不確実性と最適化

——「統計的システム論」への一試案——

片　岡　信　二

はしがき

数理計画法は，与えられた環境のもとで，ある目的をもつ行動主体の合理的な行動方式を決定するのに役立つものであるが，これはあくまで単一の行動主体を対象とし，その主体がどう行動するかを与えるものであって，多数の主体の集団の行動を記述するには不完全であるように思われる。単一の主体の場合は，たとえばそれが企業体であるならば「利潤を最大にする」こと，また個人であるならば「効用を最大にする」ことなどをそれぞれの行動原理に置くことによって行動の様式を一応定式化することはできたが，多数の企業体や個人がそれぞれの目的をもって動き，しかも相互に影響(作用)し合うとき，それらは全体として一体どのようになって行くかということに対して現在の数理計画法は全く無力であるといってよい。筆者はさきに提出した小論 [1], [2] において，多数の行動主体の集団の統計的・確率的記述方法の一試案を述べたが，本論文ではさらにこれの修正と展開を行ってみたいと思う。

ここでわれわれの準拠する考え方は，物理学における熱力学と統計力学の構成原理である。物理学において物質の巨視的性質たとえば温度，圧力，体積，成分の濃度などの物理量の間の関係を記述する現象論的な理論体系として熱力学がある。P. A. Samuelson も指摘しているように，この熱力学で用いられる均衡理論および諸関数の取扱いは，経済学の静学理論，ゲーム理論，線形計画法などの諸分野に大変類似している [3], [4], [5]。Samuelson は均衡状態にある体系の抽象理論を構築することによって熱力学における LeChatelier の法則を一般理論にまで高めている。(なお最近 W. Eichhorn, W. Oettli は Samuelson の定理をさらに一般化している。[6])

熱力学はしかしながらあくまで現象論であるため，物質の巨視的性質の説明にとどまり，それを構成する粒子(原子，分子)の微視的性質が，巨視的性質にどのような関連を持っているかという問題を解明することはできず，これは統計力学にまたなければならなかったのである。ところで問題になることは，一般に物質を構成する粒子は非常に多数であって，たとい単一の粒子の行動を記述する運動法則(量子力学など)がわかっていたとしても，多数の粒子の集団の行動を，個別の粒子の運動法則から導き出すということは殆んど不可能に近いことである。そこで統計力学では個々の粒子の運動方程式を解くことは諦め，逆に粒子が非常に多数であるということを利用して，粒子の集団の統計的・確率的法則を導き出すという考え方でこの困難の解決を計り，その結果統計力学は熱力学の諸法則を再び導出すると同時に，熱力学では明らかにし得なかった物質の諸性質の解明も美事になし得たのである [7]。

さてこのような統計力学を，先に述べた行動主体の集団の行動理論として見直すことができないか，というのがまずわれわれの発想の原点であって，そのために統計力学から完全に「物質」という概念を取り除き可能な限り一般化，抽象化したとき，どのような理論体系が得られるか，ということを試みるのが本論文の主旨である。われわれはつぎに理論の対象となる抽象化された「システム」の定義からはじめることにする。

1　システムの定義

これまで「システム」に関する定義はいくつか提出されており，必ずしも定ったものもないようであるが，本論ではおおかたの定義に従って，相互に関連をもつ人ないしは物の集合体で，ある内部構造をもち，さらにつぎのような性質があるものとする。

(1)　システムの内部構造の状態はいくつかの確率変数と外部から与えられるパラメーターによって記述される。前者をミクロ状態変数，後者を外生パラメーターとよぶ。

(2)　ミクロ状態変数のとることのできる値をミクロ状態値とよぶ。ミクロ状態値は外生パラメーターの一部によって変動を受けることがある。

(3)　内部構造には，いく組かのミクロ状態値の組合わせによって表わされるミクロ状態(ベクトルで表わされる)，があり，それぞれにまたいくつかのミクロ状態関数が付随している。システムはミクロ状態によって表わされる内部構造をもつ。

(4)　二つ以上のシステムが相互に影響を及ぼし合うことを相互作用という。システムは相互作用によってミクロ状態間の遷移を行う。

(5)　以上のように定義したシステムをいくつか集めた集団も一つのシステムであり，これについても同様に定義できる。

(6)　非常に多くのシステムからなるシステム集団によって一つのシステムが囲まれて種々の制約のもとに相互作用を行っているとき，前者を後者の環境システムとよぶ。

(7)　おのおののミクロ状態変数の確率分布が与えられると，ミクロ状態関数の期待値が求められるが，これをシステムのマクロ状態量とよぶ。

以上のような抽象的な定義を少し具体的にするために数学的記号を用いて表わしてみよう。

つぎのようなシステムを $\mathfrak{S}$ とよぶ。

(1)　$\mathfrak{S}$ には n 個のミクロ状態変数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ があり，$u_r (r=1, 2, \cdots, n)$ のミクロ状態値を $u_r^1, u_r^2, \cdots, u_r^{t_r}$ の t_r 個とする。なお以下の議論においてはミクロ状態値は不連続であるとして話を進めてゆき，必要な段階で連続なモデルに変えることにする。

(2)　ミクロ状態変数からミクロ状態ベクトル

$$\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

を定義し，これによってシステムの内部構造のミクロ状態を指定する。

(3)　$1 \leqq i_1 \leqq t_1, \cdots, 1 \leqq i_n \leqq t_n$ となるような添字 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ の順列 $\boldsymbol{i}=(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ の集合を I として，ミクロ状態値ベクトル

$$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{i}}=(u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \cdots, u_n^{i_n}) \qquad \boldsymbol{i} \in I$$

を定義する。これはシステムの内部構造を表わすもので，ミクロ状態ベクトル $\boldsymbol{u}$ はミクロ状態値ベクトル $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{i}}$ のいずれかの値をとる。

(4)　s 個の外生パラメーター $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ をとり，これによって外生パラメーター・ベクトル

$$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s)$$

をつくる。外生パラメーター $\boldsymbol{\lambda}$ のなかには，$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{\lambda})$ となってミクロ状態値ベクトルを変え，システムの内部構造に変動を与えるものもあるし，次に定義するミクロ状態関数のパラメーターとなるものもある。

(5)　ミクロ状態ベクトル $\boldsymbol{u}$ および外生パラメーター・ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ によって指定されるシステムのミクロ状態に対して，k 個のミクロ状態関数(スカラー) $f_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}), f_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}), \cdots, f_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda})$ があるものとする。これらはシステムの各ミクロ状態を特性づけ，ないしは評価する量を表わすものと考える。また同様にして，ミクロ状態関数ベクトル

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})=(f_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}),f_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}),\cdots,f_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}))$$

を定義しておく。

(6) ミクロ状態変数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ確率変数であったから，これらに確率が付随しているはずである。そこでミクロ状態ベクトル $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{u}^i$ という値をとる確率を π_i と定義する。すなわち

$$\pi_i=\mathrm{Prob}(u_1=u_1^{i_1}, u_2=u_2^{i_2}, \cdots, u_n=u_n^{i_n})=\mathrm{Prob}(\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^i) \qquad \boldsymbol{i}\in I$$

と表わす。以下の議論において π_i が $\boldsymbol{u}^i$ や $\boldsymbol{\lambda}$ によってどのように表現されるかが問題となるのである。

2 システムのエントロピーと不確実性

近年エントロピー (Entropy) という用語が物理学の熱力学以外の多方面において用いられるようになった [8]。この概念は熱力学の創始者の一人 R. J. E. Clausius が 19 世紀の中頃，ギリシャ語の $\tau\rho o\pi\acute{\eta}$ (変化)から造ったときに始まるといわれる。Clausius は熱力学の第二法則を定式化する過程でこれを見出し，物質系の熱エネルギーに関連する状態量の一つとして定義したものである。その後 L. Boltzmann, M. Planck, J. W. Gibbs 等によって確率論的な解釈が採られ，統計力学の基礎をつくるもととなったのである。またさらに近年に到って C. E. Shannon は彼の情報理論において情報 (information) のエントロピーというものを定義し，これによって情報量を定量化した [9], [10]。本論ではこの概念の発展過程を詳述することはできないが，議論を進める過程でふれることにする。

さて上記のようなシステム $\mathfrak{S}$ と同等な N 個のシステムの集団を $\mathfrak{E}$ とし，$\mathfrak{E}$ のおのおののシステムはさらに環境システムの影響を受けて，いろいろ複雑な内部構造のミクロ状態間の遷移を行っているとしよう。このようなシステム $\mathfrak{E}$ ないしはその要素の $\mathfrak{S}$ の状態変化を完全に追述することはできないので，われわれは以下のような統計的な観点からこれをながめてみることにする。$\mathfrak{E}$ が環境システムおよび内部の $\mathfrak{S}$ 同志で相互作用をはじめてから十分時間の経過した後のある時刻をとって，$\mathfrak{E}$ のなかの各システム $\mathfrak{S}$ をしらべたところ，ミクロ状態 $\boldsymbol{i}$ にある数が n_i であったとする。そこで N を十分大きくとると，$\mathfrak{S}$ のミクロ状態 $\boldsymbol{i}$ にある確率 π_i は

$$\pi_i=\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N}$$

と与えられる。そしてこれは一つのシステム $\mathfrak{S}$ に十分長い時間着目して調べたとき，それが $\boldsymbol{i}$ に滞っている確率に等しい(エルゴード定理)。

つぎに $\mathfrak{E}$ のなかの N 個のシステム $\mathfrak{S}$ が $n_i(\boldsymbol{i}\in I)$ の各ミクロ状態に分けられる確率は

$$W=\frac{N!}{\prod_{\boldsymbol{i}\in I} n_i!} \tag{2.1}$$

ただし

$$\sum_{\boldsymbol{i}\in I} n_i=N \tag{2.2}$$

となるような W に比例する。Boltzmann と Planck は熱力学と統計力学の接点に位置する量としてエントロピーを取り上げ，

$$\text{エントロピー}\propto\log W \tag{2.3}$$

という関係式を見出した。本論文では後の便宜のために，$\mathfrak{E}$ のなかの一システム当たりのエントロピーを

$$\Theta=\lim_{N\to\infty}\frac{\log W}{N} \tag{2.4}$$

とすると，これは Stirling の第一近似

$$\log x! \doteqdot x\log x - x$$

を用いて,

$$\Theta=\sum_{i\in I}-\pi_i\log\pi_i \tag{2.5}$$

となる。この(2.5)は, Shannon の情報理論における「いくつかのミクロ状態をもつ情報源の情報量」として定義されているものである。これはその情報源(システムと言ってもよい)がどの状態にあるか不確なほど, すなわち情報源の不確実性が大きければ大きいほど情報量も大きくなるという性質をもっている。他方またシステムのエントロピー(一システム当りに直してあるが)は, 未知のシステム集団の状態が一番起こり易い状態であるときエントロピーは最大となる。ここで起り易い状態というのは, (2.1)の W ないしは(2.4)の Θ が大きい状態をいい, たとえばサイコロを十個振って全部同じ目が出るというのは起り難い状態であり, いろいろな目が適当に入り混って特徴のない目の組合わせは起り易い状態である。このことを情報理論との関連で言えば, システム $\mathfrak{S}$ が一番起り易い状態であるときがまた, システム $\mathfrak{S}$ がどの状態にあるか不確実な場合なのである。(特徴のない学生の集団のなかの一人を記憶するのは困難である。) したがって情報理論と統計力学ではエントロピーに関する限り同じことを表と裏から見ているに過ぎない。

さて話をわれわれのシステム論に戻そう。個々のシステムの行動, すなわち上記の定義に従えばミクロ状態間の遷移の様子を正しく追跡することは不可能であるから, このことを諦め, われわれはシステムの集団, ないしは, 平均された個々のシステムの確率的性質として,「エントロピー最大原理」を基本法則として置くことにしよう。そしてエントロピー最大になっている状態をそのシステムの均衡状態と呼ぶことにする。ただし次節で展開するように, ここで考えているシステムは環境システムのなかに置かれ, いろいろな制約や作用を受けて行動し, そのような条件のもとで十分長い時間の後には「最も確からしい状態」に平均的に落ちつくということを想定するのが「エントロピー最大原理」の意味である。この意味のシステム論をわれわれは「統計的システム論」とよぶことにする。

3　統計的システム論

以下の議論においては, システム集団 $\mathfrak{S}$ のなかの平均的なシステム $\mathfrak{S}$ を対象とし, これに対して統計的システム論を展開してゆくことにする [11], [12], [13]。

(i)　エントロピー最大化

さてさきに定義したミクロ状態関数 $f_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})$ の状態確率 π_i による期待値は

$$E\{f_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})\}=\sum_{i\in I}\pi_i f_k(\boldsymbol{u}^i,\boldsymbol{\lambda})\qquad (k=1,2,\cdots,m)$$

となるが, この右辺を変数 π_i についての一次式と考え, システムへの外界からの制約条件式として

$$\sum_{i\in I}\pi_i f_k(\boldsymbol{u}^i,\boldsymbol{\lambda})=\varphi_k\qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{3.1}$$

を与える。ここで φ_k は外生パラメーターの一種であるが, 期待値の与件という意味で $\boldsymbol{\lambda}$ とは区別し, マクロ状態変数とよぶ。またベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ を

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$$

とし, これをマクロ状態変数ベクトル(または状態変数ベクトル)とよぶことにする。

さて環境システムのなかに置かれたシステム $\mathfrak{S}$ に対して, (3.1)のような制約のもとで, 最も起り易い状態, すなわちエントロピー最大となるようなミクロ状態確率 π_i を求める問題を考えてみよう。これは

$$\sum_{i\in I}\pi_i=1 \tag{3.2}$$

$$\sum_{i\in I}\pi_i f_k(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})=\varphi_k \qquad (k=1, 2, \cdots, m) \tag{3.3}$$

$$\pi_i \geqq 0 \tag{3.4}$$

のもとで

$$\text{maximize} \quad \Theta=-\sum_{i\in I}\pi_i \log \pi_i \tag{3.5}$$

と書くことができる。ところで容易にわかるように，Θ は π_i に関する凹関数であり，条件式は線形であるから，この非線形計画問題は唯一つの最適解を持つことがわかる。そこで(3.2)と(3.3)のラグランジュ乗数を $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_m$ としてラグランジュ関数

$$L=-\sum_{i\in I}\pi_i\left\{\log \pi_i+\beta_0+\sum_{k=1}^{m}\beta_k f_k(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})\right\} \tag{3.6}$$

をつくり，π^i で偏微分し0とおくと，

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_i}=-\left\{\log \pi_i+1+\beta_0+\sum_{k=1}^{m}\beta_k f_k(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})\right\}=0$$

となる。π_i の最適解を p_i とおき，さらにラグランジュ乗数 β_k の最適解も同じ記号 β_k とおくと，

$$p_i=\exp\left[-\left\{1+\beta_0+\sum_{k=1}^{m}\beta_k f_k(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})\right\}\right]=\exp(-1-\beta_0)\exp\{-\boldsymbol{\beta f}'(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})\} \tag{3.7}$$

となる。ここで $\boldsymbol{\beta}$ はベクトル $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ であり，β_k と φ_k は互いに共役なマクロ状態変数であるとする。また(3.7)の $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})$ は横ベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})$ の転置ベクトルを示す。(以下ダッシュをつけたベクトルはすべて縦ベクトルを意味するものとする。) また p_i が確率であることから，(3.2)に代入して

$$\sum_{i\in I}p_i=\exp(-1-\beta^0)\sum_{i\in I}\exp\{-\boldsymbol{\beta f}'(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})\}=1$$

となり，

$$\exp(1+\beta^0)=Z=\sum_{i\in I}\exp\{-\boldsymbol{\beta f}'(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})\} \tag{3.8}$$

とおくと，結局

$$p_i=\frac{1}{Z}\exp\{-\boldsymbol{\beta f}'(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})\} \qquad \boldsymbol{i}\in I \tag{3.9}$$

が得られる。この p_i を(3.1)に代入すると，

$$\sum_{i\in I}p_i f_k(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})=\varphi_k \qquad (k=1, 2, \cdots, m) \tag{3.10}$$

となり，これらは k 個のパラメータ φ_k を与えて k 個の乗数 β_k を定める k 個の連立方程式となっているのである。また均衡状態のミクロ状態確率 p_i を用いてエントロピー S を計算すると，

$$S=-\sum_{i\in I}p_i \log p_i=-\sum_{i}p_i\{-\boldsymbol{\beta f}'(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})-\log Z\}=\boldsymbol{\beta\varphi}'+\log Z \tag{3.11}$$

が得られる。

(ii)　特性状態関数

以上によってシステム $\mathfrak{S}$ の内部構造が与えられたとき，外生パラメーターベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ と状態変数ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ とが定まると，均衡状態における統計的システム論的な一切の未知量，$\boldsymbol{\varphi}$ の共役変数ベクトル $\boldsymbol{\beta}$, 分配関数 Z, エントロピー S などマクロな量がすべて決定されることになる。この意味で「システム $\mathfrak{S}$ のマクロな状態は $\boldsymbol{\varphi}$ および $\boldsymbol{\lambda}$ を変数としてすべて定まる」ということができる。

一般にマクロ状態変数ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ を独立変数とするスカラー関数 $g(\boldsymbol{x})$ が定義されるとき，これを $\boldsymbol{x}$ に関するマクロ状態関数という。($\boldsymbol{x}$ もマクロ状態関数である。) また $\boldsymbol{x}$ に関するマクロ状態関数のなかで，その一つが決まれば，他のマクロ状態関数がすべて決定されるようなものを，

$\boldsymbol{x}$ に関する特性状態関数とよぶ。

以下分配関数の対数 $\log Z$ は $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda})$ に関する特性状態関数であり，エントロピー S は $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\lambda})$ に関するそれであることを証明しよう。

まず準備段階としてつぎのことを示しておく。

$$-\frac{\partial}{\partial \beta_k}\log Z=-\frac{1}{Z}\sum_{i\in I}\{-f_k(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})\}\exp\{-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})\}=\sum_{i\in I}p_i f_k(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})=\varphi_k \qquad (k=1, 2, \cdots, m) \tag{3.12}$$

そこで，ベクトル

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\beta}}=\left(\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_1}, \cdots, \frac{\partial \log Z}{\partial \beta_m}\right)$$

と定義すると，(3.12) は

$$-\frac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\varphi} \tag{3.13}$$

と書くことができる。したがって $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \log Z$ を用いると (3.11) により S がわかるからすべてがきまり，$\log Z$ が特性状態関数であることがわかる。つぎに二つのベクトル

$$d\boldsymbol{\beta}=(d\beta_1, d\beta_2, \cdots, d\beta_m)$$
$$d\boldsymbol{\lambda}=(d\lambda_1, d\lambda_2, \cdots, d\lambda_s)$$

を定義し，$\log Z$ を $\boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ に関して全微分をとると，

$$d\log Z=\frac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\beta}}d\boldsymbol{\beta}'+\frac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\lambda}}d\boldsymbol{\lambda}'$$

となり，(3.13) を用いると，

$$d\log Z=-\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{\beta}'+\frac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\lambda}}d\boldsymbol{\lambda}' \tag{3.14}$$

が得られる。さて (3.11) から S の全微分をつくると，

$$\begin{aligned}dS&=d(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\varphi}'+\log Z)=\frac{\partial(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\varphi}')}{\partial \boldsymbol{\beta}}d\boldsymbol{\beta}'+\frac{\partial(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\varphi}')}{\partial \boldsymbol{\lambda}}d\boldsymbol{\lambda}'+d\log Z=\boldsymbol{\beta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)d\boldsymbol{\beta}'+\boldsymbol{\beta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)d\boldsymbol{\lambda}'+\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{\beta}'+d\log Z\\&=\boldsymbol{\beta}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)d\boldsymbol{\beta}'+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)d\boldsymbol{\lambda}'\right\}+\frac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\lambda}}d\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{\beta}d\boldsymbol{\varphi}'+\frac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\lambda}}d\boldsymbol{\lambda}'\end{aligned} \tag{3.15}$$

となる。ここで $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right), \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)$ は行列で

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)_{k, l}=\frac{\partial \varphi_k}{\partial \beta_l}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)_{k, j}=\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda_j} \qquad (k, l=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, s) \tag{3.16}$$

という元素をもつものであって，ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ の全微分

$$d\boldsymbol{\varphi}'=(d\varphi_1, d\varphi_2, \cdots, d\varphi_m)'=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)d\boldsymbol{\beta}'+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)d\boldsymbol{\lambda}'$$

を用いてあり，また式の変形の途中には (3.14) が使用されている。

さて (3.15) から

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{\beta}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=\frac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \tag{3.17}$$

が得られるが，$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi}, S$ を用いると (3.11) から $\log Z$ が得られ，矢張りすべてのマクロ状態関数が導出されたことになる。したがって S も特性状態関数である。

以上で $\log Z$ と S がそれぞれの独立変数の組に関して特性状態関数となることがわかったが，たと

えば $\boldsymbol{\varphi}$ の一部分と，残りの $\boldsymbol{\varphi}$ に共役なマクロ状態変数 $\boldsymbol{\beta}$ を組み合わせて独立変数にとり，これに関する特性状態関数をつくることも必要になる。そしてその方法も容易に示されるがここでは省略することにする。ところでこのように独立なマクロ状態変数を変えて特性状態関数をつくる意味は，システムに対する外部からの制御の方法を変えたとき，どのような行動をとるかを簡単に導出するためである。

(iii) 外生パラメーターの変動に対する応答

(3.14) および (3.17) 式に現われている $\dfrac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$ の項については，これまで説明を加えなかったが，ここで若干の考察を行っておこう。

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \lambda_j}=\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}=\frac{1}{Z}\sum_{i\in I}\left\{-\sum_{k=1}^{m}\beta_k\frac{\partial f_k{}^i}{\partial \lambda_j}\right\}\exp\left\{-\sum_k \beta_k f_k(\boldsymbol{u}^i,\boldsymbol{\lambda})\right\}=\sum_i\left\{-\sum_k\beta_k\frac{\partial f_k{}^i}{\partial \lambda_j}p_i\right\}$$
$$=-\sum_k\beta_k\left\{\sum_i p_i\frac{\partial f_k{}^i}{\partial \lambda_j}\right\}=-\sum_k\beta_k\overline{\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_j}} \tag{3.18}$$

ここで

$$\overline{\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_j}}=\sum_i p_i\frac{\partial f_k(\boldsymbol{u}^i,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \tag{3.19}$$

である。これは k 番目のミクロ状態関数 $f_k(\boldsymbol{u}^i,\boldsymbol{\lambda})$ の λ_j についての変化率 $\dfrac{\partial f_k(\boldsymbol{u}^i,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j}$ のすべてのミクロ状態にわたる平均値を意味しており，これを元素とする $m\times s$ 型行列 (X) を

$$\overline{\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_j}}=(X)_{kj}$$

と定義し，(X) を応答行列とよぶ。これを用いると，

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \boldsymbol{\lambda}}d\boldsymbol{\lambda}'=-\sum_k\beta_k\sum_j\overline{\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_j}}d\lambda_j=-\boldsymbol{\beta}(X)d\boldsymbol{\lambda}' \tag{3.20}$$

と書くことができる。これを (3.15) に代入すると，

$$dS=\boldsymbol{\beta}(d\boldsymbol{\varphi}'-(X)d\boldsymbol{\lambda}') \tag{3.21}$$

となる。ところですでに示したように (3.21) の右辺は完全微分形になるのであるから，

$$\partial \boldsymbol{Q}'=d\boldsymbol{\varphi}'-(X)d\boldsymbol{\lambda}' \tag{3.22}$$

とおいたとき，$\partial \boldsymbol{Q}'$ に $\boldsymbol{\beta}$ という積分因子をかけることにより，完全微分形にすることができることを意味している。(これは熱力学の第二法則に対応し，その一般化となっている。)

4 統計的システム論と所得分布曲線

最後に，これまで議論してきた統計的システム論の応用として，経済統計における所得分布曲線の導出を考えてみよう。所得分布曲線については，すでに古くから V. F. D. Pareto や R. Gibrat の研究があり，その理論づけも Gibrat や H. A. Simon などによる「比例効果の法則」を基礎として行われており [14]，筆者の考え方は全く見当違いの恐れもある。しかしながら，経済現象における数少い定量的な経験法則として所得分布曲線を見るとき，われわれの理論とも何等かの関係があるのではないかと推測されるのである。

(i) モデル

考察の対象となる都市なり国なりの一定の領域のなかに住む住民の所得を，いくつかの所得階層に分け，各階層に属する人数の分布を問題とするのであるが，これを一人の住民がある階層に属する確率を求めるという問題に直して考える。そうすると個人をシステム $\mathfrak{S}$ として議論を進めてゆけばよいことになる。さて一般論で述べた諸変数や値はつぎのようにとることにしよう。

ミクロ状態変数　u_1: 所得

　同ベクトル　$\boldsymbol{u}=(u_1)$:（スカラー）

ミクロ状態値　u_1^i　$1 \leqq i \leqq t_1$: t_1 個の所得階層

　同ベクトル　$\boldsymbol{u}^i=(u_1^i)$:（スカラー）

外生パラメーター　λ_1:（後述）

　同ベクトル　$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1)$:（スカラー）

ミクロ状態関数　$f_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda})=\log \dfrac{u}{u_0}$,　$f_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda})=\left(\log \dfrac{u_1}{u_0}\right)^2$

ただし u_0 は単位所得額ないしはデフレーター

ミクロ状態確率　$\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{t_1}$

以上により，本問題の統計的システム論による定式化のための道具が一応揃うことになる。なおとくにミクロ状態関数を何故このように置いたか後で述べることにし，まず全く数学の問題として Pareto 分布と Gibrat 分布を導いてみよう。

(ii)　Pareto 分布

ミクロ状態関数を $f_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda})=\log(u_1/u_0)$ だけを採用した場合：(3.8)により分配関数 Z は

$$Z=\sum_{i=1,t_1} \exp\{-\beta_1 f_1(u_1^i, \lambda)\}=\sum_i \exp\{-\beta_1 \log(u_1^i/u_0)\}=\sum_i \left(\frac{u_1^i}{u_0}\right)^{-\beta_1} \tag{4.1}$$

ところで，和はすべてのミクロ状態値 $u_1^1, u_1^2, \cdots, u_1^{t_1}$ にわたって取らねばならないが，不連続であるためこれ以上は進めない。そこでこれらは連続的に（あるいは非常に密に）しかも一様な密度 c で分布しているとする。いま変数を

$$y^i=u_1^i/u_0$$

とおきかえ，y^i が y と $y+dy$ の間にある個数は cu_0dy と考えると，(4.1)の和は

$$Z=\int_{y_0}^{\infty} y^{-\beta_1} cu_0 dy=cu_0 \frac{1}{\beta_1-1} y_0^{-\beta_1+1} \tag{4.2}$$

となる。ここで y_0 は u_0 を単位として測った最低所得階層の所得額であり，c は u_1^i の密度である。また(3.9)より

$$p_i=\frac{1}{Z} \exp\{-\beta_1 f_1(u_1^i, \lambda)\}=\frac{1}{Z}\left(\frac{u_1^i}{u_0}\right)^{-\beta_1} \tag{4.3}$$

となるが，連続分布に直すと，換算された所得が y と $y+dy$ との間に入る密度分布関数 $p(y)$ は

$$p(y)dy=\frac{1}{Z} y^{-\beta_1} cu_0 dy \tag{4.4}$$

によって与えられる。そこで $y_0<y (u_0<u_1)$ となるような確率を P とすると，

$$P=\int_{y_0}^{\infty} p(y)dy=\frac{1}{Z}\int_{y_0}^{\infty} y^{-\beta_1} cu_0 dy=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\beta_1+1}=\left(\frac{u_1}{u_0}\right)^{-\beta_1+1} \tag{4.5}$$

となる。これは Pareto 分布にほかならない。なお Gini の法則は Pareto 分布が与えられれば自然に導出されるものであるから，これも同時に得られたことになる。ただし $\beta_1>2$ であるとする。

(iii)　Gibrat 分布

ミクロ状態関数に $f_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda})=\log(u_1/u_0), f_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda})=(\log(u_1/u_0))^2$ を採用した場合：(3.8)により分配関数 Z は

$$Z=\sum_i \exp\{-\beta_1(\log u_1^i/u_0)-\beta_2(\log u_1^i/u_0)^2\} \tag{4.6}$$

となる。ここで同じく和を積分に変えるために，ミクロ状態値 $u_1^1, u_1^2, \cdots, u_1^{t_1}$ を一様な密度 c の連続

分布に置き換えると，du の幅に入るミクロ状態値の数は cdu となる。ところで計算の便宜のため

$$x^i=\log u_1{}^i-\log u_0$$

と値を置き換え，さらに $x^1, x^2. \cdots, x^{t_1}$ も連続変数 x に換える。このとき

$$x=\log(u/u_0), \qquad u=e^x u_0, \qquad du=e^x u_0 dx$$

であるから dx の幅にある x^i の個数は $cu_0e^x dx$ となる。(以下変数 u_1 の添字 1 は除く。)

以上により(4.6)式の和を x に関する積分に直すと

$$Z=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\beta_1 x-\beta_2 x^2\}cu_0 e^x dx=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{(\beta_1-1)^2}{4\beta_2}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{\beta_2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}cu_0 dx$$
$$=\exp\left\{\frac{(\beta_1-1)^2}{4\beta_2}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{\beta_2}}cu_0 \tag{4.7}$$

となる。ここで

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma^2=\dfrac{1}{2\beta_2}, & \beta_1-1=-\dfrac{m}{\sigma^2} \\ m=-\dfrac{(\beta_1-1)}{2\beta_2}, & \beta_2=\dfrac{1}{2\sigma^2} \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

である。同様にして x が x と $x+dx$ にある密度分布関数 $p(x)$ は

$$p(x)dx=\frac{1}{Z}\exp(-\beta_1 x-\beta_2 x^2)cu_0 e^x dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dx \tag{4.9}$$

と与えられ，ここで $x=\log(u/u_0)$ と変数をもとに返えせば Gibrat の対数正規分布が得られたことになる。

なおエントロピー S, $\log Z$, マクロ状態変数 $\varphi_1.\varphi_2$ およびそれに共役な $\beta_1.\beta_2$ そして(4.8)の m, σ^2 の関係はつぎのようになる。

$$\log Z=\frac{(\beta_1-1)^2}{4\beta_2}-\frac{1}{2}\log\beta_2+\frac{1}{2}\log\pi+\log u_0+\log c=\frac{m^2}{2\sigma^2}+\log\sigma+\log u_0+\text{const.}$$
$$\varphi_1=-\frac{\partial\log Z}{\partial\beta_1}=-\frac{(\beta_1-1)}{2\beta_2}=m$$
$$\varphi_2=-\frac{\partial\log Z}{\partial\beta_2}=\frac{(\beta_1-1)^2}{4\beta_2{}^2}+\frac{1}{2\beta_2}=m^2+\sigma^2$$
$$\beta_1=\frac{\varphi_1}{\varphi_1{}^2-\varphi_2}=-\frac{m}{\sigma^2}+1$$
$$\beta_2=\frac{1}{2(\varphi_2-\varphi_1{}^2)}=\frac{1}{2\sigma^2}$$
$$S=\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2+\log Z=m+\log\sigma+\log u_0+\text{const.} \tag{4.10}$$

(iv) 外生パラメーター λ の意味

つぎに外生パラメーターの意味を簡単に考察しておこう。外生パラメーターはシステムの外部からこれに作用してシステムの内部構造，具体的にはミクロ状態関数の値 $f_k(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})$ に変動を与えるものである。所得階層をミクロ状態値にとれば，利子率や賃金率その他所得に影響を与えるいろいろな要因の大きさを外生パラメーターとすることができる。そして所得に好影響を与える要因によって高所得階層の「部屋」の数が多くなり，悪影響を与える要因によって低所得階層の「部屋」の数が多くなると考えることができる。ところでわれわれの考え方は，いろいろな所得階層の「部屋」があり住民は個々人それぞれの意志で行動するけれども各「部屋」に入る人数は適当な制約のもとで最も確からしい配分率で定まるというものであるが，高所得階層の「部屋」の数が多くなれば当然全体の所得も向上するはずであ

る。そこでミクロ状態関数値 $f_k(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\lambda})$ の $\boldsymbol{\lambda}$ もいまの場合所得 $u_1{}^i$ の値を変位させて，その密度に変更を加えるパラメーターであると解釈することにする。

本節(iii)の分配関数(4.6)を和から積分に変えるとき，$u_1{}^i$ の密度 c は一定であるとしたが，今度は上のような意味で λ を用い，

$$c(u, \lambda)=u^{-(1-\lambda)} \tag{4.11}$$

とすることにする。今度は所得換算単位 $u_0=1$ とし，他の定数もすべて省略して考えると，

$$x^i=\log u_1{}^i$$

と変換したとき，x^i が x と $x+dx$ にある密度は

$$c(u, \lambda)du=u^{-(1-\lambda)}du=e^{-(1-\lambda)x}e^x dx=e^{\lambda x}dx$$

となる。したがって(4.6)は

$$Z=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-(\beta_1-\lambda)x-\beta_2 x^2\}dx \tag{4.12}$$

となり，前と同様にして

$$Z=\exp\left\{\frac{(\beta_1-\lambda)^2}{4\beta_2}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{\beta_2}}$$

$$\varphi_1=-\frac{(\beta_1-\lambda)}{2\beta_2}, \qquad \varphi_2=\frac{(\beta_1-\lambda)^2}{4\beta_2{}^2}+\frac{1}{2\beta_2} \tag{4.13}$$

その他(4.10)式において β_1-1 を $\beta_1-\lambda$ と置き換えたものが得られる。

いま λ を大きくすると(4.11)により所得の高い階層の密度が高くなるから，β_1, β_2 を一定に保って λ を増加すると社会的厚生 φ_1 (次の(v)で説明する)にも好影響を与えるはずである。実際(4.13)より

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}=\frac{1}{2\beta_2}=\sigma^2>0 \tag{4.14}$$

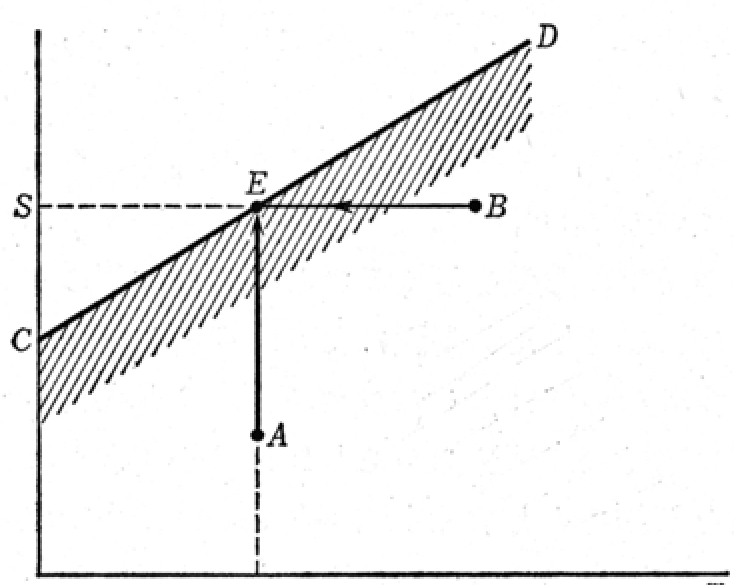
となることがわかる。しかしこの場合分散 $\varphi_2-\varphi_1{}^2$ には変化は与えない。

(v) エントロピー最大化の意味

まず Pareto 分布を導くときに用いた条件式をもう一度書いてみよう。

$$\sum_i \pi_i \log u_1{}^i=\varphi_1 \tag{4.15}$$

この式の左辺は log-linear の形をしており，$\log u_1{}^i$ を所得水準 $u_1{}^i$ の財の効用と見なせば，対象としている領域(国ないしは都市など)に住む住民にとっての平均の社会的厚生と見ることができる。そうすると Pareto 分布は「考えている社会に住む住民の社会的厚生を一定値 φ_1 に抑えたとき，最も起り易い状態は何か」という問に対して現実に得られた答であるということができよう。



また Gibrat 分布は

$$\sum_i \pi_i \log u_1{}^i=\varphi_1 \tag{4.16}$$

$$\sum_i \pi_i (\log u_1{}^i)^2=\varphi_2 \tag{4.17}$$

という二つの条件を満たすが，これらは社会的厚生の平均値 φ_1 と分散(不平等度) $\varphi_2-\varphi_1{}^2$ を一定にするという制約をシステムに課した上で，エントロピーを最大にするということを意味している。後の制約はおそらく長い歴史的な経過のうちにシステムが他律的ないしは自律的に得たものであろう。

ところで，いま分散(不平等度)を前と同じ値に一定にし，

またエントロピーも均衡状態の S に固定したとき，社会的厚生を「最小にする」という問題を考えると，その解は前に得たものと完全に一致することが示される。(4.10)の一番下の式から m と S の図を書くと上のようになる。直線 CD は m と σ^2 を与えたときの最大の Θ の値すなわち S を表わしている。はじめの問題は m と σ^2 を与えて Θ を最大にするもので点 A から上に動いて E に到着することを意味し，後の問題は S と σ^2 を与えて m を最小にして再び E に到着することを示す。同様のことは S と σ^2 の間にも成り立っている。

以上のことから，本節で考察された Gibrat 分布のモデルにおいては，つぎのようなことが結論される。エントロピー最大化ということがもしこのシステムで起っているとすれば，これを裏から眺めると，一定のエントロピー，不均等度のもとでは社会的厚生を減少する方向にシステムは動き，一定のエントロピー，厚生のもとでは均等化の方向へ動く。ところで熱力学においてエントロピー一定とは外部との「断熱」を意味し，システムが外界から熱的に孤立していることを表わしている。現在の統計的システム論ではまだこの方向の研究を進めてないので何とも言えないがシステム間の相互作用，多相システム，多成分システムを考慮に入れることにより，また経済理論，統計と関連を持たせることにより明らかになってゆくことと思う。

統計的システム論の基本的な考え方は「自然則」の拡大解釈である。現実の経済社会システムにも，そのまま当てはまるかどうかはまだ疑問であるが，経済学にも「見えざる手による調整」という考え方は古くからあり，必ずしも目新しいものではないと思う。他方またこのような「自然則」に逆って社会的厚生を増大するところに「政策」の意味があり，また数理計画法の適用される場が生れるものと思われる。

(一橋大学経済学部)

参　考　文　献

[1] 片岡信二,「経済現象における最大原理」,『一橋論叢』32 巻 3 号，1954。

[2] 片岡信二,「統計的システム論に関する一考察」,『一橋大学研究年報　経済学研究』17, 1973, pp. 69–88.

[3] P. A. Samuelson, "An Extension of the LeChatelier Principle," *Econometrica*, vol. 28, 1960, pp. 368–379.

[4] ——, "The LeChatelier Principle in Linear Programming," RAND Corporation, August 4, 1949.

[5] ——, "Structure of a Minimum Equilibrium System," R. W. Pfouts, ed., *Essays in Economics and Econometrics: A Volume in Honor of Harold Hotelling*, Univ. North Carolina Press, 1960, pp. 1–33.

[6] W. Eichhorn, W. Oettli, "A General Formulation of the LeChatelier-Samuelson Principle," *Econometrica*, vol. 40, 1972, pp. 711–718.

[7] 伏見康治編,『量子統計力学』共立出版，1948。

[8] R. E. Murphy, Jr., *Adaptive Process in Economic System*, Academic Press, 1965. (小野勝章訳,『経済システムと適応過程』, コロナ社)

[9] C. E. Shannon, W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, Univ. Illinois Press, 1948.

[10] H. Theil, *Economics and Information Theory*, North-Holland Publishing Comp., 1967.

[11] D. G. Cough, "Application of the Principle of Maximizing Entropy in the Formulation of Hypothesis," *Canadian Operations Research Society Journal*, vol. 2, 1964, pp. 53–70.

[12] E. T. Jaynes, "Information Theory and Statistical Mechanics," *Physical Review*, vol. 106, pp. 620–630.

[13] A. I. Khinchin, *Mathematical Foundation of Statistical Mechanics*, translated by G. Gamov, Dover Publication, Inc., 1949.

[14] 高橋長太郎,『所得分布の変動様式』岩波書店，1955。