数 (イ)帰無仮説のもとで $d$ の分布がその上限 $d_U$ に一致し，多くのなめらかに変動する経済データの特徴を示している場合，(ロ)同じく下限 $d_L$ に一致し，$d$ の検出力のほぼ上限と考えられる場合，(ハ)最小2乗推定量の効率がきわめて低く，$d$ の検出力のほぼ下限と期待される場合に対して，(a)ダービン・ワトソン表の上限の値を有意点として検定する場合の検出力，(b)同じく下限の値を有意点として検定する場合の検出力，(c)$d$ の真の有意点をもとめて検定する場合の検出力が，モンテ・カルロ法により求められている[11]。ちなみに，標本数が35で，有意水準が5%の検定の検出力曲線を図示すると図1となる。図では，説明変数(イ)を点線で，(ロ)を実線で，(ハ)を鎖線で示している。モンテ・カルロ実験の回数は2000である。

**5.3** ダービン・ワトソンの検定方式では，図1からも明らかなように，検定不能となる場合が多い。そこで，$d$ の真の有意点を簡単に推定する方法の研究と並行して，検定不能域のない検定方式がいくつか考えられている。それらのうち代表的なものは，Theil の BLUS 推定量を使う検定，Abrahamse and Koerts の検定，Durbin の検定，Ogawara and Hannan の検定である。

最小2乗残差の分散共分散行列は，$\boldsymbol{u}$ が独立のとき $\sigma^2\boldsymbol{M}$ である。$\boldsymbol{M}$ は階数 $n-k$ の巾等行列であるから，適当な行列 $\boldsymbol{B}$ によって，階数が $n-k$ ないしそれ以下の任意の相関行列 $\boldsymbol{\Omega}$ に変換できる。変換は無限に存在する。変換後の残差項 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}}$ は，$\boldsymbol{u}$ の推定量として検定に用いられるので，その動きが $\boldsymbol{u}$ の動きに近いほど好ましい。その1つの目安として，帰無仮説のもとでの $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ との差を最小にすることが考えられる。このことは対立仮説のもとでの両者の差を最小にすることを意味するわけではないが，$\rho=0$ 近傍の検定を考える場合は，1つの望ましい条件である。すなわち，

$$\begin{aligned}&E(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}\\&E(\boldsymbol{vv}')=\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\end{aligned} \tag{80}$$

のもとで

$$E(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})'(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \tag{81}$$

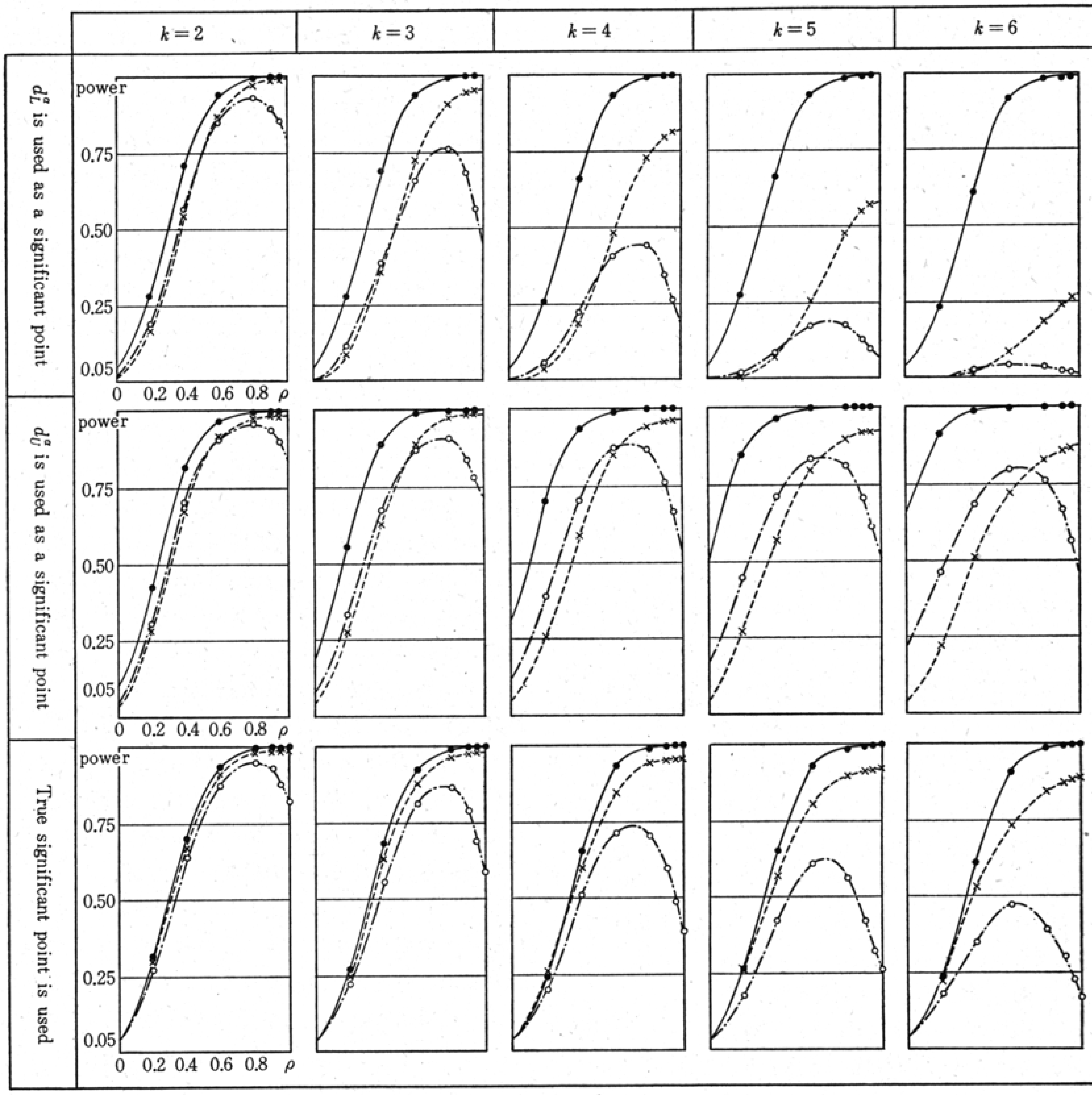
を最小にする $\boldsymbol{B}$ を選ぶ。$\boldsymbol{\Omega}$ が階数 $n-k$ の巾等行列な

10) 証明は Bellmann [7], Courant and Hilbert [8], Durbin and Watson [11], 佐和 [38] 参照。

11) 3つの説明変数に対する検出力の値が，有意水準 $\alpha=1\%$, $5\%$; 説明変数の数 $k=2(1)6$; 標本数 $n=15(5)50$; $\rho=0.0(0.2)0.8, 0.9, 0.95, 0.99$ に対して作表されている。栗山(1972)「ダービン・ワトソン比の有効性について」『季刊理論経済学』第23巻第3号，23頁〜50頁参照。

**図 1 ダービン・ワトソン比の検出力曲線**

実線は $d$ が $d_L$ に一致する場合の検出力を示す。
点線は $d$ が $d_U$ に一致する場合の検出力を示す。
鎖線は最小２乗推定量の効率が下限に達する場合の検出力を示す。
(5%, $n=35$)




らば解が一意的に存在し，それは

$$B=K(K'MK)^{-1/2}K' \tag{82}$$

すなわち

$$v=K(K'MK)^{-1/2}K'My \tag{83}$$

で与えられる[12]。ここで，$K$ は $n\times(n-k)$ 行列で $KK'=\Omega$, $K'K=I_{n-k}$,（$(K'MK)^{-1/2}$ は，$K'MK$ の固有値を $d_i^2$，固有ベクトルを $q_i$，$i=1,2,\cdots,n-k$，とするとき，$\sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{d_i}q_iq_i'$ である。

$\Omega$ が $X$ に依存しないならば，有意点の値が $X$ の影響を受けない相似な検定を作ることができる。たとえば，$\Omega$ を対角行列とし，$n-k$ 個の対角要素を 1，残る $k$ 個の対角要素をゼロにとると，タイルの BLUS (Best Linear Unbiased Scalar-Covariance) 推定量が得られる [22] [31] [32]。ゼロでない $n-k$ 個の BLUS 推定量を使ってノイマン比を計算すると，その有意点の値は Hart 表の値（自由度 $n-k$）に一致する。

BLUS 推定量では誤差項の $k$ 個の要素が推定されな

12) 証明は Abrahamse and Koerts [2], Abrahamse and Louter [3] 参照。

い。推定されない誤差部分を $\boldsymbol{u}_0$($k\times1$ ベクトル)とし，それに対応する説明変数行列と最小2乗残差項をそれぞれ $\boldsymbol{X}_0$($k\times k$ 行列)，$\hat{\boldsymbol{u}}_0$ とし，推定される誤差部分に対応する説明変数行列と最小2乗残差をそれぞれ $\boldsymbol{X}_1$($(n-k)\times k$ 行列)，$\hat{\boldsymbol{u}}_1$($(n-k)\times1$ ベクトル)とするとき，BLUS 推定量は

$$\boldsymbol{u}_1{}^* = \hat{\boldsymbol{u}}_1 - \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_0{}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{d_i}{1+d_i}\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i{}'\right]\hat{\boldsymbol{u}}_0 \tag{84}$$

で与えられる。ここで，$d_i{}^2$ と $\boldsymbol{q}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ は $\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}_0{}'$ の固有値と固有ベクトルで，$d_i$ は $d_i{}^2$ の正の平方根である。また，推定誤差の2乗和の期待値(81)式の値は，

$$E(\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{u})'(\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{u}) = \sigma^2\left(k+2\sum_{i=1}^{k}(1-d_i)\right) \tag{85}$$

となる。

BLUS 推定量では $\boldsymbol{\Omega}$ の選び方が $\binom{n}{k}$ 通りある。対立仮説を1階のマルコフ過程とすると，系列相関の性質は引き続いて観測される誤差項の系列に最もよく表現される。そこで，最初の $m$ 個($m\leq k$)と最後の $k-m$ 個を取り除いた系列を推定の対象とするのが好ましいであろう。こうして得られた $k+1$ 個の系列のうちでは，推定誤差が小さいほど好ましい。各系列に対して $\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}_0{}'$ の固有値を計算し，固有値でゼロになるものがあれば，$\boldsymbol{X}_0$ が独立でないことを示しているからその系列は取り除き，残った系列に対して $k-(d_1+d_2+\cdots+d_k)$ が最小になるものを選ぶのが，ある程度合理性があり実用的である。

BLUS 推定量を計算し，ノイマン比を使って検定するタイルの方法は，相似な検定である。その検出力は $\boldsymbol{X}_0$ の選び方によって異なる。誤差項が(iii)のタイプの密度関数(52)式にしたがうと仮定し，ダービン・ワトソン比が一様最強力相似検定になる場合でも，BLUS 推定量による検定は一様最強力相似検定にならない。一般の説明変数に対しては，$d$ の検出力と BLUS 推定量による検出力のいずれが勝っているか，一般的結論は下せない。しかし，$\rho=0$ の近傍を対立仮説とすると，$d$ による検定の方が好ましい。すなわち，$\rho\to0$ とともに，一般化最小2乗推定量 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ が最小2乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ に近づき，一般化最小2乗残差平方和が最小2乗残差平方和に近づくから，$d$ は最強力相似検定量(29)式ないし(36)式の線型関数，あるいは，最強力不変検定量(44)式ないし(45)式の線型関数で表現できるようになる。いいかえると，$d$ による検定は，$\rho=0$ の近傍で，局所最強力相似検定，局所最強力不変検定，尤度比検定，不偏検定である。そうして，(81)式は

$$E(\hat{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u})'(\hat{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}) = E(\tilde{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u})'(\tilde{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}) = \sigma^2k \tag{86}$$

である。

一方，BLUS 推定量は，$\rho$ が0に近づいても一般化最小2乗残差に近づかないから，タイルの検定は局所最強力相似検定，局所最強力不変検定でない。ただし，説明変数が

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \tag{87}$$

というトリビアルな場合，いいかえると，$k$ 個の時点における誤差項の期待値がゼロと異なり，それを取り除くと系列相関の検定が行なえる場合には，BLUS 推定量と最小2乗推定量は一致し，タイルの検定も $d$ による検定も局所最強力相似検定となる。

**5.4** 局所最強力理論からわかるように，$\boldsymbol{\Omega}$ を適当に選ぶと，局所的には $d$ の検出力より低いが BLUS 推定量を用いる検定より検出力の高い検定量を作ることができる。局所的な検出力は $\boldsymbol{\Omega}$ が $\boldsymbol{M}$ に近いほど高いから，実用性のある $\boldsymbol{\Omega}$ となると経済データの性質が問題になる。経済データは，その変数のとる値域に比較して，1次差分，2次差分の絶対値が相対的に小さく[13]，なめらかに変動しているとみなされることが多い。このような経済データに対して $d$ の分布を計算すると，それは上限 $d_U$ にきわめて近い。そこで，$\boldsymbol{\Omega}$ を上限 $d_U$ に対応するように選び，変換後の残差項を使って $d$ を計算し，ダービン・ワトソン表の上限の値を有意点として使う検定が考えられる。すなわち，$\boldsymbol{\Theta}_N$ の固有ベクトルを

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{1}{c_i}\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\pi(i-1)}{2n}\\ \cos\dfrac{3\pi(i-1)}{2n}\\ \vdots\\ \cos\dfrac{(2n-1)\pi(i-1)}{2n}\end{bmatrix} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$c_1=\sqrt{n},\quad c_i=\sqrt{\frac{n}{2}} \qquad (i=2,3,\cdots,n) \tag{88}$$

とするとき，$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}'$ の $\boldsymbol{K}$ を

$$\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{a}_{k+1},\boldsymbol{a}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{a}_n) \tag{89}$$

とし，(83)式を使って計算された $\boldsymbol{v}$ をもとに $d_{AK}=\dfrac{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}$ を計算すればよい。この検定方式は Abrahamse and Koerts(2)によって提案された。

13) この条件は Theil and Nagar [33] の条件と呼ばれる。

Abrahamse and Koerts の検定は，相似な検定であるが，一般には，$\rho=0$ で局所最強力相似検定でない。ただし，説明変数が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の1次結合で表現でき，$d$ が $d_U$ に一致する場合は，Abrahamse and Koerts の検定量は退化して $d$ による検定に一致する。また，BLUS 推定量を使う場合とちがって，$\binom{n}{k}$ 通りの系列を考える必要はない。ただし，(89)式において $\boldsymbol{a}_i$ の順序をかえると，$\boldsymbol{\Omega}$ は同じだが検出力が異なってくるから[14]，最適な変換が対立仮説の場合も含めて一意的に定まったわけではない。なお，推定誤差の2乗和の期待値(81)式は，$\boldsymbol{K'MK}$ の1と異なる $k$ 個の固有値を $d_i^2$ とすると，BLUS の場合と同様，(85)式で与えられる。

ダービン・ワトソンの検定，$d$ による検定，BLUS 推定量を使う検定，Abrahamse and Koerts の検定の検出力は，いくつかの現実経済データに対して調べられている[15]。その結果をまとめると，①$d$ による検定の検出力が最も高く，②Abrahamse and Koerts の検定がつづき，③BLUS 推定量を用いる検定は，$\boldsymbol{X}_0$ のちがいによる検出力の差が大きいが，いずれも①②より検出力が低く，④最後にダービン・ワトソンの検定の順になっていて，①②③における検出力の順位は(81)式の値の順位と対応している。以上の結論の妥当性は経済データがなめらかであるという性質に基礎を置くものであり，説明変数がなめらかでなくなると，②③④の順位は変化する。

**5.5** 誤差項が独立な場合の最小2乗残差は，階数 $n-k$ の任意の相関行列をもつ他の残差に変換できる。5.3では条件(80)のもとで(81)式を最小にする変換を考えたが，他に簡単な変換法がある。回帰モデルを

$$\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{X}_1 \vdots \boldsymbol{X}_3]\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{u} \tag{90}$$

とする。ここで $\boldsymbol{X}_1$ と $\boldsymbol{X}_2$ は説明変数ベクトルからなる $n\times k_1, n\times k_2$ 行列で $k_1+k_2=k$, $\boldsymbol{u}$ は独立な $N(0,\sigma^2)$ である。いま，$\boldsymbol{u}$ を $[\boldsymbol{X}_1 \vdots \boldsymbol{X}_3]$ へ回帰したのではなく，$[\boldsymbol{X}_2 \vdots \boldsymbol{X}_3]$ へ回帰した場合に得られると同様の性質をもつ残差項が得たいとする。それは以下のようにすればよい。

$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ の各列ベクトルは1次独立で，$n\geq k+k_1$ とする。$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ へ最小2乗回帰し，それを $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{b}_3$ とする。$\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ の分散共分散行列を $\sigma^2\boldsymbol{G}_1$, $\sigma^2\boldsymbol{G}_2$ とすると，$\boldsymbol{G}_1=(\boldsymbol{X}_{1.23}'\boldsymbol{X}_{1.23})^{-1}$ および $\boldsymbol{G}_2=(\boldsymbol{X}_{2.13}'\cdot\boldsymbol{X}_{2.13})^{-1}$ である。ここで，$\boldsymbol{X}_{2.13}$ は $\boldsymbol{X}_2$ の $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_3$ に直交する部分 $\boldsymbol{X}_{2.13}=\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'X}_2$ である。ただし，$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1 \vdots \boldsymbol{X}_3]$ である。同様に，$\boldsymbol{X}_{1.23}$ は $\boldsymbol{X}_1$ の $\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ に直交する部分である。$\boldsymbol{P}_1$ と $\boldsymbol{P}_2$ を下三角行列で，$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1'=\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2'=\boldsymbol{G}_2$ とする。$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{c}_2$ とし，

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{X}_{1.23}\boldsymbol{c} \tag{91}$$

を計算する。すると，$\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ に最小2乗回帰した場合の残差と同じ同時分布をする[16]。

経済データの回帰分析においては，多くの場合，説明変数はなめらかであり，その動きは $\boldsymbol{\Theta}_N$ の振動数の低い固有ベクトルでよく近似される。そこで，Abrahamse and Koerts の場合と同様の相関行列をもつように変換することが考えられる。すなわち，線型回帰モデルを

$$\boldsymbol{y}=\alpha\boldsymbol{1}+\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u} \tag{92}$$

とし，(90)式の $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1&=\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}_2&=\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_k)\\ \boldsymbol{X}_3&=\boldsymbol{1}=\sqrt{n}\,\boldsymbol{a}_1\end{aligned} \tag{93}$$

と選ぶ。そうして，

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}-a\boldsymbol{l}-\boldsymbol{Xb}_1-\boldsymbol{Lb}_2+\boldsymbol{X}_L\boldsymbol{c} \tag{94}$$

を計算すると，$\boldsymbol{z}$ は，帰無仮説のもとで，$\boldsymbol{u}$ を $(\boldsymbol{1} \vdots \boldsymbol{L})$ に回帰したときの最小2乗残差と同じ分布をする。そこで，

$$d'=\frac{\sum_{i=2}^{n}(z_i-z_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}z_i^2} \tag{95}$$

を計算すると，$d'$ は帰無仮説のもとで $d$ の上限 $d_U$ と同じ分布をする。したがって，Abrahamse and Koerts の場合と同様，ダービン・ワトソン表の上限の値を使って $\rho>0$ に対する検定を行うことができる。ここで，$a$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{1}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{L}$ に最小2乗回帰した場合の係数，$\boldsymbol{X}_L$ は $\boldsymbol{X}$ の $\boldsymbol{1}, \boldsymbol{L}$ に直交する部分で，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{b}_2$ である。この検定方法は Durbin [10] によって提案された。

ダービンの検定は，相似な検定であるが，変換の必要のない $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}$ の場合を除いて，局所最強力相似検定になることはない。検出力は(93)式の $\boldsymbol{L}$ の $\boldsymbol{a}_i$ の順序に応じて変化する。$d$ と $d'$ の差は，$\boldsymbol{X}$ の張る空間と $\boldsymbol{L}$ の張る空間が近い程小さいが，対立仮説の場合も考えると，さらに $\boldsymbol{X}$ の第 $i$ 番目の列ベクトルと $\boldsymbol{L}$ の第 $i$ 番目の列ベクトルとが近いほど，小さくなる。したがって，密度関数を(iii)のタイプと仮定し，説明変数が固有ベクトルに一致して $d$ による検定が不偏になる場合でも，説明変

14) 密度関数を(iii)のタイプ(52)式とする。$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a}_{k+1},\boldsymbol{a}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{a}_{k+k})$ とし，$\boldsymbol{K}_1=(\boldsymbol{a}_{k+1},\boldsymbol{a}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ と $\boldsymbol{K}_2=(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{a}_{k+1})$ に対して，対立仮説のもとにおける $d_{AK}$ の正準型を(60)のように計算する。すると係数にちがいがあり，検出力の異なることがわかる。

15) 検出力を数値計算した論文は多数ある。たとえば，[1], [9], [20], [23], [30] 参照。

16) 証明は Durbin [10] 参照。

数の数が多く，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{L}$ がかけ離れていると，ダービンの検定は不偏になるとはかぎらない。たとえば，$d$ が下限 $d_L$ に一致するとしよう。説明変数行列を $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-k+2})$ とする。$d$ は 4.2 と同様の変換を行うと正準形

$$d=\frac{2\sum_{i=2}^{n-k+1}(1-\theta_i)\dfrac{\xi_i^2}{1+\rho^2-2\rho\theta_i}}{\sum_{i=2}^{n-k+1}\dfrac{\xi_i^2}{1+\rho^2-2\rho\theta_i}}$$

となる。$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ としてダービンの検定量 $d'$ を正準形にすると

$$d_{(1)}'=\frac{2\sum_{i=k+1}^{n-k+1}(1-\theta_i)\dfrac{\xi_i^2}{1+\rho^2-2\rho\theta_i}+2\sum_{j=2}^{k}(1-\theta_{n-j+2})\dfrac{\xi_j^2}{1+\rho^2-2\rho\theta_j}}{\sum_{i=1}^{n-k+1}\dfrac{\xi_i^2}{1+\rho^2-2\rho\theta_i}}$$

である。一方，$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}, \cdots, \boldsymbol{a}_2)$ として $d'$ を正準形にすると

$$d_{(2)}'=\frac{2\sum_{i=k+1}^{n-k+1}(1-\theta_i)\dfrac{\xi_i^2}{1+\rho^2-2\rho\theta i}+2\sum_{j=2}^{k}(1-\theta_{n-k+j})\dfrac{\xi_j^2}{1+\rho^2-2\rho\theta_j}}{\sum_{i=2}^{n-k+1}\dfrac{\xi_j^2}{1+\rho^2-2\rho\theta_j}}$$

である。ここで $\xi_i(i=2, 3, \cdots, n-k+1)$ は独立な $N(0, 1)$ である。$d'$ は帰無仮説 $\rho=0$ のもとで上限 $d_U$ と同一の分布をする。対立仮説 $\rho>0$ のもとでは，$d'$ はいずれも $d$ より検出力が低くなる。$d_{(1)}'$ と $d_{(2)}'$ では，$d_{(2)}'$ の方が検出力が高い。$k$ がある程度の大きさになると，$d'$ による検定は有意水準以下となる。極端な場合，$k\geq\left[\dfrac{n}{2}\right]$ となると，$d$ と $d'$ の動きは逆になり，$\rho>0$ に対する検定は $4-d'$ がダービン・ワトソン表の下限の値より小さいとき棄却するのが好ましくなる。しかしながら，説明変数が固有ベクトルに一致しない一般の場合は，$d$ と $d'$ のいずれが高い検出力を示すか定かでない。ダービンの検定方式は計算手続が簡単なところに特徴がある。

**5.6**　1階のマルコフ過程では，奇数番目の値が固定されると，偶数番目の確率変数は互に独立になる[17]。回帰モデルを

$$y_t=\beta_0+\beta_1x_{1,t}+\cdots+\beta_{k-1}x_{k-1,t}+u_t \tag{96}$$
$$u_t=\rho u_{t-1}+a_t \qquad t=1, 2, \cdots, 2m+1$$

とする。説明変数 $x_{j,t}(j=1, 2, \cdots, k-1;\ t=1, 2, \cdots, 2m+1)$ と，奇数番目の確率変数の実現値 $u_{2i-1}(i=1, \cdots, m+1)$ とを固定した下での $y_{2i}(i=1, 2, \cdots, m)$ の条件付密度関数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\sigma_0^n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{m}\left(y_{2i}-\gamma_0-\sum_{j=1}^{2k-1}\gamma_jz_{j,i}\right)^2\right] \tag{97}$$

である。ここで

$$\sigma_0^2=\frac{\sigma^2(1-\rho^2)}{1+\rho^2},\quad \nu_0=\beta_0(1-\nu_k)$$
$$\nu_j=\beta_j \quad \text{and} \quad z_{j,i}=x_{j,2i} \qquad (j=1, 2, \cdots, k-1)$$
$$\nu_k=\frac{2\rho}{1+\rho^2} \quad \text{and} \quad z_{k,i}=\frac{1}{2}(y_{2i-1}+y_{2i+1}) \tag{98}$$
$$\nu_j=-\nu_k\beta_j \quad \text{and} \quad z_{j,i}=\frac{1}{2}(x_{j,2i-1}+x_{j,2i+1})$$
$$(j=k+1, k+2, \cdots, 2k)$$

である。$\nu_{j+k}=-\nu_k\nu_j(j=1, 2, \cdots, k-1)$ なる制約条件を無視して最小2乗法で(97)式の指数部分の回帰係数 $\nu_j$ を推定すると，推定量は通常の最小2乗推定量の性質をもつ。したがって仮説 $\rho=0$ の検定は，$\nu_k=0$ に対する有意性検定となり，自由度 $n-k$ の $t$-検定なり自由度 1, $n-k$ の $F$-検定を行えばよい。この検定方式は小河原・ハナンの検定[18]と呼ばれている。

小河原・ハナンの検定に対しては，漸近的な効率が調べられている [14], [15], [16], [17], [18], [24]。標本数 $n$ から計算される2つの統計量を $t_1, t_2$ とするとき，帰無仮説 $\theta=\theta_0$ の検定の漸近的な相対効率を次のように定義する。

$$E_{ff}(t_1, t_2|\theta_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}E(t_1)\right]_{\theta=\theta_0}\right\}^2\cdot V(t_2|\theta=\theta_0)}{V(t_1|\theta=\theta_0)\cdot\left\{\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}E(t_2)\right]_{\theta=\theta_0}\right\}^2} \tag{99}$$

ここで，$E(t_j)$, $V(t_j)$ は $t_j$ の平均，分散である。$t_1$ として小河原・ハナンの検定量を，$t_2$ として $r$ なり $d$ を選ぶと，帰無仮説 $\rho=\rho_0$ の検定の，$\rho=\rho_0$ 近傍の局所的な漸近効率を調べることができる。誤差項が直接に観測可能な場合は，その効率は $\left(\dfrac{1-\rho_0^2}{1+\rho_0^2}\right)^2$ となる。一方，$r$ なり $d$ が最有効推定量であるので，小河原の検定量[19]は，仮説 $\rho_0=0$ の検定としては漸近的に最有効検定量である。回帰モデルの場合は，小河原・ハナンの検定量が仮説 $\rho_0=0$ の検定として漸近的に最有効検定量である。他の仮説 $\rho_0\neq0$ に対してはその評価が困難である。また，

17)　証明は Ogawara [29] 参照。

18)　平均が等しい場合の検定量が Ogawara [29] によって与えられた。Hannan [14] は回帰モデルの場合へ拡張した。

$\rho$ 全体に対する効率の評価はさらに困難である。

小河原・ハナンの検定は相似な検定であり，正確な有意性検定が行えることと回帰係数が同時に推定できることに特徴がある。しかし，正確な標本分布を得るために標本数の半分を使用していないことや，正規分布の仮定と1階マルコフ過程の仮定が重要であることなどに問題がある。

この方法は，一般に $h$ 階の自己回帰過程に対しても拡張できる。しかし，標本の $\frac{h}{h+1}$ 個は正確な標本分布を得るために使用できないので，推定効率や検定効率がかなり低くなるものと思われる。ただし，推定効率の低いことは検定効率の低いことを必ずしも意味しないから，系列相関の検定量としては期待できるところも少なくない。たとえば，(98)式の $\nu_k$ は $\frac{2\rho}{1+\rho^2}$ であるから $|\nu_k|<1$ となるが，その推定量は正規分布をする。このため $\hat{\nu}_k$ を系列相関の検定に用いるのと推定に用いるのとでは状況がことなり，検出力の効率は推定量の効率より一般に高くなる。

**5.7** 1階マルコフ過程に対する検定量としては，上にあげたもの以外に，(29)の最強力検定，(7)の不偏検定，2.3のコーシー分布を使う検定，4.4の説明変数 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_n$ 等を追加する検定がある。このうち不偏検定，コーシー分布による検定，説明変数の追加による検定の実用性は高い。とくに $\rho$ が $\pm1$ に近づくと $d$ による検定との差が著るしくなる可能性が高い。したがって，$\rho$ の値がかなり大きいと考えられる場合や，$d$ の検出力がきわめて低いと考えられる場合には，説明変数の動きを調べたうえで新たに説明変数を追加したり，$\rho=\pm0.9$ 前後を対立仮説として不偏検定やコーシー分布による検定を行うのが適切である。

## 6 要 約

本稿では，時系列回帰分析の一分野を形成している系列相関の検定理論を，相似検定の視点から展開した。

第2節では，系列相関の検定理論の基礎となっている，誤差項が直接に観測可能な場合の検定をあつかった。同時密度関数は正規分布にしたがうと仮定し，(1)相似な棄却域の構成，(2)対立仮説が既知の場合は最強力相似検定が存在すること，(3)最強力相似検定の使用上の欠点とその簡単な2つの解決法，(4)一様最強力相似検定の存在する密度関数の特徴，(5)相似検定，不偏検定，尤度比検定の関係を検討した。

第3節では線型回帰モデルにおける系列相関の検定をあつかった。すなわち(1)相似な棄却域は最小2乗残差の分布する空間にあるから，(2)線型回帰モデルにおける系列相関の検定の主題は，もとの誤差項が最小2乗法の適用によってどのように変形されるかを検討することであり，そのため，2節の議論に加えて，(3)説明変数の数が標本数の半分以上になると，系列相関の検定が不可能になるような説明変数の集合が必ず存在すること，(4)一様最強力相似検定の存在と説明変数の特徴，(5)不変検定に関する議論を展開した。

第4節では，一様最強力相似検定の検出力を検討した。すなわち(1)一様最強力相似検定でその検出力が一番高くなる場合の説明変数の特徴，(2)同じく検出力が最も低くなる場合の説明変数の特徴，(3)検定統計量の分布が上限ないし下限に一致する場合の説明変数と検出力の特徴を調べた。そうして，(4)上と同様の検定量を最小2乗推定量の効率がきわめて低くなる場合に用いると，その検出力がどのようになるか，その原因が何で，どうすれば検出力を高めることが出来るかを検討した。

第5節では，1階マルコフ過程に対する検定をとりあげ，(1)ダービン・ワトソンの検定，(2) $d$ による検定，(3)BLUS推定量を使うタイルの検定，(4)Abrahamse and Koertsの検定，(5)ダービンの検定，(6)小河原・ハナンの検定の検出力特性に理論的検討を加えた。その結果，現在最も好ましい系列相関の検定方法は，説明変数の動きを調べ，ダービン・ワトソン比の検出力曲線表から $d$ による検定の検出力の概略をつかみ，そのうえで，各検定方式の特徴を生かすようにすることであろう。

（東北大学経済学部）

19) 誤差項が直接に観測可能であるので Ogawara [21] の場合に相当している。18)参照。

## 参 考 文 献

[1] Abrahamse, A. P. J. and Koerts, J. (1969), "A Comparison between the Power of the Durbin-Watson Test and the Power of the BLUS Test," *J. Am. Statist. Ass.*, 64, pp. 938–48.

[2] Abrahamse, A. P. J. and Koerts, J. (1971), "New Estimators of Disturbances in Regression Analysis," *J. Am. Statist. Ass.* 66, pp. 71–74.

[3] Abrahamse, A. P. J. and Louter, A. S. (1971), "On a New Test for Autocorrelation in Least Squares Regression," *Biometrika* 58, pp. 53–60.

[4] Anderson, R. L. (1942), "Distribution of the Serial Correlatoin Coefficient," *Ann. Math. Statist.*, 13, pp. 1–13.

[5] Anderson, R. L. and Anderson, T. W. (1950), "Distribution of the Circular Serial Correlation

for Residuals from a Fitted Fourier Series," *Ann. Math. Statist.*, 21, pp. 59–81.

[6] Anderson. T. W. (1948), "On the Theory of Testing Serial Correlation," *Skand. Aktuarie Tidskrt*, 31, pp. 88–116.

[7] Bellman, R. (1960), *Introduction to Matrix Analysis*, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc..

[8] Courant, R. and Hilbert, D. (1937), *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer-Verlag, Berlin.; *Methods of Mathematical Physics* (1953), New York, Interscience Publishers, Inc.,

[9] Dent. W. (1971), "An Approximation to the Distribution of the Durbin-Watson Statistic in Certain Alternative Cases," *Working Paper Series*, No. 71–25.

[10] Durbin, J. (1970), "An Alternative to the Bounds Test for Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression," *Econometrica*, 38, pp. 422–429.

[11] Durbin, J. and Watson, G. S. (1950), "Testing for Serial Correlatoin in Least Squares Regression. I," *Biometrika*, 37, pp. 409–428.

[12] Durbin, J. and Watson, G. S. (1951), "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. II," *Biometrika*, 38, pp. 159–178.

[13] Durbin, J. and Watson, G. S. (1971), "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. III." *Biometrika*, 58, pp. 1–19.

[14] Hannan, E. J. (1955 a), "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression," *Biometrika*, 41, pp. 57–66.

[15] Hannan, E. J. (1955b), "Exact Test for Serial Correlation," *Biometrika*, 42, pp. 133–142.

[16] Hannan, E. J. (1957), "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression," *Biometrika*, 44, pp. 57–66.

[17] Hannan, E. J. (1969), "A Note on an Exact Test for Trend and Serial Correlation," *Econometrica*, 37, pp. 485–489.

[18] Hannan, E. J. and Terrell, R. D. (1968), "Testing for Serial Correlation after Least Squares Regression," *Econometrica*, 36, pp. 133–150.

[19] Hart, B. I. (1942), "Significance Levels for the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance," *Ann. Math. Statist.*, 13, pp. 445–447.

[20] Hildreth, C. C. and Lu, J. Y. (1969), "A Monte Carlo Study of the Regression Model with Autocorrelated Disturbances," *Rand Memorandum* RM 5728 PR.

[21] Kadiyala, K. R. (1970), "Testing for the Independence of Regression Disturbances," *Econometrica*, 38., pp. 97–117.

[22] Koerts, J. (1967), "Some Further Noets on Disturbances Estimates in Regression Analysis," *J. Am. Statist. Ass.*, 62, pp. 169–183.

[23] Koerts, J. and Abrahamse, A. P. J. (1968), "On the Power of the BLUS Procedure," *J. Am. Statist. Ass.*, 63, pp. 1227–1236.

[24] Krishnaiah, P. R. and Murthym V. K. (1966), "Simultaneous Tests for Trend and Serial Correlation for Gaussian Markoff Residuals," *Econometrica*, 34, pp. 472–480.

[25] Lehmann, E. (1959), *Testing Statistical Hypotheses*, New York, Wiley. 『統計的検定論』(1969), 渋谷政昭, 竹内啓訳, 岩波書店, 東京。

[26] Lehmann, E. L. and Stein, C. (1948), "Most Powerful Tests of Composite Hypotheses, I, Normal Distribution," *Ann. Math. Statist.* 19, pp. 495–516.

[27] von Neumann, J. (1941), "Distribution of the Mean Square Successive Difference to the Variance," *Ann. Math. Statist,*. 12, pp. 367–395.

[28] von Neumann, J. (1942), "A Further Remark Concerning the Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance," *Ann. Math. Statist.*, 13, pp. 86–88.

[29] Ogawara, M. (1951), "A Note on the Test of Serial Correlation Coefficient," *Ann. Math. Statist.*, 22, pp. 115–118.

[30] Spencer, G. (1972), "A Simulation Study of the Small Sample Properties of Durbin's Tests for Serial Correlation in Least Squares Regression," *Working Paper No.* 72–03, Department of Economics, Mcmaster University, Hamilton, Ontario, Canada.

[31] Theil. H. (1965), "The Analysis of Disturbances in Regression Analysis," *J. Am. Statist. Ass.*, 60, pp. 1067–1079.

[32] Theil, H. (1968), "A Simplification of the BLUS Procedure for Analysing Regression Disturbances," *J. Am. Statist. Ass.*, 63, pp. 242–251.

[33] Theil, H. and Nagar, A. L. (1961), "Testing the Independence of Regression Disturbances," *J. Am. Statist. Ass.*, 56, pp. 793–806.

[34] Watson, G. S. (1967), "Linear Least Squares Regression," *Ann. Math. Statist.*, 38, pp. 1679–1699.

[35] 栗山規矩(1972)「ダービン・ワトソン比の検出力について」『国民経済』第125号。pp. 18–25.

[36] 栗山規矩(1972)「ダービン・ワトソン比の有効性について」『季刊理論経済学』第23巻, 第3号, pp. 23–50.

[37] 栗山規矩(1974)「計量経済分析の信頼性に関する統計学的研究」, 第5章, 東京大学学位論文。

[38] 佐和隆光(1970)『計量経済学の基礎』東洋経済新報社, 東京。