多重共線性について

根　津　永　二

I

1.1　多重共線性(Multicollinearity)の問題は不定識別(underidentification)の問題とともにからみ合いの分析(confluence analysis)と呼ばれている問題の1つの例であり，それは説明変数間に線型の関係が存在する場合に起きる。周知のように多重共線的説明変数を同時に含む体系では，説明変数の個々の係数は正確には推定できなくなり，分散を有意に減少させることなしに自由度を減ずる結果となる。

本稿は (1) 多重共線的説明変数を含む体系での係数間の関係及び係数の動きと，(2) 説明変数間の相関係数の程度と推定係数の安定性の問題を取り扱う。(1) については，まず R. Frish のいわゆる degradation effect を問題にする。そこでは一般化された逆行列(generalized inverse)を用いて多重共線的体系を分析し，degradation effect とは多重共線体系での推定係数の動きについての1つの特別な例でしかないことを示す。つづいて，相関度の高い2説明変数を含む数値例から得られる推定係数が，一般化された逆行列を用いて導出した係数間の関係を近似的に満たしていることを示す。(2)については，モンテカルロ実験の方法を用いて説明変数(2変数の場合)間の相関度が強まるにつれて分散が大きくなり，係数の安定性が失われていくことを示す。

以下，**1.2** では次節での説明の便宜上，若干の introduction を行う。次に節を改め，第II節で R. Frish の degradation effect と一般化された逆行列について，第III節では多重共線的体系に於ける係数間の関係を分析し，第IV節でモンテカルロ実験の結果を示す。

1.2　R. Frish [1] は多重共線的体系での係数間の関係あるいは係数の動き等の問題を線束図(bunch map)を用いて体系的に分析した。彼によれば各観察値 x_{it} $(i=1, \cdots, n)$ はいくつかの基礎変数(basic variable) c_{it} $(i=1, \cdots, m)$ によって

$$x_{it}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{jt} \quad (i=1, \cdots, n)$$

のように表わされる。この c_{it} はさらにつぎのように分類される。即ち，2つ以上の観察値にあらわれ，変数 x_{it} $(i=1, \cdots, n)$ 間の相互依存関係にシスティマティックな影響を与えるシスティマティックな部分及び1つの観察値にのみあらわれ，x_{it} の変動に対して外的かつ偶然的な影響を与える，いわゆる攪乱項(disturbance)である。したがって x_{it} はシスティマティックな部分 x_{it}' と攪乱項 x_{it}'' とによって

$$x_{it}=x_{it}'+x_{it}'' \quad (i=1, \cdots, n;\ t=1, \cdots, T)$$

のように表わされることになる。

いまシスティマティックな部分 x_{it}' のあいだに次の関係があるとしよう。

$$x_{1t}'=\alpha_2 x_{2t}'+\cdots+\alpha_n x_{nt}' \quad (t=1, \cdots, T)$$

このとき x_{it}' $(i=2, \cdots, n)$ のあいだに線型関係が成立しているならば，積率行列が singular となるためパラメター $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は推定不可能となる。しかしながら実際には真の値 x_{it}' を知ることはできず，われわれはただ観察値 x_{it} を知っているにすぎないのであり，x_{it}' $(i=2, \cdots, n)$ 間に存在するかもしれない多重共線関係が観察値を構成する攪乱項によって不明瞭にされてしまうために，かえってパラメター $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が推定されうることになる。しかしながら，この場合には，パラメターとバリアンスを決定しているものは攪乱項に他ならないということになる。

単一方程式に於て説明変数間の「完全な」相関はそれほど重大ではない。というのは「完全な」相関は殆んど起りえないし，仮に起ったとしてもその場合には「完全に」相関している変数を除去することができるからである。問題は完全ではないが高い相関関係にある変数を含む場合である。このときはパラメターが攪乱項によって決定され，意味のない値を取ることになる可能性が高い。線束図法はこの問題を処理するために提案されたのであるが，方法論的に主観性が強いことが1つの難点である。

多重共線性の問題は変数及び方程式に含まれる誤差項の問題，計測誤差を含む場合の推定の問題と密接に関係しており，G. Tintner, T. Koopmans, P. Hsu, T. Haavelmo 等によって分析されている。就中，Haavelmo [2] は問題をたくみに要約し「からみ合いの分析」の他の側面である，不定識別の問題をもあわせて指摘した。

II

2.1　本節では Frish の degradation effect を扱う。

回帰分析に於て，説明変数の数を増してゆくにつれて，システィマティックな部分が相互に相関していくようになり，システィマティックな部分に多重共線関係がでてくる。このような状態では回帰係数はさきにも述べたように，攪乱項によって決定されることになるが，Frish はこのとき係数に degradation effect が生じることを指摘した[1]。degradation effect とは説明変数を増していくにつれて共線関係がでてくれば，回帰係数が元の説明変数が少なくフィットが悪かったときの係数の値に再び戻るという現象を指して云う。Frish は次のような例を用いてこの現象を説明している。

いま 4 個の観察値 $x_{it}(i=1,\cdots,4)$ が次のように 6 個の基礎変数 $y_j(j=1,\cdots,6)$ の線型結合として表わされるとする。

$$\begin{aligned} x_1&=y_1+0.1y_3\\ x_2&=y_2+0.1y_4\\ x_3&=y_1+y_2+0.1y_5\\ x_4&=y_1-y_2+0.1y_6 \end{aligned}$$

ここに y_1 及び y_2 はシスティマティックな部分，y_3, y_4, y_5 及び y_6 は攪乱項であり，各 y_i は乱数表からの無作為抽出によって作られたものであり，相互に独立であり，$N(0,1)$ に分布している。攪乱項を除けば (x_1, x_2, x_3, x_4) のうち任意の 3 つの x_i は相互に線型の関係にある。たとえば $x_1=x_2+x_4$ であり，また，$x_1=-x_2+x_3$ である。したがってこれら 4 つの変数をすべて含む回帰分析，たとえば，$x_1=\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+u$ は無意味であり，積率行列の singularity によって係数推定の作業は不可能となる。しかし実際には，各 y_i は完全には独立ではないから説明変数は完全な線型関係にはなく，ために上の回帰分析は可能となる[2]。さて，上の 4 つの変数について，回帰分析の組合せ $(x_1;x_2)$, $(x_1;x_2,x_4)$ 及び $(x_1;x_2,x_3,x_4)$ を考えて，x_2 のそれぞれの場合の係数を b_{12}, $b_{12\cdot4}$, 及び $b_{12\cdot34}$ としよう。このとき $y_i(i=1,\cdots,6)$ のある標本を用いて，各係数が

$$\begin{aligned} b_{12}&=-0.12\\ b_{12\cdot4}&=0.919\\ b_{12\cdot34}&=-0.112 \end{aligned}$$

となったとしよう。一見して明らかなように $b_{12\cdot34}=-0.112$ は，再びはじめの b_{12} の値に戻っているわけであり，この現象が degradation effect と云われるものである。係数 b_{12} の値が -0.12 となっているが，攪乱項を除いた場合の真の値は，y_1 と y_2 とが独立であることからも明らかなように零である。$b_{12\cdot34}$ の真の値も行列の singularity によって一見計算不可能のようであるが，実は零である。(この点は後に示す。)

上記の分析では degradation effect が起きるということは単に数値例をもって示されたにすぎない。では共線体系での係数が変数が少なくフィットが悪かったときの値に戻るという意味の degradation effect についての主張は一般的に成立するだろうか。

2.2　いま攪乱項 $y_3,\cdots,y_6$ を除いて，x_1, x_2, x_3 及び x_4 の真の相関係数を計算すれば

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ & 1, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ & & 1, & 0\\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

のようになる。容易にわかるように推定係数 b に関する真の値は

$$b_{12}=0,$$

$$b_{12\cdot4}=\sqrt{2}\quad(\text{ちなみに，}\ b_{12\cdot3}=-\sqrt{2}\,)$$

$b_{12\cdot34}$ は行列の singularity によって通常は計算不可能であるが，次に述べる一般化された逆行列の考え方を適用することによって $b_{12\cdot34}=0$ であることが示される。(**2.3** 参照) すなわち Frish のいう degradation effect がここでも起きていることがわかる。しかしながら，これは y_1 と y_2 の相関係数が零であるということから生じた結果であり，もしも y_1 と y_2 との相関係数 ρ が零でない場合にはこの種の degradation effect は生じないのである。(このことは **2.4** に於て示される。)

2.3　任意の行列 **A** の一般化された逆行列は次の 4 つの式によって一意的に定義される。

$$\begin{aligned} &(\text{P. I}) && \mathbf{AA^+A}=\mathbf{A}\\ &(\text{P. II}) && \mathbf{A^+AA^+}=\mathbf{A^+}\\ &(\text{P. III}) && \mathbf{AA^+}=(\mathbf{AA^+})^*\\ &(\text{P. IV}) && \mathbf{A^+A}=(\mathbf{A^+A})^* \end{aligned}$$

もしも **A** が square かつ non-singular であれば $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^{-1}$ である。ここに $*$ は転置を意味する。

回帰分析 $(x_1;x_2,x_3,x_4)$ に於ては，パラメターは，

$$\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\,, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & 1, & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 1 \end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

1)　文献 [1]，pp 79～83

のように求められる。ことわるまでもなく相関係数行列(これを $\mathbf{R}$ とする)は singular であるが，その一般化された逆行列 $\mathbf{R}^+$ は

$$\mathbf{R}^+=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}, & \frac{\sqrt{2}}{8}, & -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ \frac{\sqrt{2}}{8}, & \frac{5}{8}, & \frac{3}{8} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8}, & \frac{3}{8}, & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

となる。(この $\mathbf{R}^+$ は先の4つの性質を満たしている。)

したがって，$b_{12\cdot34}(=\alpha_2)=0$, $\left(\alpha_3=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_4=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であることがわかる。

2.4　ここで y_1 と y_2 の相関係数を ρ として Frish の主張が一般的に成立するかどうか検討してみよう。このとき4つの変数間の相関行列は

$$\begin{bmatrix} 1, & \rho, & \frac{1+\rho}{\sqrt{2(1+\rho)}}, & \frac{1-\rho}{\sqrt{2(1-\rho)}} \\ & 1, & \frac{1+\rho}{\sqrt{2(1+\rho)}}, & \frac{\rho-1}{\sqrt{2(1-\rho)}} \\ & & 1\ , & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

のようになり，説明変数 (x_2, x_3, x_4) 間の相関行列 $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1, & \frac{1+\rho}{\sqrt{2(1+\rho)}}, & \frac{\rho-1}{\sqrt{2(1-\rho)}} \\ & 1\ , & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

となる。この行列は singular であるが，先の4つの性質を満たす一般化された逆行列 $\mathbf{R}^+$ は

$$\mathbf{R}^+=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}, & \frac{\sqrt{2(1+\rho)}}{8}, & -\frac{\sqrt{2(1-\rho)}}{8} \\ & \frac{5-3\rho}{8}, & \frac{3\sqrt{(1-\rho)(1+\rho)}}{8} \\ & & \frac{5+3\rho}{8} \end{bmatrix}$$

のように求めることができる。したがって一般化された逆行列を用いた推定係数は

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}=[\mathbf{R}^+]\begin{bmatrix} \rho \\ \frac{1+\rho}{\sqrt{2(1+\rho)}} \\ \frac{1-\rho}{\sqrt{2(1-\rho)}} \end{bmatrix}$$

となり，回帰方程式は

$$x_1=\frac{1}{2}\rho x_2+\frac{\sqrt{2(1+\rho)}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\rho\right)x_3+\frac{\sqrt{2(1-\rho)}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\rho\right)x_4$$

のように表わされる。$\rho=0$ のときには，**2.3** で導出された結果と同じになる。しかしながらここでは $b_{12\cdot34}=\frac{1}{2}\rho$ であり，容易にわかるように $b_{12}=\rho$ であるから，$\rho=0$ のときの $b_{12\cdot34}\to b_{12}$ という degradation effect が $\rho\neq0$ という一般的な場合には成立しないことがわかる。

III

3.1　筆者は文献 [3] に於て，一般化された逆行列を用いて，多重共線問題を分析した。そこでは，はじめの m 個の説明変数 $(x_{1t}, \cdots, x_{mt})$ が完全に相関していて(相関係数が1であり)他のすべての説明変数 $(x_{m+1t}, \cdots, x_{nt})$ とはじめの m 個の説明変数のうちの1個，たとえば x_{mt} は独立な観察値であるような体系をあつかい，一般化された逆行列を用いた場合にえられる G-I 最小自乗推定値(generalized inverse least square estimator)についてのいくつかの性質について述べたが3)，同時に独立な説明変数体係 $(x_{mt}, x_{m+1t}, \cdots, x_{nt})$ で推定された係数と，共線関係にある変数を含む体系 $(x_{1t}, \cdots, x_{mt}, x_{m+1t}, \cdots, x_{nt})$ で推定された係数とのあいだには次のごとき関係があることを明らかにした。

(I)　独立な説明変数の体系での変数 x_{mt} の係数 α は共線的な体系で x_{mt} と完全に相関している変数の係数 $\alpha_i(i=1, \cdots, m)$ の合計に等しい。即ち，

$$\hat{\alpha}=\sum_{i=1}^{m}\hat{\alpha}_i$$

(ここでは変数はすべて正規化されている。したがって

---

2)　この体系のシスティマティックな部分のみを考慮した場合の各 x_i の真の相関係数は **2.2** に示されている。また $y_1\sim y_6$ がすべて考慮され，かつ相互に完全に独立な場合の相関係数は

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2.0301}}, & \frac{1}{\sqrt{2.0301}} \\ & 1, & \frac{1}{\sqrt{2.0301}} & -\frac{1}{\sqrt{2.0301}} \\ & & 1\ , & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

である。しかし $y_1\sim y_6$ はわずかながら実際には相関しているが，その場合には，

$$\begin{bmatrix} 1, & -0.122, & 0.657, & 0.753 \\ & 1\ , & 0.658, & -0.733 \\ & & 1\ , & 0.0144 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

3)　①**G-I** 回帰法によって計算された $\hat{y}_t$ (y_t は被説明変数)は最大個数の独立の観察値を含む体系 $(x_{mt}, x_{m+1t}, \cdots, x_{nt})$ で得られた $\hat{y}_t$ に等しい。② $\sum_{t=1}^{T}\hat{y}_t y_t=\sum_{t=1}^{T}(\hat{y}_t^2)$ かつ③ $R^2_{y\cdot12\cdots n}=R^2_{y\cdot m\cdot m+1\cdots n}$

正規化されていない変数の場合には上式のそれぞれの係数に適当な標準偏差を乗じて修正しておく必要がある。)

（II） 共線関係にある説明変数の係数は等しい。即ち,

$$\hat{\alpha}_k=\sum_{i=1}^{m}\hat{\alpha}_i/m=\hat{\alpha}/m \quad (k=1, \cdots, m)$$

3.2 さて，実際の経済のデーターを使って，**3.1** で展開した共線体系での係数間の関係を分析しよう。ここでも 4 つの変数を扱うが[4]，それらの変数間の相関係数は

$$\begin{bmatrix} 1, & 0.97, & 0.33, & 0.98 \\ & 1\ , & 0.17, & 0.997 \\ & & 1\ , & 0.15 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

である。明らかに x_2 と x_4 は高い相関関係にある。実際

$$(3.1)\quad \underset{}{x_4=\underset{(0.0168)}{0.6873}x_2+\underset{(2.5848)}{4.3803}} \qquad R^2=0.9946$$

ここで Frish の degradation effect についてもあわせて分析しておこう。そのためにまず x_1 と相関が低い変数 x_3 を選び，x_3 の係数が変数 x_2 及び x_4 が追加され，体系が多重共線的になっていくときにどのように変るかを見ておこう。x_1 を x_3 に回帰した場合の回帰式は

$$(3.2)\quad x_1=\underset{(1.0868)}{1.1441}x_3+\underset{(3.0816)}{14.3266} \qquad R^2=0.1146$$

である。ここで変数 x_2 あるいは x_4 を(3.2)式に追加すると，

$$(3.3)\quad x_1=\underset{(0.2008)}{0.5944}x_3+\underset{(0.0092)}{0.1496}x_2-\underset{(1.4268)}{6.9551} \qquad R^2=0.9672$$

あるいは，

$$(3.4)\quad x_1=\underset{(0.1534)}{0.6388}x_3+\underset{(0.0102)}{0.2179}x_4-\underset{(1.1338)}{8.0552} \qquad R^2=0.9846$$

となる。

次に，変数 x_4 を方程式(3.3)(あるいは変数 x_2 を方程式(3.4))にさらに追加すると

$$(3.5)\quad x_1=\underset{(0.1392)}{0.3652}x_2+\underset{(0.1552)}{0.6722}x_3-\underset{(0.0961)}{0.1024}x_4-\underset{(1.2643)}{8.6719} \qquad R^2=0.987$$

上の例では $b_{13}=1.1441$, $b_{13\cdot2}=0.5944$, $b_{13\cdot4}=0.6388$ 及び $b_{13\cdot24}=0.6722$ である。したがってこの例では $b_{13\cdot24}$ は多重共線的となるにもかかわらず，b_{13} と等しくなる傾向はなく，Frish の云う意味での degradation effect は生じていない。逆に，$b_{12}=\rho$ から $b_{12\cdot34}=\frac{1}{2}\rho$ へということから示唆された動きをしていることがわかる。(もちろんこの例のデータは正規化されていないから，標準偏差を乗じて修正する必要がある。)むしろ共線的な体系では Frish の degradation effect は生ぜず **3.1** で展開された(I)及び(II)の性質を満たすような係数の動きがある。それを同じデータを用いて示しておきたい。

3.3 まず次の 3 つの回帰方程式を追加しておく。

$$(3.6)\quad x_1=\underset{(0.0124)}{0.1542}x_2-\underset{(1.9041)}{6.0768} \qquad R^2=0.945$$

$$(3.7)\quad x_1=\underset{(0.0169)}{0.2245}x_4-\underset{(1.8605)}{7.0750} \qquad R^2=0.9513$$

$$(3.8)\quad x_1=\underset{(0.2451)}{0.2508}x_4-\underset{(0.1689)}{0.01817}x_2-\underset{(2.1816)}{7.1754} \qquad R^2=0.9514$$

高い相関関係にある変数 x_2 及び x_4 を同時に含む共線的体系では係数は安定的ではなく，符号条件を満たさない場合も起きる。

$b_{14}=0.2245$	$b_{12}=0.1542$
$b_{14\cdot3}=0.2179$	$b_{12\cdot3}=0.1496$
$b_{14\cdot2}=0.2508$	$b_{12\cdot4}=-0.0187$
$b_{14\cdot23}=-0.1024$	$b_{12\cdot34}=0.3657$

このとき b_{14} または $b_{14\cdot3}$ から共線体系に於ける係数 $b_{14\cdot2}$ または $b_{14\cdot23}$ への変化，同様に b_{12} または $b_{12\cdot3}$ から $b_{12\cdot4}$ または $b_{12\cdot34}$ への変化は **3.1** で述べた係数に関する命題に従って動くことがわかる。まず係数 $b_{12}(=0.1542)$ が x_4 を加えることによって $b_{12\cdot4}=-0.0187\,(b_{14\cdot2}=0.2508)$ に変化することについては，次の関係式が成立する。

$$b_{14\cdot2}\times\left(\frac{s_2}{s_4}\right)+b_{12\cdot4}=b_{12}$$

$$b_{14\cdot2}+b_{12\cdot4}\times\left(\frac{s_4}{s_2}\right)=b_{14}.$$

(ここに s_2 及び s_4 は x_2 及び x_4 の標準偏差であり，$s_2/s_4=0.68737$ である。)実際，数値を入れると，

$$0.2508\times0.68737-0.01817=0.1542\,(\fallingdotseq b_{12}\equiv0.1542)$$

$$0.2508-0.01817\times\frac{1}{0.68737}=0.2244\,(\fallingdotseq b_{14}\equiv0.2245)$$

(3.5)式についてもこのことは成立する。

$$b_{12\cdot34}\times\left(\frac{s_2}{s_4}\right)+b_{14\cdot23}=b_{12\cdot3}$$

$$b_{12\cdot34}+b_{14\cdot23}\times\left(\frac{s_4}{s_2}\right)=b_{14\cdot3}$$

であるから，数値例では，

$$0.3657\times0.68737-0.1024=0.1490\,(\fallingdotseq b_{12\cdot3}\equiv0.1496)$$

$$0.3657-0.1024\times\frac{1}{0.68737}=0.2167\,(\fallingdotseq b_{14\cdot3}\equiv0.2179)$$

---

4) このデータは文献 [4] p 17 のものである。(x_1=輸入，x_2=粗国民所得，x_3=資本形成，x_4=消費，フランスの 1949 から 1959 までの年データ)

* 本稿の草稿に有益なコメントを寄せられた久我清氏(大阪大学)に謝意を表わしたい。

α_1:

	$r=.5$	$r=.9$	$r=.95$	$r=.98$	$r=.99$
Bias:					
$T=100$	-0.0364	-0.0580	-0.0749	-0.1085	-0.1465
$T=20$	0.0069	-0.0042	-0.0105	-0.0222	-0.0349
Standard error:					
$T=100$	0.0879	0.1534	0.2059	0.3109	0.4295
$T=20$	0.3369	0.4888	0.6236	0.8996	1.2147
Root mean square error:					
$T=100$	0.0951	0.1640	0.2191	0.3293	0.4538
$T=20$	0.3370	0.4888	0.6237	0.8999	1.2152
$T\times$Mean square error					
$T=100$	0.9050	2.6900	4.8010	10.8420	20.5890
$T=20$	2.2710	4.7780	7.7800	16.1950	29.5330

α_2:

	$r=.5$	$r=.9$	$r=.95$	$r=.98$	$r=.99$
Bias:					
$T=100$	0.0138	0.0404	0.0583	0.0927	0.1311
$T=20$	0.0233	0.0278	0.0328	0.0433	0.0554
Standard error:					
$T=100$	0.0996	0.1639	0.2160	0.3206	0.4389
$T=20$	0.2327	0.3849	0.5226	0.8020	1.1192
Root mean square error:					
$T=100$	0.1005	0.1639	0.2237	0.3337	0.4581
$T=20$	0.2338	0.3859	0.5236	0.8032	1.1205
$T\times$Mean square error					
$T=100$	1.010	2.8510	5.0060	11.1360	20.9850
$T=20$	1.0930	2.9780	5.4840	12.9030	25.1120

IV

4.1 この節では多重共線体系についてのモンテカルロ実験の結果を示しておく。Frish が述べているように多重共線性の問題は説明変数の数が増加するにつれてあらわれ，またやっかいな問題ともなるのであるから，以下で述べる説明変数の数が2というのはいささか単純にすぎるわけであるが，それでも共線的な体系であらわれる現象，即ち，説明変数間の相関度が高くなるにつれて係数の安定性が失われるということは確かめられる。さて，この実験ではすべてのデータは $N(0,1)$ で分布しているランダム変数をテープから引きだすことによって作られている。2つの説明変数はその相関係数が 0.5, 0.9, 0.95, 0.98 及び 0.99 になるように作られている。

$$x_1=e_1+\alpha e_2$$
$$x_2=\alpha e_1+e_2$$

e_1 及び e_2 は $N(0,1)$ で相互に独立に分布しており Frish の用語でいえばシスティマティックな部分を作っている。内生変数は

$$y=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+u \qquad u\sim N(0,1)$$

として作られており，$\alpha_1=2$, $\alpha_2=5$ である。サンプルサイズはスモール・サンプル・ケースでは 20($T=20$)，ラージ・サンプル・ケースでは 100($T=100$)，くり返しはいずれのケースについても 50 回である。また初期値のインパクトの効果を小さくするために 150 個のサンプルを作り，はじめの 50 サンプルは採用していない。

結果は上の表にまとめたが，ほとんど付加的説明を要しないと思う。Bias は α_1 及び α_2 のいずれのケースについても説明変数間の相関度が高まるにつれて大きくなる。係数の標準誤差についても同じことが云えるが，$T=100$ の場合の方が $T=20$ の場合に比べて小さい。(即ち，t の値が大きい。)これは，またラージ・サンプル・ケースでの係数の一層の安定性を示唆しているものと判断できる。

(名古屋市立大学経済学部)

引用文献

[1] Frish, R., *Statiscal Confluence Analysis by Means of Complete Regression System* (Oslo, Universitetets φkonomiske Institutt, 1934)

[2] Haavelmo, T., "Remarks on Frish's Confluence Analysis and Its Use in Econometrics," in Koopmans, T. C., ed. *Statistical Influence Dynamic Economic Models.* (New York, John Wiley & Sons, Inc., 1950)

[3] Kuga, K. and E. Nezu, "The Generalized Inverse and Professors Klein and Nakamura on the Problem of Multicollinearity," ISER, Discussion paper, No. 54, June 1969

[4] Malinvaud, E., *Statistical Methods of Econometrics* (Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1966)

[5] Tintner, G., *Econometrics* (New York; John Wiley & Sons, 1952)