

国際経済の貨幣的成長と インフレーション率の均衡予想

大 槻 幹 郎

§1 はしがき

貨幣的経済成長に関する研究は数多く行なわれているが、それらは封鎖的な一国の経済における資本蓄積の問題に専らその注意をそそいでいる。また、それらの多くはインフレーション率の予想について適応的予想形成を仮定し、よく知られているように、もしこの適応速度係数が十分に小さいならば、一時的均衡の軌跡は均斉成長的均衡に収束すること、もし適応速度係数が大きいならば、収束しないことを明らかにした¹⁾。この主張は、自由な変動為替レート制度のもとでの国際経済における、貨幣的経済成長についても成立すると思われる。しかし、著者の知る限りでは、封鎖モデルに対応するような、国際経済の貨幣的成長のモデルは提示されていない²⁾。また、資産保有者の適応速度係数が経済の安定を保障するほど小さいか否かは疑わしい。小論の目的は、a) インフレーション率の予想について、適応的形成とは異なる、形成方式を提示すること、b) 国際経済における貨幣的経済成長の集計的モデルを設定し、均斉成長的均衡の安定性を示すことである。小論で提示される予想形成を、のちに明らかに分るように、均衡予想形成と呼ぶことが適当であろう。

さて、小論の分析対象である国際経済では、封鎖モデルの分析対象であった一国が一構成単位である。各国は若干の部門より成り、すべての国は国際貿易を通じて相互に依存している。小論で設定されるモデルは、このような国際経済の貨幣的成長を分析する一つの試みであり、ナイーヴなモデルである。モデルを設定するために、のちに若

干の仮定が課せられるが、特に貨幣の機能についてつぎのことが仮定される。すなわち、最近貨幣の交換手段としての機能に注目が払われているが、小論では、貨幣は蓄蔵手段としてのみ機能することが仮定され、したがって、交換活動それ自身は費用を必要としないことが仮定される。また、小論におけるモデルは国際経済の集計的モデルであり、諸財は集計され、あたかもただ一種類の財のみが存在するかのごとく想定される。それゆえ、国際経済における特化の問題は論じられない。

すでに述べた小論の目的から明らかなように、小論のもう一つの焦点は予想形成である。適応的予想形成においては、インフレーション率の予想は過去の価格の時系列にのみ基づいて形成される。しかし、現実においては、予想は過去の事象のみならず、近い将来の事象についての情報に基づいて形成されると考えられる。例えば、将来のインフレーション率を予想する場合、過去の価格の動向だけでなく、近い将来の市況についての情報——もしそれが入手可能ならば——をも考慮するであろう。すなわち、もし需要がさらに増大するであろうということが知られたら、他の諸与件が同じなら、より高いインフレーション率を予測するであろう。過去の価格についてのデーターのみを強調するという意味で、適応的予想形成は一つの極端である。小論で提示する均衡予想形成は他の極端である。適応的予想形成とは対照的に、均衡予想形成は非常に近い将来の市況についての情報のみに基づく予想形成であり、さらに詳しくいえば、資産保有者の資産保有計画のうち、非常に近い将来の部分が経済全体として整合性を保持するように、インフレーション率の予想が形成されることである。

小論では、一時均衡の性質および一時的均衡の

1) 例えば、Sidrauski [5, 6], Nagatani [3]などを参照せよ。

2) Tobin [7] などにおける封鎖1国経済モデルの拡張として、小論は国際経済モデルを設定している。

軌跡の均斉成長的均衡への収束が示されるが、分析はつぎの順序で展開される。§2では、基本的な仮定が述べられる。これら仮定に沿って、§3では国際経済のモデルが設定される。インフレーション率についての均衡予想形成はこの節で詳細に論じられよう。一時的均衡は§4で考察される。均斉成長的均衡への収束は§5で示される。

§2 基本的仮定

小論ではつぎのことが仮定される。

- A1. 為替レートは自由に伸縮的である。
- A2. 国際経済は n 国より構成されており、各国の政府はそれぞれ一種類の貨幣を発行している。諸財は集計され、あたかも一種類の財のみが存在するかのごとく想定することが可能である。
- A3. 各国は企業家、資産保有者、労働者と一つの政府から成っている。
- A4. それぞれの国の政府は貨幣発行だけを行ない、他の経済政策は行なわない。貨幣は何らの準備資産の裏付けなしに発行される。第 i 国の政府によって発行される貨幣を貨幣 i と呼ぶ。貨幣 i は労働者への移転支出として発行され、その発行の増加率は一定である。この増加率を μ_i とし、 $\mu_i > 0$ である。
- A5. 企業家は資本用役と労働用役を購入し、それらを投入して、財を生産する。生産関数は資本用役と労働用役の投入量に関して一次同次である。それぞれの国はその国固有の生産関数を有している。
- A6. 資本用役は各国間を自由に移動することが可能である。他方、労働用役の国際移動は不可能である。
- A7. 資産保有者は資産所得をすべて貯蓄する。彼等の相対的危険回避度は一定であり、1より小さい。さらに、この回避度は国際経済のすべての資産保有者にとって同一である。任意の時点 t で、彼等は時点 $(t+T)$ までの資産保有計画を立てる。計画期間の最終時点 $(t+T)$ での資産額の期待効用を最大にするように、資産保有計画を立案する。
- A8. 一種類の資本財と n 種類の貨幣、計 $(n+1)$

種類の危険資産がある。すべての資産保有者はこれらの資産の収益率に関して共通の予想を有する。資本財の将来収益率の期待値はその現在の収益率に等しいと予想される。貨幣の将来収益率の期待値はつぎのようにして形成される。資産保有者は常に現時点 t から非常に近い将来時点 $(t+\epsilon)$ までの間の各時点における、貨幣に対する超過需要関数を推定する。そして、彼等はこの予測された超過需要を丁度ゼロにするようなインフレーション率を計算する。このインフレーション率の期待値が単に将来時点 $(t+\epsilon)$ までだけでなく、さらに、彼等の計画期間の最終時点 $(t+T)$ まで妥当すると、彼等は予想する。(詳細はのちに説明する。)

A9. 労働者は彼等の賃金所得と移転所得をすべて消費する。それぞれの国における労働用役の供給は賃金率に対して非弾力的であり、各国共通の一定の率 ρ で増加する。

§3 モデル

1. 資産保有計画と資産市場

先ず、貨幣的経済成長において重要な位置にある資産保有者の行動について述べよう。そのために、2つの時点を示す記号を用いる必要がある。一方は暦上の時点であり、それを t で表わす。他方は計画期間 $[t, t+T]$ 上の時点であり、それを s で表わす。前者は資産計画が立案され、その実行が開始される時点である。後者はこの時点を基準として計られている。すなわち、 $0 \leq s \leq T$ 。財のタームで表示された貨幣 i の現在価格を $p_i(t)$ で表わす。また、時点 t に立っている資産保有者が将来時点 $(t+s)$ において成立すると予想する貨幣 i の価格を $p_i(t, s)$ で表わす。

つぎに、価格の予測式を規定しよう。資産保有者は貨幣の将来価格をつぎの式で予測すると仮定する。すなわち、

$$(1) \quad p_i(t, s) = p_i(t) \exp \pi_i(t, s)s, \quad i=1, 2, \dots, n$$

ここで、 $\pi_i(t, s)$ は正規分布をした、系列相関のない、 $[0 \leq s \leq T]$ 上で定義された、定常的な確率時系列である。以下では、 $\{\pi_1(t, s), \pi_2(t, s), \dots, \pi_n(t, s)\}$ の期待値を $\{\pi_1(t), \pi_2(t), \dots, \pi_n(t)\}$ で表わ

し、その共分散行列を $V(t)$ で表わす。したがって、時点 t における資産保有者の予測活動は $\{\pi_1(t), \pi_2(t), \dots, \pi_n(t)\}$ と $V(t)$ を推定することである。しかし、小論では、資産保有者は共分散行列を各時点で再推定し、調整することはしないと仮定する。すなわち、資産保有者の予測活動は専ら価格の相対的変化率の期待値を推定することであり、共分散行列は時間を通じて一定である； $V(t) = V$ 。なお、インフレーション率の期待値は π_i でなく、 $-\pi_i$ であることに注意すること。

前節で述べた仮定のうちの A7 から、つぎのことがいえる³⁾。(a) 資産保有計画は計画時点の資産額の一次同次関数である。(b) すべての資産保有者にとって、最適資産構成比は同一である。(c) 最適資産構成比は計画期間を通じて不変であり、各資産の実質収益率の期待値の差に依存する。最初の二つ、(a)(b) は資産分配効果がないことを含意する。したがって、あたかも国際経済には資産保有者がただ一人しか存在しないかのごとく、資産保有計画を表現することができる。それゆえ、時点 t で立案される資産保有計画を、個々の資産保有者を識別するための番号をつけずに、集計された形で、 $\{a(t, s), k(t, s), m_1(t, s), m_2(t, s), \dots, m_n(t, s); 0 \leq s \leq T\}$ と表わす。ここで、 $a(t, s)$ は資産保有者が将来時点 $(t+s)$ で保有しようとする、財のタームでの、総資産額であり、同様に、 $k(t, s), m_i(t, s)$ は資本財、貨幣 i を表わす。なお、これらすべては世界人口に対する比として定義されている。例えば、時点 t における世界人口を $L(t)$ 、名目での貨幣 i の計画保有量を $M_i(t, s)$ とすると、

$$(2) \quad m_i(t, s) = p_i(t, s) M_i(t, s) / L(t) e^{\rho s}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

である。

さらに、(a) と (c) から資産保有計画の各構成要素はつぎのような形で表わされる。

$$(3) \quad \begin{aligned} k(t, s) &= a(t, s) x_0 \\ m_i(t, s) &= a(t, s) x_i \quad i=1, 2, \dots, n \\ x_i &= x_i(\pi_0 - \pi_i, \pi_1 - \pi_i, \dots, \pi_i - \pi_i, \dots, \pi_n - \pi_i) \end{aligned}$$

3) 資産保有計画のこれらの性質は末尾の付論で示されている。

$$x_i \geq 0 \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

$$1 = x_0 + \sum x_j$$

ここで、 $\sum$ は j が 1 から n までの和を表わす。 x_0 と x_i は資本財、貨幣 i 、それぞれの最適資産構成比を表わす。さらに、 $k(t)$ と $m_i(t)$ をもって、時点 t における資本財の存在量、貨幣 i の実質残高、それぞれの世界人口に対する比を表わす。例えば、貨幣 i の名目発行残高を $M_i(t)$ とすると、

$$(4) \quad m_i(t) = p_i(t) M_i(t) / L(t) \quad i=1, 2, \dots, n$$

である。時点 t に立案される資産保有計画は計画の初期条件

$$(5) \quad a(t, 0) = a(t) \equiv k(t) + \sum m_j(t)$$

によって制約されている。

以下では、時点記号 t を省略しても、文脈から明らかに分り、混同が生じないと思われる場合には、時点 t 現在に関する変数につけられる時点記号 t を省略する。例えば、 m_i は $m_i(t)$ の略記であり、 $m_i(t, 0)$ のことではない。さて、資産市場の均衡条件

$$(6) \quad \begin{aligned} k(t) &= k(t, 0) \\ m_i(t) &= m_i(t, 0), \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

は(3)、(5)式によりつぎのように書き換えられる。

$$(7) \quad \begin{aligned} k &= \{k + \sum m_j\} x_0 \\ m_i &= \{k + \sum m_j\} x_i, \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

上記の(6)、(7)式の左辺は各資産の供給量(存在量)であり、右辺は需要量である。つぎに、インフレーション率の均衡予想について述べる。

2. インフレーション率の均衡予想

均衡予想形成を定式化するためには、資産保有計画 $\{a(t, s), k(t, s), m_1(t, s), m_2(t, s), \dots, m_n(t, s), 0 \leq s \leq T\}$ をフローの形で表わす必要がある。そのために、先ず時点 t, s に関する微分をつぎのように表わす。任意の変数 $y(t, s)$ または $y(t)$ について、 $Dy = \partial y / \partial t$ または $Dy = dy / dt$ であり、 $\Delta y = \partial y / \partial s$ とする。

仮定 A7 において述べたように、資産保有者の貯蓄性向は 1 であるから、つぎの式が成立する。

$$(8) \quad \Delta a(t, s) + \rho a(t, s) = \pi_0 k(t, s) + \sum \pi_j m_j(t, s)$$

したがって、(3)式の最初の 2 式を s で微分し、(8)式を考慮すると、資産保有計画はフローの形でつぎの式を満たすことが明らかである。

$$\begin{aligned}
 \Delta k(t, s) + \rho k(t, s) &= \\
 \{ \pi_0 k(t, s) + \sum \pi_j m_j(t, s) \} x_0 \\
 (9) \quad \Delta m_i(t, s) + \rho m_i(t, s) &= \\
 \{ \pi_0 k(t, s) + \sum \pi_j m_j(t, s) \} x_i \\
 i &= 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

上に述べたことは資産保有計画，すなわち，各資産に対する需要計画である。つぎに，貨幣の供給量について述べる。貨幣 i の相対的発行率 μ_i は資産保有者に正確に知られていても，将来インフレーション率は予想値であるから，貨幣 i の将来実質供給量は予想供給量である。時点 t にある資産保有者が予想する将来時点 $(t+s)$ での貨幣 i の実質供給量を $\bar{m}_i(t, s)$ と表わすと， $\bar{m}_i(t, s)$ はつぎの式によって与えられる。

$$(10) \quad \bar{m}_i(t, s) = p_i M_i e^{(\pi_i + \mu_i)s} / L e^{\rho s} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

したがって，

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta \bar{m}_i(t, s)}{\bar{m}_i(t, s)} &= \pi_i + \mu_i - \rho \\
 (11) \quad \bar{m}_i(t, 0) &= m_i \\
 \frac{D \bar{m}_i(t, s)}{\bar{m}_i(t, s)} &= \frac{D p_i}{p_i} + \mu_i - \rho + s D \pi_i
 \end{aligned}$$

$$\text{特に} \quad \frac{D \bar{m}_i(t, 0)}{m_i} = \frac{D p_i}{p_i} + \mu_i - \rho, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

これら資産保有計画と予想貨幣供給にもとづいて，資産保有者はつぎのようにして，インフレーション率に関する予想を形成すると仮定する。

(a) 将来の貨幣需要および供給を推定する場合，計画初時点 $s=0$ における貨幣に対する計画需要と貨幣の予想供給について，資産保有者は不偏な情報を得ることができる。すなわち， $m_i(t, 0)$ ， m_i ， $\Delta m_i(t, 0)$ および $\Delta \bar{m}_i(t, 0)$ について，——名目でいえば， $M_i(t, 0)$ ， M_i ， $\Delta M_i(t, 0)$ および $\Delta \bar{M}_i(t, 0)$ について——不偏な情報を入手できる。ここで，不偏な情報とはその期待値が真の値に等しいという意味である。

(b) 現時点 t からある将来時点 $(t+\epsilon)$ まで——ここで， $0 < \epsilon \leq T$ ——，一定の率で，貨幣の需要および供給は変化すると方式を規定して，資産保有者は貨幣の需要および供給の推定を行なう。かつ，この一定の変化率は，計画初時点 $s=0$ において計画された需要の変化率と予想

された供給の変化率にそれぞれ等しいと，彼等はみなしている。したがって，貨幣 i の予想超過需要はつぎのような形をとる。

$$\begin{aligned}
 M_i(t, 0) + s \Delta M_i(t, 0) - M_i(t) - s \Delta \bar{M}_i(t, 0), \\
 0 < s \leq \epsilon
 \end{aligned}$$

定義により

$$\frac{p_i \Delta M_i(t, 0)}{L} = \Delta m_i(t, 0) - (\pi_i - \rho) m_i(t, 0)$$

$$\frac{p_i \Delta \bar{M}_i(t, 0)}{L} = \Delta \bar{m}_i(t, 0) - (\pi_i - \rho) m_i$$

であるから，予想超過需要を実質タームで示すと

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \{ m_i(t, 0) - m_i + s [\Delta m_i(t, 0) - \Delta \bar{m}_i(t, 0)] \\
 - s (\pi_i - \rho) [m_i(t, 0) - m_i] \} \frac{L}{p_i}
 \end{aligned}$$

となる。

すべての貨幣に対する予想超過需要をゼロにするようなインフレーション率の期待値のベクトル $(-\pi_1, -\pi_2, \dots, -\pi_n)$ を均衡予想インフレーション率と呼ぶことにする。

(c) 資産保有計画を立てる場合，彼等の計画期間を通じて均衡予想インフレーション率で各貨幣の価格は変動するものと，資産保有者は想定している。

さて，資産市場の均衡条件(6)式を考慮すると，均衡予想インフレーション率の条件は(12)により，つぎのようになる。

$$0 = s [\Delta m_i(t, 0) - \Delta \bar{m}_i(t, 0)] \quad 0 < s \leq \epsilon$$

あるいは，(9)，(11)式を用いて

$$(13) \quad (\pi_i + \mu_i) m_i = \{ \pi_0 k + \sum \pi_j m_j \} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. 実物部門の均衡条件

仮定 A6 における資本用役の自由な国際移動の可能性と，それとは反対に，労働用役の国際移動の不可能性とは，資本用役価格の国際的均等性と労働賃金率の不均等性を意味する。したがって，限界条件と価格—費用条件はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \frac{df_i}{dk_i} &= \pi_0 \\
 f_i - k_i \frac{df_i}{dk_i} &= w_i \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

ここで， $f_i = f_i(k_i)$ は第 i 国の集計的生産関数で

あり、一人当り資本用役投入量 k_i と一人当り生産量 f_i との関係を表わしている。 w_i は第 i 国の実質賃金率である。また、生産関数について、つぎのことを仮定する。

$$(15) \quad \begin{aligned} f_i(0) &= 0, & f_i(\infty) &= \infty, & \frac{d^2 f_i}{dk_i^2} &< 0 \\ \lim_{k_i \rightarrow 0} \frac{df_i}{dk_i} &= \infty, & \lim_{k_i \rightarrow \infty} \frac{df_i}{dk_i} &= 0, & i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

世界人口 L に対する第 i 国の人口の比率を n_i とすると、仮定 A9 により、 n_i は時間を通じて一定である。すでに定義されたように、 k は国際経済における資本・労働比であるから、資本用役市場の均衡条件はつぎのようになる。

$$(16) \quad k = \sum k_j n_j$$

最後は生産物市場である。仮定 A4, A7, A9 により、集計された財についての均衡条件はつぎのようになる。

$$(17) \quad \sum f_j n_j = \sum (w_j m_j + \mu_j m_j) + Dk + \rho k$$

右辺は各国の産出量の和であり、右辺第1項は各国労働者の消費の和である。第2項は資本財の増加分である。

すでに説明したように、インフレーション率の均衡予想形成は予想インフレーション率の期待値が貨幣に対する計画需要と予想供給とを均等ならしめるように、すなわち、 $\Delta m_i(t, 0) = \Delta \bar{m}_i(t, 0)$ となるように、形成されることであつた。均衡においては、資本財についても、計画増加率が均衡でのフロー供給率に等しくなること、すなわち

$$(18) \quad Dk + \rho k = \Delta k(t, 0) + \rho k$$

が成立することを示そう。まず、(14), (16), (17) 式から

$$\begin{aligned} (18') \quad Dk + \rho k &= \pi_0 k - \sum \mu_j m_j \\ &= \pi_0 k + \sum \pi_j m_j - \sum (\pi_j + \mu_j) m_j \\ &= \pi_0 k + \sum \pi_j m_j \\ &\quad - \{ \pi_0 k + \sum \pi_j m_j \} (1 - x_0), \\ &\quad (13) \text{式より} \\ &= \{ \pi_0 k + \sum \pi_j m_j \} x_0 \\ &= \Delta k(t, 0) + \rho k \quad (9) \text{式より。} \end{aligned}$$

§4 一時的均衡

短期的には所与である、国際経済の資本・労働比 k に対応して、資産市場均衡条件(7)式、均衡

予想条件(13)式、限界および価格—費用条件(14)式、資本用役市場均衡条件(16)式と生産物市場条件(17)式を満足する $\{k_i, m_i, w_i, \pi_0, \pi_i, i=1, 2, \dots, n\}$ を一時的均衡と呼ぶ。一時的均衡として、各貨幣の実質残高 m_i が決定されると、貨幣 i の均衡価格 p_i が定義式(4)から定まる。これに応じて、貨幣 i と貨幣 j との為替レートは p_i/p_j として決定される。

つぎに、一時的均衡の存在とその性質を示そう。(14), (16)式より、資本用役価格 π_0 は資本・労働比にのみ依存し、その減少関数であることが分る。すなわち、(14), (16)式を集約して、

$$(19) \quad \pi_0 = q(k), \quad \frac{dq}{dk} < 0$$

生産関数に関する仮定(15)式は、上に定義された関数 $q(k)$ がつぎの性質をもつことを意味する。

$$(20) \quad \lim_{k \rightarrow 0} q(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} q(k) = 0$$

(7)式と(13)式の両辺の比をとり、(7)式から $m_i/k = x_i/x_0$ であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} (21) \quad \pi_i + \mu_i &= \frac{qk + \sum \pi_j m_j}{k + \sum m_j} \\ &= qx_0 + \sum \pi_j x_j \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

したがって、

$$(22) \quad \pi_1 + \mu_1 = \pi_2 + \mu_2 = \dots = \pi_n + \mu_n$$

すなわち、(11)式の最初の式に依ると、貨幣 i の予想残高の成長率は $\pi_i + \mu_i - \rho$ であるから、(22)式はすべての貨幣の予想残高の成長率が均等することを意味する。いいかえれば、もし第 i 国の政府が第 j 国の政府よりも高い相対的発行率で、貨幣を供給するならば、すなわち、 $\mu_i > \mu_j$ ならば、貨幣 i と貨幣 j との間の予想為替レート、 $p_i e^{\pi_i s} / p_j e^{\pi_j s}$ は $\pi_i - \pi_j = \mu_j - \mu_i$ の率で下落すると予想される。

(22)式を用いて、最適資産保有比をただ一つの変数、 $r = q - \pi_1 - \mu_1$ のみの関数として表わそう。(3)式の3番目の式と(22)式により、

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(0, \pi_1 - q, \mu_1 - \mu_2 - q + \pi_1, \dots, \\ &\quad \mu_1 - \mu_n - q + \pi_1) \\ &= x_0(0, -\mu_1 - r, -\mu_2 - r, \dots, -\mu_n - r) \\ &\equiv \hat{x}_0(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q - \pi_1 - \mu_1 + \mu_i, -\mu_1 + \mu_i, \dots, \\ &\quad -\mu_i + \mu_i, \dots, -\mu_n + \mu_i) \\ &= x_i(r + \mu_i, -\mu_1 + \mu_i, \dots, 0, \dots, -\mu_n + \mu_i) \\ &\equiv \hat{x}_i(r) \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

上の定義から明らかなように、 $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ を、資本財および各貨幣の予想実質収益率の期待値が $(r, -\mu_1, \dots, -\mu_n)$ であると想定した場合の最適資産保有比の組とみなすことができる。さらに、 $i=1$ のときの(21)式を変数 r を用いて書きかえ

$$\begin{aligned} 0 &= (q - \pi_1 - \mu_1)x_0 + \sum (\pi_j - \pi_1 - \mu_1)x_j \\ (23) \quad &= r\hat{x}_0 - \sum \mu_j \hat{x}_j \end{aligned}$$

すなわち、変数 r の均衡値は、それぞれの貨幣の予想実質収益率が $(-\mu_1, -\mu_2, \dots, -\mu_n)$ であるとき、最適資産保有比 $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ からの所得の期待値をゼロにするような、資本財の予想収益の期待値である。もし(23)式にこのような解 r が存在するなら、それを r^* としよう。(23)式は明らかに貨幣の相対的発行率 $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ のみをパラメーターとする式であるから、解 r^* は $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ のみに依存する。すなわち、一時的均衡の軌跡を通じて、 r^* は不変であり、それゆえ、最適資産保有比 $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ も時点 t より独立である。換言すれば、貨幣・資本比、 $m_i/k = \hat{x}_i/\hat{x}_0$ は時間 t を通じて一定である。したがって

$$(24) \quad \frac{Dk}{k} = \frac{Dm_i}{m_i} = \frac{Dp_i}{p_i} + \mu_i - \rho, \quad i=1, 2, \dots, n$$

さらに、(7), (9), (18)式を考慮すると、

$$\begin{aligned} (25) \quad \frac{Dp_i}{p_i} + \mu_i &= \frac{Dk + \rho k}{k} = \frac{\Delta k(t, 0) + \rho k}{k} \\ &= \frac{qk + \sum \pi_j m_j}{k + \sum m_j}, \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

この式を(21)式と比較すると、

$$(26) \quad \pi_i = \frac{Dp_i}{p_i}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

すなわち、一時的均衡において実現される貨幣の価格変化率、 Dp_i/p_i は均衡予想変化率、 π_i に等しい。(22)式の含意を述べたとき、貨幣 i と貨幣 j との間の為替レートは $\mu_j - \mu_i$ の率で変化すると予想されると述べたが、(26)式の成立は、均衡為替レートが $\mu_j - \mu_i$ の率で変化することを意

味する。しかし、小論のモデルにおいては、均衡予想インフレーション率と均衡において実現されるインフレーション率とは等しくなったが、均衡予想形成の仮定がインフレーションの予想率と実現率との均等関係を常にもたらすとはかぎられないことを留意すべきである。さらに、しばしば仮定される静学的予想形成においても、(26)式が成立する、——正確に言えば、成立すると仮定される。しかし、(26)式は、均衡予想形成が静学的予想形成と同じものであることを意味しない。静学的予想形成においては、一時的均衡では価格は資本財の存在量などと同様に所与のパラメーターであり、価格変化率が一時的均衡において決定される変数である。他方、均衡予想形成においては価格水準とその予想変化率双方が決定されるべき変数である。

さて、今までは、一時的均衡が存在するものと仮定して、その性質を検討してきたが、最後に、一時的均衡の存在を示す。存在を証明するには、一変数 r に関する方程式である(23)式を満す解 r^* の存在を証明すれば十分である。なぜなら、もし解が存在することが明らかにされると、それに応じて、最適資産保有比の組 $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ が決定し、 $\pi_1 + \mu_1 = q(k) - r^*$ と(22)式からインフレーション率 $(-\pi_1, -\pi_2, \dots, -\pi_n)$ が定まる。さらに、 $\hat{x}_0(r^*) > 0$ ならば、(7)式の第1式より、総資産額 $k + \sum m_j$ が、そして、第2式より、それぞれの貨幣の実質残高 $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ が決定される。すなわち、もし $\hat{x}_0(r^*) > 0$ であるような(23)式の解 r^* が存在すると、このようにして、他のすべての変数の一時的均衡値が定まるからである。

以下、解 r^* の存在を示す。すでにのべたように、 $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ は、各資産の予想実質収益率の期待値が $(r, -\mu_1, -\mu_2, \dots, -\mu_n)$ であるときの最適資産保有比である。小論の付論の(A4)式によって、つぎのような r の2つの臨界値 $r_{\min}, r_{\max}$ が存在する。

$$(27) \quad \begin{aligned} &\text{任意の } r \leq r_{\min} \text{ に対して, } \hat{x}_0(r) = 0; \\ &\text{任意の } r \geq r_{\max} \text{ に対して, } \hat{x}_0(r) = 1. \end{aligned}$$

仮定 A4 における $\mu_j > 0 (j=1, 2, \dots, n)$ と、(3)式の最後の2式を考慮すると、(27)式は、

$$(28) \quad \begin{aligned} &\text{任意の } r \leq r_{\min} \text{ に対して,} \\ &r\hat{x}_0 - \sum \mu_j \hat{x}_j = -\sum \mu_j \hat{x}_j < 0 \end{aligned}$$

が成立することを意味する。他方, (27)式の第2式は,

$$(28') \quad \begin{aligned} &\text{十分大きい } r \text{ に対して} \\ &r\hat{x}_0 - \sum \mu_j \hat{x}_j = r > 0 \end{aligned}$$

が成立することを意味する。したがって, 上に述べた(28), (28')式により, (23)式の解 r^* が少なくとも一つ存在する。かつ, $r^* > r_{\min}$, すなわち, $\hat{x}_0(r^*) > 0$ である。なお, $x_i(r^*) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ が成立する保障はない。それゆえ, n 種類の貨幣のうちの一部の貨幣, あるいは, すべての貨幣について, それらの実質残高はゼロになるかもしれない。

特殊な仮定「個々の資産の予想収益率は無相関である」を仮定して, 貨幣の相対的発行率と均衡実質残高の関係を検討しよう。貨幣 i の予想実質収益率の分散を c_i とする。また, $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ となるように, 貨幣は付番されているとする。 $\hat{x}_i$ は貨幣の実質収益率の期待値が $-\mu_i$ であると想定したときの最適資産保有比であるから, 付論の(A1)式により, $\hat{x}_i$ はつぎの式を満足しなければならない。

$$(29) \quad \begin{aligned} &-\mu_i - \beta c_i \hat{x}_i \leq \theta, \quad r - \beta c_0 \hat{x}_0 \leq \theta \\ &(\mu_i + \beta c_i \hat{x}_i + \theta) x_i = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

それゆえ, $\hat{x}_j > 0$ ならば,

$$(30) \quad \theta = -\mu_j - \beta c_j \hat{x}_j < -\mu_j \leq -\mu_i, \quad i=1, 2, \dots, j$$

したがって, (29), (30)式により,

$$(31) \quad \hat{x}_j > 0 \text{ ならば, } \hat{x}_i > 0, i=1, 2, \dots, j$$

すなわち, (7)式を考慮すると, つぎのように結論される。各貨幣の予想インフレーション率が相互に無相関であり, かつ, 資本財の予想収益率とも無相関であるときには, もしある国の貨幣の均衡実質残高が正(ゼロ)であるならば, その貨幣より低い(高い)相対的発行率で供給される貨幣の均衡実質残高は正(ゼロ)である。さらに, つぎのことがいえる。(23)式を考慮すると, (29)式より, $r=r^*$ において,

$$(32) \quad \theta = -\beta[c_0 \hat{x}_0 + \sum c_j \hat{x}_j] < 0$$

が成立する。したがって, (29)式により,

$\hat{x}_i > 0, \hat{x}_j > 0$ なる (i, j) について,

$$(33) \quad \frac{\mu_i}{c_i} \leq \frac{\mu_j}{c_j} \text{ かつ } c_i \leq c_j \text{ ならば, } \hat{x}_i \geq \hat{x}_j.$$

すなわち, 上の不等式を二つの貨幣の相対的発行率と予想インフレーション率の分散が満すならば, 均衡実質残高の比率, $m_i/m_j = \hat{x}_i(r^*)/\hat{x}_j(r^*)$, は1より大きい。以上の主張では, 少なくとも1つの貨幣の均衡実質残高が正であることが仮定されている。最後に, この仮定が満足されるための条件は

$$(34) \quad \mu_1 < \beta c_0$$

であることを示す。定義により, $r_{\min}$ は $\hat{x}_0(r)$ が正からゼロになる臨界値であること, および, 付論の(A3)式により, $r > r_{\min}$ なる r に対しては $\hat{x}_0(r) > 0$ である。したがって(29)式を操作して (35) $-\beta(c_i x_i + c_0 \sum x_j) \leq r + \mu_i - \beta c_0 \quad i=1, 2, \dots, n$ ゆえに, $r > \beta c_0 - \mu_i$ なる r と i に対しては, (35)式は不等号でのみ成立し, $\hat{x}_i(r) = 0$ である。定義により, $r_{\max}$ は $\hat{x}_0(r)$ が $\hat{x}_0(r) < 1$ から $\hat{x}_0(r) = 1$ になる臨界値である。(31)式により, 最も低い相対的発行率の貨幣1の実質残高が最後にゼロとなる。したがって, $r_{\max} = \beta c_0 - \mu_1$ である。 $r = r_{\max}$ において, $r\hat{x}_0 - \sum \mu_j \hat{x}_j = r_{\max} > 0$ であることは, (27), (28'), (34)式より明らかである。それゆえ, $r^* < r_{\max}$, すなわち, $\hat{x}_1(r^*) > 0$ である。すなわち, (34)式は, いかなる一時的均衡においても少なくとも1つの貨幣の均衡実質残高が正であるための必要十分条件である。

§5 均斉成長的均衡

前節において, 一時的均衡の存在とその若干の性質を検討した。つぎに, 一時的均衡の軌跡の均斉成長的均衡への収束を考察する。すでに示したように, (23)式の解 r^* は存在し, 各貨幣の相対的発行率に依存し, 時間を通じて一定である。もし解が複数存在する場合には, r^* はこれらの解の1つに固定されているとする。

一時的均衡においては, 資本蓄積方程式(17)を(18')式で代置できる。したがって, (7)(23)および, 定義式 $r = q - \pi_1 - \mu_1$ を考慮すると,

$$(36) \quad \begin{aligned} \frac{Dk}{k} + \rho &= q(k) - \sum \mu_j \frac{\hat{x}_j}{\hat{x}_0} \\ &= q(k) - r^* = \pi_1(k) + \mu_1 \end{aligned}$$

ゆえに, (20)式によりつぎのことが明らかである。

(23)式のある解 r^* について、 $\rho + r^* > 0$ ならば、 r^* に対応して均斉成長的均衡 $k(r^*)$ がただ 1 つ存在し、それは安定である。したがって、 $\rho + r^* > 0$ を満す解 r^* の数と同数の均斉成長的均衡が存在する。また、(22)、(36)式から明らかなように、均斉成長均衡においては、

$$(37) \quad \rho = \pi_i + \mu_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

である。さらに、 $\pi_i(k) + \mu_i = q(k) - r^*$ であるから、(20)式により、資本・労働比率の初期値が均斉成長的均衡値 $k(r^*)$ より小さい場合には、時間と共に $\pi_i(k)$ が減少すること、すなわち、インフレーション率、 $-\pi_i$ が上昇することが分る。初期値が均衡値より大きい場合には、逆である。

他方、 $\rho + r^* \leq 0$ なる解 r^* に対しては、有界な均衡値 $k(r^*)$ は存在せず、 $k(r^*) = \infty$ である。この場合にも、(36)式から分るように、時間と共に資本・労働比率が増大しつづけるという意味で安定である。

最後に、前節の後半部における同じように、予想インフレーション率相互、および、資本財の予想収益率との間には相関がないと仮定して、すべての解 r^* に対応して均斉成長的均衡が存在するための十分条件は

$$(38) \quad \rho > \mu_1 + \beta c_1$$

であることを示す。 $r = r_{\min}$ においては、 $\hat{x}_1 > 0$ であるから、 $r - \beta c_0 x_0 \leq \theta = -\mu_1 - \beta c_1 x_1$ である。ゆえに、 $r \leq -\mu_1 - \beta c_1$ なる r に対しては、 $\hat{x}_0(r) = 0$ 、すなわち、 $-\mu_1 - \beta c_1 \leq r_{\min}$ である。前節で示したように、 $r^* > r_{\min}$ であるから、 $-\mu_1 - \beta c_1 < r^*$ である。したがって、もし(38)式が成立するならば、 $\rho + r^* > 0$ であり、均斉成長的均衡はすべての解 r^* に対して存在する。

§6 むすび

小論の最初に述べたように、もし予想インフレーション率の適応的形成を仮定するならば、適応速度係数が十分小さくない限り、均衡成長的均衡は不安定である。しかし、小論において示されたように、均衡予想形成の仮定のもとでは、一時的均衡の軌跡は均斉成長的均衡に収束する。均衡予想形成は近い将来の市況に関する情報を必要とす

るのであるから、もしこの種の必要な情報が十分に利用可能でない状態においては、自由変動為替レート制度のもとで国際経済の安定を確保するためには、近い将来の市況についての情報を供給するような制度の確立、ないし、政策が必要である。もしこのような情報の入手が不十分か、または不可能である場合には、均衡予想形成に従って資産保有者がインフレーション率を予想することは十分にできず、過去の価格の動向に基づいて予想を形成する度合が高まるであろう。それに応じて自由変動為替レート制の国際経済の均斉成長的均衡が不安定になる度合が増すであろう。

小論で設定されたモデルは非常にナイーブなモデルであるが、均衡予想形成の仮定のもとにおける、国際経済の均斉成長的均衡の安定性を示した。しかし未解決な問題として、近い将来の資産市場の市況についての情報を資産保有者に供給する制度はどのようなものであるかという問題がある⁴⁾。

§ 付論

本論で仮定された資産保有者の行動は Mossin [2] その他多くの論文において定式化されている。この付論においては、本論で必要とされる最適資産保有計画の性質が示される。

仮定により、ある時点から将来時点 T までの計画期間をもつ資産保有計画問題はつぎのような確率的最適化問題である⁵⁾。

$$\frac{\Delta a(s)}{a(s)} = \mathbf{z}' \mathbf{x}(s) + \mathbf{x}'(s) \mathbf{A} \mathbf{u}(s)$$

$$a(0) = a_0, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{h}' \mathbf{x} = 1$$

の条件のもとで

$$E[a(T)^{1-\beta}] / 1 - \beta$$

を最大にするように、資産保有比 $\mathbf{x}(s)$ を決定する、 $(0 \leq s \leq T)$ 。ただし、

$\mathbf{z}$ = 資産の予想収益率の期待値のベクトル

$\mathbf{u}$ = 正規分布している確率変数のベクトルで、

$$E\mathbf{u}(s) = \mathbf{0}, \quad E\mathbf{u}(s)\mathbf{u}(s)' = \mathbf{I}, \quad \text{かつ、} s \neq \tau \text{ なら}$$

4) 近い将来の資産市場の市況についての情報供給の仕方として、先物市場の機能を考えることができるかもしれない。しかし、そのためには、インフレーション率の予想形成と先物市場での価格形成との関連を明確にする必要がある。

5) 付論では、暦上の時点を示す記号 t を省略する。

らば $Eu(s)u(\tau)'=0$ を満す

E =期待値作用素

$C=AA'$, $h'=(1, 1, \dots, 1)$, $0<\beta<1$

しばしば用いられる確率制御原理によって、最適性の条件はつきようになる⁶⁾。

$$z \frac{\partial V}{\partial a} + a C x \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} \leq \lambda h$$

$$z' x \frac{\partial V}{\partial a} + a x' C x \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \lambda$$

$$x \geq 0, \quad h' x = 1$$

$$V(a, T) = \frac{a(T)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

この条件を満す解として、 $V(a, s) = \frac{b(s)a^{1-\beta}}{1-\beta}$

を適用すると、上の条件はつぎのようになる。

$$(A1) \quad \begin{cases} z - \beta C x \leq \theta h \\ z' x - \beta x' C x = \theta \\ x \geq 0, \quad h' x = 1, \end{cases}$$

しかし、 $\theta = \frac{\lambda a^\beta}{b}$

$$(A2) \quad \begin{cases} b(T) = 1 \\ \frac{\beta}{1-\beta} \frac{db}{ds} + \left[\beta z' x - \frac{\beta^2}{2} x' C x \right] b = 0 \end{cases}$$

(A1)式を満すように、最適資産保有比 x と乗数 θ が決定される。したがって、 (x, θ) は時点 s から独立である—(近視性)。

資産収益率の期待値ベクトルが z から $z + \alpha h$ に変化したと想定しよう。ここで、 α はスカラーである。(A1)式から容易に分るように、最適保有ベクトル x は不変であり、乗数だけが θ から $(\theta - \alpha)$ に変化する。したがって、最適保有比 x は期待収益率ベクトル z の要素の差のみに依存する。

時点 s から独立に、 (x, θ) が決定されると、(A2)式の解 $b(s)$ が見い出される。解はつぎのようになる。

$$b(s) = \exp \gamma (1-\beta) (T-s)$$

ただし $\gamma = z' x - \frac{\beta}{2} x' C x$

(A1)式の解ベクトル x はつぎの最大化問題の最適解ベクトルと同じであることは自明である。

6) この最適化問題の解法については、Merton [1] を参照せよ。

すなわち、

$h' x = 1$ の条件のもとで

$$z' x - \frac{\beta}{2} x' C x$$

を最大にするように、ベクトル x を決定する。

2つの期待収益率ベクトル z と $\bar{z}$ を想定しよう。ただし、 $z \neq \bar{z}$ 。 z に対応する最適解ベクトルを x 、また、 $\bar{z}$ に対応するものを $\bar{x}$ とすると、つぎの不等式が成立する。

$$z' x - \frac{\beta}{2} x' C x > z' \bar{x} - \frac{\beta}{2} \bar{x}' C \bar{x}$$

$$\bar{z}' \bar{x} - \frac{\beta}{2} \bar{x}' C \bar{x} > \bar{z}' x - \frac{\beta}{2} x' C x$$

したがって、2つの不等式から

$$(A3) \quad (z - \bar{z})' (x - \bar{x}) > 0$$

すなわち、他の資産の期待収益率が不変であるとき、 x_i は z_i と共に増加する。さらに、(A1)式からつぎのことが明らかである。十分小さい z_i に対しては $x_i = 0$ 、十分大きい z_i に対しては $x_i = 1$ である。すなわち、他の期待収益率が不変であるとき、 z_i の2つの臨界値 $z_{i\min}$ と $z_{i\max}$ が存在し

$$(A4) \quad \begin{cases} z_i \leq z_{i\min} \text{ ならば } x_i = 0 \\ z_{i\min} < z_i < z_{i\max} \text{ ならば } 1 > x_i > 0 \\ z_{i\max} \leq z_i \text{ ならば } x_i = 1 \end{cases}$$

が成立する。

(東北大学経済学部)

引用文献

- [1] Merton, R. C., "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: the Continuous Case," *Review of Economics and Statistics*, August 1969.
- [2] Mossin, J., "Optimal Multiperiod Portfolio Policies," *Journal of Business*, April 1968.
- [3] Nagatani, K., "A Note on Professor Tobin's 'Money and Growth'," *Econometrica*, January 1970.
- [4] Samuelson, P. A., "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming," *Review of Economics and Statistics*, August 1969.
- [5] Sidrauski, M., "Inflation and Economic Growth" *Journal of Political Economy*, December 1967.
- [6] —, "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy," *American Economic Review*, May 1967.
- [7] Tobin, J., "Money and Economic Growth," *Econometrica*, October 1965.