【調査】

物価指数論の展望

1. はしがき

ここで問題にしようとするのは物価指数の実際問題ではなくて，物価指数の理論である。もちろんこの両者を截然と区別することはできないが，基準時点の取り方，品目の選定，カバレッジの問題，リンクの技術的な問題，季節変動除去の問題，連鎖指数，質的要素の導入問題などは実際的な問題と考えて差し支えなかろう。これに対して，指数算式を中心とする諸問題は，指数算式そのものの技術的問題と，経済理論上の消費理論，生産理論，その他の経済理論との関係をとくに重視するものである。

このような指数論の問題が国際的な規模で取り扱われた時期は，これを2つに分けることができよう。第1の時期は第2次大戦前であって，1924年 I. Fisher[1]が理想算式を提唱して以来これを廻って多くの議論が交わされたのであるが，ついに R. Frisch によってそれまでの理論が要約せられ，1つはいわゆる原子論的指数(atomistic approach) 他の1つは関数論的指数(functional approach)と称せられたことは周知のところであろう。ここに原子論的指数というのは，指数算式中の価格 p と数量 q とが理論的な関数関係を規定することなく，いわば相互に独立に変化するという仮定に基づいて構成せられた指数である。これに対して関数論的指数においては，pと q とが相互に一定の関数関係によって制約せられ，これに基づいて構成される指数を指すのである[2]。

第2の時期は第2次大戦以後から現在に至るまでである。この時期では，指数の技術的な分析においてはこと欠かないといってもよいが，指数論としては，戦前ほど華やかな脚光を浴びたとはいいがたい。P. A. Samuelson による指数論批判[3]に刺戟せられて顕示選択論(revealed preference theory)による散発的な研究が見られるほか，積極的に指数算式を誘導したものとしては，わずかに H. Theil による研究，ならびに Theil を中心とする研究グループの業績が数えられるであろう[4]。

戦後の研究としては，このほか，産業連関分析ないし国民経済計算の発展に伴ない，この方面からする指数論の考え方が R. Stone によって示唆せられたことを述べておかねばならない[5]。

そこで本稿では，順序として，まず関数論的指数の基本問題について述べ，そこでの根本問題の1つ，つまり遠隔時点間の比較について再考する。さらに Stone の取引行列に基づいて，技術要素を含んだ新らしい指数算式を定義し，それと従来からの指数としてのラスパイレス，パーシェ両式との関係を吟味することにした。ついで Theil の研究を紹介し，それに関連して Theil のいわゆる最良線型指数(best linear index number)とは別の定義から出発して誘導した最小二乗指数について考えてみることとした[6]。

1) Irving Fisher, *The Making of Index Numbers,* Cambridge, 1922.

2) 関数論的物価指数についての重要文献としては R. Frisch, "Annual Survey of General Economic Theory: The Problem of Index Numbers," *Econometrica,* Jan. 1936. pp. 1-38 を挙げる。この論文には，物価指数論に関する当時の文献が掲げられている。なお日本語の重要文献としては，この方面の日本における先駆者的役割を演じたものとして，森田優三『物価変動の測定』1940 を掲げなければならない。なお山田勇『計量経済学の基本問題』1949 を参照。

3) P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis,* Cambridge, 1948. pp. 146—163. 佐藤隆三訳『サミュエルソン経済分析の基礎』1967. pp. 150—167.

4) H. Theil, "Best Linear Index Numbers of Prices and Quantities," *Econometrica,* Vol. 28, No. 2, April 1960, pp. 464—480. T. Kloek and M. de Wit, Best Linear Unbiased Index Numbers, *Econometrica,* Vol. 29, No. 4, Oct. 1961, pp. 602—616.

5) Richard Stone, *Input-Output and National Accounts,* OECD, 1961.

6) なお戦後の原子論的指数論として，R. W. Pfouts, An Axiomatic Approach to Index Numbers, *Review of the International Statistical Institute,* Vol. 34, No. 2, 1966, pp. 174—185 があるが本稿では割愛した。またいわゆる指数論としては本文のほか，H. Staehle によって研究された指数の国際比較の諸問題があり，(H. Staehle, *International Comparisons of Cost of Living,* Geneva, 1934) 同じく

2. 無差別指数

いま効用関数を

$$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2・1}$$

とする。x_i は第 i 番目の消費財の消費量をあらわす。この効用関数はつぎの性質を有するものと仮定する。

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}>0, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}>0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}<0, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}<0 \tag{2・2}$$

このうち第1式は限界効用がすべてプラスであることを意味し，第2式は限界効用が逓減することを意味することはいうまでもない。u の極大を求めるに際し，つぎの価格方程式の条件を附加する。

$$\rho=p_1x_1+\cdots+p_nx_n \tag{2・3}$$

$p_1, \cdots, p_n$ はそれぞれ $x_1, \cdots x_n$ の価格であり，ρ は支出をあらわす。(2・3) の条件のもとで (2・1) の u を極大ならしめる必要条件は，消費者選択の理論が示すように，価格によってデフレートされた限界効用が各財について等しいことを示す次式によって与えられる。

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{p_1}=\cdots=\frac{\frac{\partial u}{\partial x_n}}{p_n} \tag{2・4}$$

この式の幾何学的解釈は，(2・3) と (2・4) とが接する場合の正接条件であるということである。

以上は通常の消費者選択の理論を再言したに過ぎない。ここでの問題は，この理論を計算例によって具体的に説明し，さらにこれと物価指数との関係を示すことにある。理論と計算を簡単にするために，消費財の種類は，x_1, x_2 の2財にかぎるものとしよう。そうすると (2・1) の効用関数は $u=f(x_1, x_2)$ となるがこれを，つぎの具体的な関数形で示してみよう。

$$u=A-\frac{B}{x_1x_2} \tag{2・5}$$

この式が (2・2) の仮定を満足することは容易に証明できる。ただし，(2・5) の A と B とはともにプラスの値をとる。また u がつねにプラスであるために，$u<A$ の条件を付加する。

さて，この効用曲線に接する接線の方程式は次式によって与えられる。

$$x_2=2{x_2}^0-\frac{{x_2}^0}{{x_1}^0}x_1 \tag{2・6}$$

ここに $({x_1}^0, {x_2}^0)$ は接点の座標である。この点において，つねに正接条件 (2・4) が成立する。この場合の価格線は

$$x_2=\frac{\rho}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1 \tag{2・7}$$

である。そこで (2・6), (2・7) を比較することによって

$${x_1}^0=\frac{\rho}{2p_1},\quad {x_2}^0=\frac{\rho}{2p_2} \tag{2・8}$$

がえられる。(2・7) の価格線が，${x_1}^0, {x_2}^0$ において接する効用関数の値を I^* とすれば，(2・5) から

$$I^*=A-\frac{4p_1p_2}{\rho^2} \tag{2・9}$$

となる。この場合の I^* は1つの無差別曲線である。つぎに実際の数値を使って，上記の各式の計算例を示すにあたり，基準時点と比較時点とに分けることとする。

A.　基準時点

$A=10, B=1, p_1=6, p_2=5, \rho=120$ とすれば，効用関数は

$$u=10-\frac{1}{x_1x_2} \tag{2・5a}$$

価格線は

$$120=6x_1+5x_2 \tag{2・7a}$$

となる。この価格線が1つの効用関数もしくは無差別線と接する点の座標は，(2・8) から

国際比較の問題として，とくに米ソの指数比較を理論的に取り扱った論文，Evsey D. Domar, "An Index Number Tournament", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. LXXXI, No. 2, May 1967, pp. 169—188 を挙げることができるが，これらはむしろ指数論の応用分野に属するものとして，本稿から除外した。

さらに応用問題としては，指数をデフレーターとして使用する場合の研究もあるが，これも本稿の域を脱するものとして取り扱わなかった。デフレーター論としての最近の文献にはつぎの研究がある。Nissan Liviatan and Don Patinkin, "On the Economic Theory of Price Indexes," *Economic Development and Cultural Change*.　ついでにデフレーターの邦文文献，伊大知良太郎『デフレーター』1958 および山田勇「デフレーターをめぐる問題点」『経済研究』20巻4号，1969年11月，p 360–363. を挙げておく。

この注の最後に，生産理論と生産指数との関係および厚生指標としての厚生指数の問題があることを指摘しておこう。前者については筆者の研究（山田勇『東亜農業生産指数の研究』 日本評論社　1942）のほかに注目すべきものとしては，Kendrick-Sato の指数があることを挙げなければならない。(J. W. Kendrick, *Productivity Trends in the United States*, Princeton, 1961). また後者の問題については Abram Bergson, *The Real National Income of Soviet Russia since 1928*, Cambridge, 1961 のなかに論ぜられている。これらの2つの研究については筆者はこれを別の機会に取り扱おうと思っている。

$$x_1{}^0=10,\ x_2{}^0=12 \qquad (2\cdot 8\text{a})$$

となる。したがって(2・7a)に接する無差別曲線の値は(2・9)からえられる。すなわち

$$I^*=10-\frac{4\times 6\times 5}{120^2}=9.9917 \qquad (2\cdot 9\text{a})$$

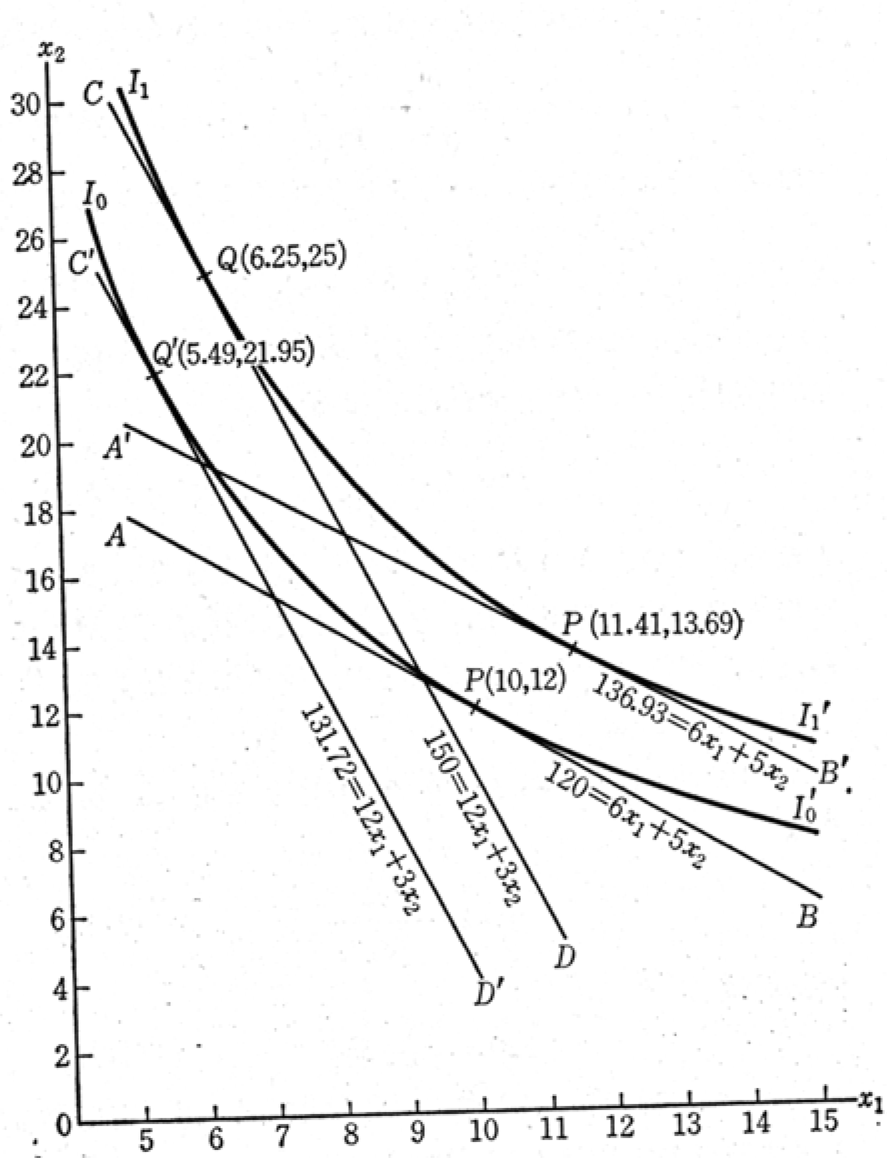
B.　比較時点

この時点においても効用関数には変化がないものと仮定すれば，依然として $A=10, B=1$ である。これに反して，$p_1=12, p_2=3, \rho=150$ と仮定しよう。このような仮定で，接点ならびに無差別曲線の値を，基準時点と同様の手続きにより，計算すれば

$$x_1{}^0=6.25,\ x_2{}^0=25,\ I^*=9.9936$$

となる。これらの関係を図示したものが第１図である。この図において，直線 AB が基準時点の価格線であり，直線 CD が比較時点の価格線である。AB が接する無差別線が曲線 I_0I_0' であってその指標が 9.9917 であり，その接点がP点である。また CD が接する無差別線が曲線 I_1I_1' であり，その指標が 9.9936，接点が Q 点である。これによって明らかなように，I_1I_1' は I_0I_0' よりも右上方にあり，その効用は I_0I_0' よりも大であることはいうまでもない。

第１図



さて，いよいよ物価指数の問題に移る。直線 CD のあらわす価格線の p_1 は 12, p_2 は 3, ρ は 150 であった。基準時点の価格線 AB の場合は，p_1 が 6, p_2 が 5, ρ が 120 であるから，p_1 は２倍に騰貴し，これと反対に p_2 は 0.6 に下落している。そして ρ が 1.25 倍である。このように，この２つの価格線をそのままの形で比較することは，指数論では考えない。すなわち指数論では，比較時点の満足を基準時点の満足と同じであると仮定した場合に，その支出の比がいくらかということである。いま I_0 を基準時点の無差別線 I_0I_0' の指標であるとし，価格が p_{10}, p_{20} で I_0 をうるのに必要な支出を $\rho(I_0|p_{10}, p_{20})$ で示す。これに対して比較時点の無差別線 I_1I_1' のあらわす指標を I_1 とし，価格が p_{11}, p_{21} で I_1 をうるのに必要な支出を $\rho(I_1|p_{11}, p_{21})$ であらわすことにする。この記号を使えば，価格が比較時点の価格 p_{11}, p_{21} で，しかも基準時点の無差別線の指標 I_0 をうるための支出は $\rho(I_0|p_{11}, p_{21})$ で示される。そこで上述の物価指数 P_{ind} はつぎの如く定義することができる。

$$P_{ind}=\frac{\rho\,(I_0|p_{11},\ p_{21})}{\rho\,(I_0|p_{10},\ p_{20})} \qquad (2\cdot 10)$$

この指数を Frisch にならって，無差別指数(indifference defined index)と呼ぶことにしよう[7]。この指数を第１図で求めることにする。$\rho(I_0|p_{11}, p_{21})$ を求めることは，比較時点の価格線 CD に平行でかつ無差別線 I_0I_0' に接する新しい価格線 $C'D'$ を求めることである。このために CD の場合と同じ価格，$p_1=15, p_2=3$ を持つ新しい価格線 $\rho=12x_1+3x_2$ において I_0I_0' に接するときの接点を(2・8)によって求めれば，$x_1{}^0=\dfrac{\rho}{24}$，$x_2{}^0=\dfrac{\rho}{6}$ となる。この ρ の値は(2・9)の I^* を 9.9917 とした次式から求められる。

$$9.9917=10-\frac{144}{\rho^2} \qquad (2\cdot 9\text{b})$$

これから ρ を求めると

$$\rho\,(I_0|p_{11},\ p_{21})=131.72 \qquad (2\cdot 11)$$

となる。$\rho(I_0|p_{10}, p_{20})$ は 120 であったから，無差別指数の値は，これらの ρ の値を(2・10)に代入して求められる。すなわち

7)　R. Frisch, *Annual Survey*, pp. 16—17. ここで Frisch は無差別指標の方程式の例として $I=q^1+\ln q^1+q^2+\ln q^2$ を使っている。q^1, q^2 は本文中の x_1, x_2 に該当し，ln は自然対数をあらわす。この I もまた x_1-x_2 の平面において，原点に対して凸となる。I_{ind} の *ind* は indifference の意味である。

$$P_{ind}(I_0)=\frac{131.72}{120}=1.098 \qquad (2\cdot12)$$

この値はラスパイレス式に対応するものである。ラスパイレス式 P_L は

$$P_L=\frac{12\times10+3\times12}{6\times10+5\times12}=1.30 \qquad (2\cdot13)$$

となり，限界理論が示す如く

$$P_{ind}(I_0)<P_L \qquad (2\cdot14)$$

の関係が見られる。

以上は両時点の支出を I_0 において比較したものであるが，これらを I_1 において比較した無差別指数 $P_{ind}(I_1)$ も考えられる。この場合は，基準時点における価格線 AB と平行であってかつ無差別線 I_1I_1' に Q 点で接する価格線 $A'B'$ の示す支出，$\rho(I_1|p_{10}, p_{20})=136.93$ と，比較時点における価格線 CD の示す支出，$\rho(I_1|p_{11}, p_{21})=150$ との比，すなわち

$$P_{ind}(I_1)=\frac{\rho(I_1|p_{11}, p_{21})}{\rho(I_1|p_{10}, p_{20})}=1.095 \qquad (2\cdot15)$$

で与えられる。この式はパーシェ式に対応するものであり，パーシェ式の指数 P_P は

$$P_P=\frac{12\times5.49+3\times21.95}{6\times5.49+5\times21.95}=0.923 \qquad (2\cdot16)$$

となるから，これまた限界理論の示す如くつぎの関係が確認できる。

$$P_{ind}(I_1)>P_P \qquad (2\cdot17)$$

この節の最後に一言つけ加えたい点がある。以上の分析では，基準時点と比較時点における効用関数が同じであるという仮定を持つことがこれである。つまり両時点における嗜好様式は変らないということを仮定している。しかし現実的には，両時点間の効用関数には相違があると考える方が一般的であろう。もしそうだとしても，$P_{ind}(I_0)$ の場合には影響がないことは明らかである。すなわち $P_{ind}(I_0)$ の場合，たとえ比較時点の効用関数の形が基準時点のそれに対していちじるしく変化したとしても，基準時点の効用関数が確定しているかぎり，$P_{ind}(I_0)$ は計算できる。その理由は簡単である。第1図において価格線 $C'D'$ を引く方法は，比較時点の価格線 CD に平行に無差別線 $I_0I'_0$ に平行に引けばよいからである。この際 CD 上のどの点で比較時点の無差別線 I_1I_1' と接するかは問題にならないからである。I_1I_1' の形がどのような形をとろうと，効用の極大点は CD 上のどこかに求められることはいうまでもない。

これに対応して，$P_{ind}(I_1)$ の場合は，I_1I_1' の形が異なるにしたがって，その値も影響を受けることが考えられる。しかしこの場合は基準時点の効用関数の形には無関係であることから，結局において，両時点の効用関数が同じでなくてもよいことになる。したがって，$P_{ind}(I_0)$ の場合も $P_{ind}(I_1)$ の場合もともに基準・比較両時点の効用関数の形が異っていて差し支えないのである。しかも $P_{ind}(I_0)$ の場合には基準時点の効用関数だけがわかっておればそれで充分であり，$P_{ind}(I_1)$ の場合には比較時点の効用関数だけがわかっておればよい，という重要な結論を導びくことができる。

以上の結果からつぎの定理を掲げる。

定理　(2•10) および (2•15) で定義された無差別指数は効用関数がたがいに異なった遠隔時点間に適用できる[8]。

3. 取引行列と物価指数・計量指数

取引マトリックスは Stone や Goodwin の定義するものと同じ内容のものであって[9]，産業連関モデルではいわゆる閉鎖モデルの一種である。すなわち，このモデルにおける固有の産業部門(内生部門)と最終需要・供給部門とを区別することなく，これらを同じ性質を有するもの，いわばすべてを内生部門とみなすモデルであり，原則的にはこのマトリックスは正方マトリックスである。

いま内生・外生部門を併せて n 個からなる部門がおのおの一種類の商品を生産する場合の金額表をつぎの如くあらわす。

基準時点 (0 時点)

$$G=\begin{bmatrix} g_{11}\cdots g_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{n1}\cdots g_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3\cdot1)$$

比較時点 (t 時点)　$(t=1, 2, \cdots T)$

---

8) このような無差別指数の前提には，(2•1) の u が経験的に測定されなければならない。たとえ，効用の代りに (2•9) の無差別指標 I^* を用いるにしても，本文中で明らかにしたように，I^* は u から導びき出される。Frisch が無差別指数を提唱した当時から今日に至るまで効用ないし無差別指標の経験的測定の問題はかなりの進展を見せたことは周知のところであろう。そのうちでも Neumann-Morgenstern の効用理論は看過することができない。(J. von Neumann and Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton, 2nd ed., 1947. pp. 15—30.)

9) R. Stone, *Input-Output and National Accounts,* OECD, 1961, p. 202. R. M. Goodwin, Static and Dynamic Linear General Equilibrium Models, in *Input-Output Relations,* ed. by The Netherland Economic Institute, 1953, pp. 54—87.

$$H=\begin{bmatrix} h_{11}\cdots h_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_{n1}\cdots h_{nn} \end{bmatrix} \tag{3・2}$$

また両時点における投入係数を

$$0\text{時点}:A=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3・3}$$

$$t\text{時点}:B=\begin{bmatrix} b_{11}\cdots b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\cdots b_{nn} \end{bmatrix} \tag{3・4}$$

とし，0時点および t 時点の個別価格と個別数量とのマトリックス，p および q をそれぞれ

$$0\text{時点}:p_0=\begin{bmatrix} p_{10} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{n0} \end{bmatrix},\ q_0=\begin{bmatrix} q_{10} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_{n0} \end{bmatrix} \tag{3・5}$$

$$t\text{時点}:p_t=\begin{bmatrix} p_{1t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{nt} \end{bmatrix},\ q_t=\begin{bmatrix} q_{1t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_{nt} \end{bmatrix} \tag{3・6}$$

とする。ところで $p_0^{-1}G$ は数量マトリックスであり，これは同時に Aq_0 に等しい。すなわち

$$p_0^{-1}G=Aq_0$$

あるいは

$$G=p_0Aq_0 \tag{3・7}$$

という関係が成立する。いま(3・7)の金額マトリックスの総合計，$g_{11}+\cdots+g_{1n}+\cdots+g_{n1}+\cdots+g_{nn}$ は，n 行の加法列ベクトル $\{\overbrace{1\cdots1}^{n}\}=I$ を使用すれば，$I'GI$ もしくは $I'G'I$ で求められる。この両者は当然相等しい。すなわち

$$I'GI=I'G'I \tag{3・8}$$

そこで，この関係を(3・7)に適用すれば

$$I'GI=I'q_0'A'p_0'I=I'q_0A'p_0I \tag{3・9}$$

ここで

$$P_0=\begin{bmatrix} p_{10} \\ \vdots \\ p_{n0} \end{bmatrix},\ Q_0=\begin{bmatrix} q_{10} \\ \vdots \\ q_{n0} \end{bmatrix} \tag{3・10}$$

を定義すれば

$$p_0I=P_0,\quad q_0I=Q_0 \tag{3・11}$$

この関係を(3・9)に代入して次式をうる。

$$I'GI=Q_0'A'P_0 \tag{3・12}$$

これはまえに述べたように基準時点における取引総額である。いま t 時点の価格と数量の列ベクトルをつぎの如く定義する。

$$P_t=\begin{bmatrix} p_{1t} \\ \vdots \\ p_{nt} \end{bmatrix},\ Q_t=\begin{bmatrix} q_{1t} \\ \vdots \\ q_{nt} \end{bmatrix} \tag{3・13}$$

そのうえで(3・12)のなかの P_0 を P_t でおき換えたものすなわち，$Q_0'A'P_t$ は0時点の取引数量で測った t 時点の取引金額を意味する。そこで，この $Q_0'A'P_t$ を(3・12)で割った値はラスパイレスの物価指数 P_L にほかならない。すなわち

$$P_L=\frac{Q_0'A'P_t}{Q_0'A'P_0} \tag{3・14}$$

同様にパーシェの物価指数 P_P は

$$P_P=\frac{Q_t'B'P_t}{Q_t'B'P_0} \tag{3・15}$$

となることは明らかである。ここに述べた P_L と P_P とは，(3・14)と(3・15)に見られるように，数量 Q，投入係数 A，価格 P の3つの要素によってあらわされており，通常これらが P と Q との2つの要素によってあらわされたものと対比される。しかしこのモデルでは $AQ_0=Q_0$，$BQ_t=Q_t$ という関係があり，このことに注目すれば，(3・14)，(3・15)はそれぞれ

$$P_L=\frac{Q_0'P_t}{Q_0'P_0},\ P_P=\frac{Q_t'P_t}{Q_t'P_0} \tag{3・16}$$

となって，通常のラスパイレス式およびパーシェ式をうることはいうまでもない。

ここで1つ問題となる点はつぎの事実である。ラスパイレス式(3・14)においては，分母，分子ともに基準時点の技術マトリックス(投入係数マトリックス)A を用いており，パーシェ式(3・15)においては，分母，分子ともに比較時点の技術マトリックス B を用いている点がこれである。そこで形式的には，P_L において比較時点の技術を用い，P_P において基準時点の技術を用いた，つぎの2つの式もまた意味のあるものと考えられる。すなわち

$$\dot{P}_L=\frac{Q_0'B'P_t}{Q_0'B'P_0} \tag{3・16}$$

$$\dot{P}_P=\frac{Q_t'A'P_t}{Q_t'A'P_0} \tag{3・17}$$

(3・16)を準ラスパイレス式，(3・17)を準パーシェ式と呼ぶことにしよう。

ここで $\dot{P}_L$ と P_L との関係を分析することは興味のあることであろう。そのために $\dot{P}_L-P_L$ の値を求めてみる。

$$\dot{P}_L-P_L=\frac{1}{Q_0'B'P_0}\left[Q_0'B'P_t-\frac{Q_0'A'P_t}{Q_0'A'P_0}Q_0'B'P_0\right] \tag{3・18}$$

いま

$$T_L=\frac{Q_0'B'P_0}{Q_0'A'P_0} \tag{3・19}$$

とおけば，(3・18)は

$$\dot{P}_L-P_L=\frac{Q_0'(B'-T_LA')(P_t-P_LP_0)}{Q_0'B'P_0} \tag{3・20}$$

となる。上式において T_L, P_L はスカラーである。T_L

の意味を検討するために，(3・19)を計算してみると

$$T_L=\frac{\sum_i\sum_j x_{ij}a_{ij}p_{i0}q_{j0}}{\sum_i\sum_j a_{ij}p_{i0}q_{j0}} \tag{3・21}$$

となる。ここに

$$x_{ij}=b_{ij}/a_{ij} \quad (i,j=1,\cdots,n) \tag{3・22}$$

であって，これは基準時点の技術係数 a_{ij} に対する比較時点の技術係数 b_{ij} の比を示しており，これによって両時点間の技術の変化を測ることができる。この意味で x_{ij} を技術変化率と呼ぶことにしよう。そこで(3・21)は，T_L が $a_{ij}p_{i0}q_{j0}$ をウェイトにした技術変化率の加重平均指数であることをあらわす。

ところで(3・20)の右辺の分子を計算してみると

$$\begin{aligned}&Q_0'(B'-T_LA')(P_t-P_LP_0)\\&=Q_0'\begin{bmatrix}\sum_i a_{i1}p_{10}(x_{i1}-T_L)(y_{it}-P_L)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_i a_{in}p_{n0}(x_{in}-T_L)(y_{it}-P_L)\end{bmatrix}\\&=\sum_i\sum_j w_{ij}(x_{ij}-T_L)(y_{it}-P_L)\end{aligned} \tag{3・23}$$

上式中のうち y は

$$y_{it}=p_{it}/p_{i0} \quad (i=1,\cdots,n)$$

であって，個別価格指数であり，また w は

$$w_{ij}=a_{ij}p_{i0}q_{j0}$$

であって，ウェイトである。そこで(3・23)は

$$(3・23)=\sigma_x\sigma_y r_1(x,y)\sum_i\sum_j w_{ij} \tag{3・24}$$

ここに

$$\sigma_x^2=\frac{\sum_i\sum_j w_{ij}(x_{ij}-T_L)^2}{\sum_i\sum_j w_{ij}}$$

$$\sigma_y^2=\frac{\sum_i\sum_j w_{ij}(y_{it}-P_L)^2}{\sum_i\sum_j w_{ij}}$$

であり，さらに

$$r_1(x,y)=\frac{\sum_i\sum_j w_{ij}(x_{ij}-T_L)(y_{it}-P_L)}{\sigma_x\sigma_y\sum_i\sum_j w_{ij}}$$

であって，x と y との相関係数をあらわす。したがって(3・20)は次式で示される。

$$\dot{P}_L-P_L=\frac{\sigma_x\sigma_y\sum_i\sum_j w_{ij}}{Q_0'A'P_0}r_1(x,y) \tag{3・25}$$

この式の右辺のうち $r_1(x,y)$ 以外の項はつねにプラスであるから，左辺の正負は $r_1(x,y)$ の正負だけによって決定される。これを記号で示せば

$$\mathrm{sgn}(\dot{P}_L-P_L)=\mathrm{sgn}\,r_1(xy) \tag{3・26}$$

ここで重要な結論を導びくことができる。すなわち $r_1(x,y)$ がプラスの場合，つまり個別価格指数 x が大きくなると同時に技術変化率 y も大きくなれば，$\dot{P}_L>P_L$，つまり準ラスパイレス物価指数 $\dot{P}_L$ は通常のラスパイレス式 P_L よりも大きくなり，もしこの反対に，$r_1(x,y)$ がマイナスの場合，すなわち x と y とが逆方向に動く場合は，$P_L>\dot{P}_L$ となる。

つぎにパーシェ式 P_P と準パーシェ $\dot{P}_P$ 式との関係を考えてみよう。この場合も P_L と $\dot{P}_L$ との場合の分析を使って

$$P_P-\dot{P}_P=\frac{Q_t'(B'-T_PA')(P_t-\dot{P}_PP_0)}{Q_t'B'P_0} \tag{3・27}$$

を誘導することは容易である。上式中の T_P はパーシェ方式による技術変化指数，すなわち

$$T_P=\frac{Q_t'B'P_0}{Q_t'A'P_0} \tag{3・28}$$

である。さらに(3・27)の右辺の分子を計算した結果はつぎの如くである。

$$\begin{aligned}&Q_t'(B'-T_PA')(P_t-\dot{P}_PP_0)\\&=\sum_i\sum_j v_{ij}(x_{ij}-T_P)(y_{it}-\dot{P}_P)\\&=\sigma_x'\sigma_y'r_2(x,y)\sum_i\sum_j v_{ij}\end{aligned} \tag{3・29}$$

ただし v はこの場合のウェイトであって

$$v_{ij}=a_{ij}p_{i0}q_{jt}$$

さらに

$$r_2(x,y)=\frac{\sum_i\sum_j v_{ij}(x_{ij}-T_P)(y_{it}-\dot{P}_P)}{\sigma_x'\sigma_y'\sum_i\sum_j v_{ij}}$$

$$\sigma_x'^2=\frac{\sum_i\sum_j v_{ij}(x_{ij}-T_P)^2}{\sum_i\sum_j v_{ij}}$$

$$\sigma_y'^2=\frac{\sum_i\sum_j v_{ij}(y_{it}-\dot{P}_P)}{\sum_i\sum_j v_{ij}}$$

したがって(3・27)は次式によってあらわされる。

$$P_P-\dot{P}_P=\frac{\sigma_x'\sigma_y'\sum_i\sum_j v_{ij}}{Q_t'B'P_0}r_2(x,y) \tag{3・30}$$

(3・26)と同様に，この場合も

$$\mathrm{sgn}(P_P-\dot{P}_P)=\mathrm{sgn}\,r_2(x,y) \tag{3・31}$$

という結果がえられる[10)]。

---

10) 数量指数についても，物価指数と同様に技術要素を含んだ指数を構成することができる。通常のラ

4. 価格マトリックスと数量マトリックス

これからさきの分析の基礎になる個別価格数量の関係を明らかにするために，これらの記号を第1表に示す。この表の表側には商品番号を，表頭には時点をとる。記号のつけ方はつぎのとおりである。個別価格を p，個別数量を q とし，それぞれの添字のうち，最初のものは商品番号を，第2の添字は時点を示すものとする。したがって，p_{n2} は第 n 番目の商品の時点2における個別価格を，q_{2T} は第2番目の商品の時点 T における個別数量をあらわす。

第1表

商品番号＼時点	個別価格					個別数量				
	0	1	2	…	T	0	1	2	…	T
1	p_{10}	p_{11}	p_{12}	…	p_{1T}	q_{10}	q_{11}	q_{12}	…	q_{1T}
2	p_{20}	p_{21}	p_{22}	…	p_{2T}	q_{20}	q_{21}	q_{22}	…	q_{2T}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
n	p_{n0}	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nT}	q_{n0}	q_{n1}	q_{n2}	…	q_{nT}

0時点における p および q を他の時点のものと切り離して，つぎのベクトルであらわす。これは時点が通常基準時点に取られるためであるが，一般的にはその必要はない。

$$p_0=\begin{bmatrix}p_{10}\\ p_{20}\\ \vdots\\ p_{n0}\end{bmatrix}\qquad q_0=\begin{bmatrix}q_{10}\\ q_{20}\\ \vdots\\ q_{n0}\end{bmatrix}$$

さらに時点1から T までの p および q をつぎのマトリックスであらわす。

$$p=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\cdots p_{1T}\\ p_{21} & p_{22}\cdots p_{2T}\\ \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots\\ p_{n1} & p_{n2}\cdots p_{nT}\end{bmatrix}\qquad q=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12}\cdots q_{1T}\\ q_{21} & q_{22}\cdots q_{2T}\\ \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots\\ q_{n1} & q_{n2}\cdots q_{nT}\end{bmatrix}$$

さらに，$n\times(T+1)$ 次の P および Q をつぎのように定義する。

$$P=[p_0\ p]=\begin{bmatrix}p_{10} & p_{11} & p_{12}\cdots p_{1T}\\ p_{20} & p_{21} & p_{22}\cdots p_{2T}\\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots\\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2}\cdots p_{nT}\end{bmatrix}$$

スパイレスの数量指数 Q_L，パーシェの数量指数 Q_P はそれぞれ

$$Q_L=\frac{Q_t'A'P_0}{Q_0'A'P_0},\quad Q_P=\frac{Q_t'B'P_t}{Q_0'B'P_t}$$

また準ラスパイレス数量指数 $\dot{Q}_L$，パーシェの数量指数 $\dot{Q}_P$ はそれぞれ

$$\dot{Q}_L=\frac{Q_t'B'P_0}{Q_0'B'P_0},\quad \dot{Q}_P=\frac{Q_t'A'P_t}{Q_0'A'P_t}$$

となる。

$$Q=[q_0\ q]=\begin{bmatrix}q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots q_{1T}\\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots q_{2T}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots q_{nT}\end{bmatrix}$$

いま P と Q との意味を考えてみる。そのために PQ' と $P'Q$ とを求める。

$$PQ'=\begin{bmatrix}\sum_t p_{1t}q_{1t}\cdots\sum_t p_{1t}q_{nt}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sum_t p_{nt}q_{1t}\cdots\sum_t p_{nt}q_{nt}\end{bmatrix}\tag{4・1}$$

ここに $\sum_t$ は $\sum_{t=0}^{t=T}$ を意味する。つぎに

$$P'Q=\begin{bmatrix}\sum_i p_{i0}q_{i0}\cdots\sum_i p_{i0}q_{iT}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sum_i p_{iT}q_{i0}\cdots\sum_i p_{iT}q_{iT}\end{bmatrix}\tag{4・2}$$

上式中の $\sum_i$ は $\sum_{i=1}^{i=n}$ の意味である。(4・1) は aggregation over periods をあらわし，(4・2) 式は aggregation over commodities をあらわすことはいうまでもない[11]。ここでは (4・2) だけに注目しよう。このマトリックスの両辺を $\sum p_{i0}q_{i0}$ で割れば

$$\frac{P'Q}{\sum p_{i0}q_{i0}}=\begin{bmatrix}1 & \frac{\sum p_{i0}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}\cdots & \frac{\sum p_{i0}q_{iT}}{\sum p_{i0}q_{i0}}\\ \frac{\sum p_{i1}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}} & \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}\cdots & \frac{\sum p_{i1}q_{iT}}{\sum p_{i0}q_{i0}}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\sum p_{iT}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}} & \frac{\sum p_{iT}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}\cdots & \frac{\sum p_{iT}q_{iT}}{\sum p_{i0}q_{i0}}\end{bmatrix}\tag{4・3}$$

いま

$$\frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=A_{10},\ \cdots,\ \frac{\sum p_{iT}q_{iT}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=A_{T0}$$

とし，かつ $(t=1, 2, \cdots, T)$

$$\frac{\sum p_{it}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=P_{Lt0},\ \frac{\sum p_{it}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=\frac{\sum p_{it}q_{i1}}{\sum p_{i1}q_{i1}}\cdot\frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=P_{Lt1}A_{10},\ \cdots\tag{4・4}$$

$$\frac{\sum p_{i0}q_{it}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=Q_{Lt0},\ \frac{\sum p_{i1}q_{it}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=\frac{\sum p_{i1}q_{it}}{\sum p_{i1}q_{i1}}\cdot\frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=Q_{Lt1}A_{10},\ \cdots\tag{4・5}$$

とすれば，(4・3) 式は

$$\frac{P'Q}{\sum p_{i0}q_{i0}}=\begin{bmatrix}1 & Q_{L10}\ \cdots & Q_{LT0}\\ P_{L10} & A_{10}\ \cdots & Q_{LT1}A_{10}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ P_{LT0} & P_{LT1}A_{10}\cdots & A_{T0}\end{bmatrix}$$

11) H. Theil, *Linear Aggregation of Economic Relations*, Amsterdam, 1954, pp. 27—38.

(4・6)

上式において，$P_{L10}, \cdots P_{LT0}$ はそれぞれ時点1と時点0との間の，…，時点Tと時点0との間の，ラスパイレス物価指数をあらわす。(L は Laspeyres 式の意味)また $Q_{L10}, \cdots, Q_{LT0}$ はそれぞれ時点1と時点0との間の，…，時点Tと時点0との間のラスパイレス数量指数をあらわす。さらに，$A_{10}, \cdots, A_{T0}$ はそれぞれ時点1と時点0との間の,…，時点 T と時点0との間の金額指数を意味している。そして(4・6)式の主対角要素はすべて金額指数を，その左下方の各要素はラスパイレスの物価指数を，右上方の各要素は同じくラスパイレスの数量指数に金額指数をかけた形になっていることがわかる。

これと反対に，$P'Q$ を(4・2)の右下の要素 $\sum p_{iT}q_{iT}$ で割れば，ラスパイレスの物価指数および数量指数に代って，パーシェの物価指数および数量指数を求めることができる。すなわち

$$\frac{P'Q}{\sum p_{iT}q_{iT}}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_{T0}} & \dfrac{1}{P_{P10}A_{T1}} & \cdots & \dfrac{1}{P_{PT0}} \\ \dfrac{1}{Q_{P10}A_{T1}} & \dfrac{1}{A_{T1}} & \cdots & \dfrac{1}{P_{PT1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{Q_{PT0}} & \dfrac{1}{Q_{PT1}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4・7}$$

このマトリックスのなかの $P_{P10}, \cdots, P_{PT0}$ はそれぞれ時点1と 0,…，時点 T と0との間のパーシェの物価指数をあらわし，$Q_{P10}, \cdots, Q_{PT0}$ はそれぞれ時点1と0,…，時点 T と0との間のパーシェの数量指数をあらわす。(添字のPはパーシェ式を意味する。) (4・6) と (4・7) とを比較すれば明らかなように，P_L と Q_L および P_P と Q_P との位置は相互に対称的であることがわかる。

この両式は一般式であるが，通常のラスパイレス式およびパーシェ式のように，基準時点を0比較時点を1にとれば，P, Q はそれぞれ

$$P=[p_0\ p]=\begin{bmatrix} p_{10} & p_{11} \\ p_{20} & p_{21} \\ \vdots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} \end{bmatrix} \qquad Q=[q_0\ q]=\begin{bmatrix} q_{10} & q_{11} \\ q_{20} & q_{21} \\ \vdots & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} \end{bmatrix}$$

したがって(4・2)は

$$P'Q=\begin{bmatrix} \sum p_{i0}q_{i0} & \sum p_{i0}q_{i1} \\ \sum p_{i1}q_{i0} & \sum p_{i1}q_{i1} \end{bmatrix}$$

となる。両辺を $\sum p_{i0}q_{i0}$ で割れば(4・6)は

$$\frac{P'Q}{\sum p_{i0}q_{i0}}=\begin{bmatrix} 1 & Q_{L10} \\ P_{L10} & A_{10} \end{bmatrix}$$

また両辺を $\sum p_{i1}q_{i1}$ で割れば(4・7)は

$$\frac{P'Q}{\sum p_{i1}q_{i1}}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_{T0}} & \dfrac{1}{P_{P10}} \\ \dfrac{1}{Q_{P10}} & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

5. 最良線型指数

原子論的物価指数の最近の研究のうち注目すべきものとして H. Theil を中心とするグループによって展開された最良線型指数(best linear index numbers of prices and quantities)を挙げることができることはまえに述べたとおりである。ここではまず，かれらの理論の要点を紹介し，この考え方と同一線上にある具体的な指数算式については次節以下に説明することとしよう。問題を物価指数と数量指数とに分ける。

A. Theil の研究(1)——物価指数[12)]

いま時点を1からTまでとし，商品の種類をn個とする。t時点における第i番目の商品の価格を $p_i(t)$ であらわす。

個別価格のマトリックスPおよび各時点の物価指数ベクトル p をつぎのように定義する。

$$P=\begin{bmatrix} p_1(1) \cdots p_n(1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_1(T) \cdots p_n(T) \end{bmatrix}, \qquad p=\begin{bmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(T) \end{bmatrix} \tag{5・1}$$

ここで問題は

$$p=P\alpha \tag{5・2}$$

の条件のもとに，ある適当な方法によってPをpによってあらわすことにある。

そこで

$$P=pa'+V \tag{5・3}$$

という線型関数を考える。ここにaは価格線の傾斜をあらわす列ベクトルであり，$V=[v_i(t)]$は $T\times n$ の価格線からの乖離マトリックスである。(5・2)と(5・3)から

$$V=P(I-\alpha a') \tag{5・4}$$

がえられる。ところで2つのパラメーター，αとaとを決定するのに，Theil は principal component 法を使っている。すなわち二次形式

$$\sum_{ij}\sum_{t} g_{ij}v_i(t)v_j(t)=\mathrm{tr}(GV'V) \tag{5・5}$$

を最小にするような α, a を求めることである。ここに $G=[g_{ij}]$ は正値定符号または半正値定符号のn次の対称マトリックスである。(5・4)および(5・5)から

12) H. Theil, Best Linear Index Numbers, *op. cit.*

$$\mathrm{tr}(GV'V)=\mathrm{tr}(GP'P)-\mathrm{tr}(Ga\alpha'P'P)-\mathrm{tr}(GP'Pa\alpha')$$
$$+\mathrm{tr}(Ga\alpha'P'P\alpha a')=\mathrm{tr}(GP'P)-2\alpha'P'PGa$$
$$+(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga) \qquad (5\cdot6)$$

をうる。上式中 tr は trace の記号である。この式を α, a について偏微分すれば

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\,\mathrm{tr}(GV'V)}{\partial\alpha}=-P'PGa+(a'Ga)P'P\alpha=0 \qquad (5\cdot7)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\,\mathrm{tr}(GV'V)}{\partial a}=-GP'P\alpha+(\alpha'P'P\alpha)Ga=0 \qquad (5\cdot8)$$

(5・8)の両辺の左から $P'P$ を乗じ，その結果に(5・7)を適用すれば次式をうる。

$$-P'PGP'P\alpha+(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga)P'P\alpha=0$$

これから

$$[P'PG-(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga)I]P'P\alpha=0 \qquad (5\cdot9)$$

$$P'P[GP'P-(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga)I]\alpha=0 \qquad (5\cdot10)$$

が導びかれる。同様にして，(5・7)の両辺の左から G を乗じてのち(5・8)を代入すれば(5・9)，(5・10)に対応して

$$[GP'P-(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga)I]Ga=0 \qquad (5\cdot11)$$

$$G[P'PG-(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga)I]a=0 \qquad (5\cdot12)$$

をうることができる。

さて，(5・9)から $P'P\alpha=0$ もしくは $P'P\alpha$ は $P'PG$ の特性ベクトルであり，また(5.11)から，$Ga=0$ もしくは Ga が $GP'P$ の特性ベクトルであることがわかる。ここで $P'P\alpha=0$ もしくは $Ga=0$ の場合と，$P'P\alpha$ および Ga がそれぞれ $P'PG$ および $GP'P$ の特性ベクトルである場合とに分けて，そのいずれの場合が，この研究の目的に照して意味があるかを見るために，(5・7)または(5・8)を(5・6)に代入する。その結果

$$\mathrm{Min}[\mathrm{tr}(GV'V)]=\mathrm{tr}(GP'P)-(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga) \qquad (5\cdot13)$$

がえられ，上式からつぎのことがわかる。すなわちもし，$P'P\alpha=0$ または $Ga=0$ のときは，$\mathrm{tr}(GV'V)=\mathrm{tr}(GP'P)$ となる。もし $P'P\alpha$ および Ga をそれぞれ $P'PG$ および $GP'P$ の特性ベクトルと考えれば，これらはプラスの最大根に対応するから，われわれの目的に適することになる。そこでこの特性根を

$$\lambda^2=(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga) \qquad (5\cdot14)$$

とおく。この式のなかの α および a は最適ベクトルであることはいうまでもない。

さて

$$c=[GP'P-(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga)I]\alpha \qquad (5\cdot15)$$

とおけば，(5・10)は，$P'Pc=0$ である。この式は $Pc=0$ の条件を含むことは容易に証明できる。$Pc=0$ を書き換えれば

$$[PGP'-(\alpha'P'P\alpha)(a'Ga)I]P\alpha=0 \qquad (5\cdot16)$$

がえられるが，この式から，$P\alpha=p$ が最大根 λ^2 に対応する PGP' の特性ベクトルであることが証明される。つまり物価指数ベクトル p は最大根 λ^2 を持つ特性ベクトル PGP' にほかならないことを示している。

B. Theil の研究(2)——数量指数

数量指数の場合は前述の物価指数の場合と並行して進められる。まず個別指数マトリックス Q と数量指数ベクトル q とをつぎのように定義する。

$$Q=\begin{bmatrix} q_1(1) & \cdots q_n(1) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1(T) & \cdots q_n(T) \end{bmatrix}, \qquad q=\begin{bmatrix} q(1) \\ \vdots \\ q(T) \end{bmatrix} \qquad (5\cdot1\,\mathrm{a})$$

Q と q との関係は

$$q=Q\beta, \qquad Q=qb'+W \qquad (5\cdot2\,\mathrm{a})$$

であらわされる。ここに W は，物価指数の場合の V と同じく，数量線からの Q の乖離ベクトルである。

いま正値定符号ないし半正値定符号の n 次のあるマトリックス H を考えると，問題は $\mathrm{tr}(HW'W)$ を最小にするように β と b とを決定することである。H は物価指数の場合の G に対応する。以下は物価指数の場合と全く同一の手続きによって次式をうる。

$$\mathrm{Min}[\mathrm{tr}(HW'W)]=\mathrm{tr}(HQ'Q)-(\beta'Q'Q\beta)(b'Hb) \qquad (5\cdot3\,\mathrm{a})$$

上式の β と b とは

$$[Q'QH-(\beta'Q'Q\beta)(b'Hb)I]Q'Q\beta=0$$
$$Q'Q[HQ'Q-(\beta'Q'Q\beta)(b'Hb)I]\beta=0 \qquad (5\cdot4\,\mathrm{a})$$
$$[HQ'Q-(\beta'Q'Q\beta)(b'Hb)I]Hb=0$$
$$H[Q'QH-(\beta'Q'Q\beta)(b'Hb)I]b=0$$

の条件を充たすものである。物価指数の場合と同様にして，

$$[QHQ'-(\beta'Q'Q\beta)(b'Hb)I]q=0 \qquad (5\cdot5\,\mathrm{a})$$

この式の意味するところは，数量指数ベクトル q が最大根を持つ特性ベクトル QHQ' であるということである。

C. 最良線型指数

いままでのところ，G および H は任意の n 次正値定

符号ないし半正値定符号の対称マトリックスと定義した。そこで

$$G=Q'Q, \quad H=P'P \qquad (5\cdot17)$$

とおけば，この値を(5•16)および(5•5 a)に代入することによって，物価指数ベクトルは $PQ'QP'$ の特性ベクトルであり，数量指数ベクトルは $'QP'PQ'$ の特性ベクトルであり，両ベクトルとも最大根を持つことが判明する。そこで，(5•9)から(5•12)に，また(5•4 a)に(5•17)を代入することによって，次式をうる。

$$\left.\begin{array}{l}[P'PQ'Q-(\alpha'P'P\alpha)(a'Q'Qa)I]P'P\alpha=0\\ Q'Q[P'PQ'Q-(\alpha'P'P\alpha)(a'Q'Qa)I]a=0\\ [P'PQ'Q-(b'P'Pb)(\beta'Q'Q\beta)I]P'Pb=0\\ Q'Q[P'PQ'Q-(b'P'Pb)(\beta'Q'Q\beta)I]\beta=0\end{array}\right\} \qquad (5\cdot18)$$

$$\left.\begin{array}{l}[Q'QP'P-(\alpha'P'P\alpha)(a'Q'Qa)I]Q'Qa=0\\ P'P[Q'QP'P-(\alpha'P'P\alpha)(a'Q'Q'a)I]\alpha=0\\ [Q'QP'P-(b'P'Pb)(\beta'Q'Q\beta)I]Q'Q\beta=0\\ P'P[Q'QP'P-(b'P'Pb)(\beta'Q'Q\beta)I]b=0\end{array}\right\} \qquad (5\cdot19)$$

(5•18)から

$$P'P\alpha, \quad a, \quad P'Pb, \quad \beta \qquad (5\cdot20)$$

がすべて $P'PQ'Q$ の特性ベクトルであり，(5•19)から

$$Q'Qa, \quad \alpha, \quad Q'Q\beta, \quad b \qquad (5\cdot21)$$

もすべて $Q'QP'P$ の特性ベクトルであり，しかもこれらのベクトルのすべては最大根に対応し，この最大根は2つのマトリックスについて同じ値を持つ。この最大根は，重根の場合を除けば，単根であるから，(5•20)の4つのベクトルは，スカラー倍の問題を別にすれば，たがいに相等しく，(5•21)についても同様である。ところで α もしくは a にある定数をかけても議論には影響がないし，β および b についても同様であるから，結局

$$a=\beta, \quad b=\alpha \qquad (5\cdot22)$$

となる。このことは，数量ウェイト β がこれに対応する価格線の傾斜 a に等しく，価格ウェイト α が数量線の傾斜 b に等しいことをあらわす。したがって価格と数量とは互換的な関係にあることがわかる。(5•20)と(5•21)から

$$P'P\alpha=k_1\beta, \quad Q'Q\beta=k_2\alpha \qquad (5\cdot23)$$

をうる。k_1 と k_2 はともにスカラーである。上式の2式を組み合わすと，$Q'QP'P\alpha=k_1k_2\alpha$ となるから，(5•19)，(5•22)および(5•14)を考慮することによって

$$k_1k_2=(\alpha'P'P\alpha)(a'Q'Qa)=(\alpha'P'P\alpha)(\beta'Q'Q\beta=\lambda^2 \qquad (5\cdot24)$$

がえられる。いま $k_1=\lambda$ とおけば，$k_2=\lambda$ となるから，(5•23)は

$$P'P\alpha=\lambda\beta, \quad Q'Q\beta=\lambda\alpha \qquad (5\cdot25)$$

がえられる。上式の意味はつぎのとおりである。価格ウェイト α の左から個別価格のモーメント・マトリックス $P'P$ をかければ，数量ウェイト β の λ 倍となり，数量ウェイト β の左から個別数量のモーメント・マトリックス $Q'Q$ をかければ，価格ウェイト α の λ 倍となる。そしてこの λ は前述のとおり，これらの2つのモーメント・マトリックスの積 $P'PQ'Q$ および $Q'QP'P$ の最大根のプラスの平方根である。

(5•25)の第1式の左から Q をかけ，第2式の左から P をかければ，$QP'p=\lambda q$ および $PQ'q=\lambda p$ がえられるが，いま C を

$$C=PQ' \qquad (5\cdot26)$$

と定義すれば

$$C'p=\lambda q, Cq=\lambda p \qquad (5\cdot27)$$

となる。(5•26)の C を Theil は cross-value matrix と称するが[13]，その実体は，各主対角要素が各時点における実金額を示すということである。

さて実際にこの最良線型指数を計算することはさして困難ではない。すなわち，個別価格および個別数量が与えられれば，(5•26)の cross-value matrix を計算し，そのあとで，CC' および $C'C$ の最大根に対応する特性ベクトルを求めることによって，物価指数および数量指数を求めればよい。

$\mathrm{tr}(Q'QV'V)$ を最小にすることができたかどうかを測る測度として Theil はつぎの式を提案し，これを適合度指標(fitting index)と呼んだ。

$$I^2=\frac{\lambda^2}{\mathrm{tr}(Q'QP'P)}=\frac{\lambda^2}{\mathrm{tr}(CC')}=\frac{\lambda^2}{\mathrm{tr}(C'C)} \qquad (5\cdot28)$$

この指標は(5•13)，(5•14)，(5•17)を組み合わせてえられる次式に基づいて作られたものである。

$$\mathrm{Min}[\mathrm{tr}(Q'QV'V)]=\mathrm{tr}(Q'QP'P)-\lambda^2 \qquad (5\cdot29)$$

この測度は $C-P'Q$ をゼロにすることができれば1となる[14]。

D.　Kloek と Wit による改善[15]

Theil の最良線型指数を具体的な資料を使って計測し，その結果，Theil の指数を改善したのがこの2人の業績

13)　Theil, *op. cit.*, p. 472.

14)　Theil, *op. cit.*, p. 474.

15)　T. Kroek and M de Wit, Best Linear Unbiased Index Numbers, *op. cit.*, 以下ではかれらのえた重要な結果だけを摘出するにとどめたことを付言しておく。

である。

まず，Theil のcross-value matrix (5·26) をつぎの形で考える。ただし $T=2$ とする。

$$C=\begin{bmatrix}1 & Q_L \\ P_L & P_LQ_L(1+\eta)\end{bmatrix} \tag{5·30}$$

ここに η は，パーシェ指数 P_P とラスパイレス指数 P_L との関係式

$$P_P=P_L(1+\eta) \tag{5·31}$$

によって定義される値である。$T=2$ の場合の Theil 指数 P_0, Q_0 は近似的に

$$P_0=P_L\left(1+\eta\frac{Q_L^2}{1+Q_L^2}\right) \tag{5·32}$$

$$Q_0=Q_L\left(1+\eta\frac{P_L^2}{1+P_L^2}\right) \tag{5·33}$$

によってあらわされる。

いま E を C と pq' との乖離，すなわち

$$E=C-pq' \tag{5·34}$$

とすれば

$$\mathrm{tr}(E_0E_0')=\eta^2\frac{P_L^2Q_L^2}{D} \tag{5·35}$$

となる。ここに

$$E_0=\eta\frac{P_LQ_L}{D}\begin{bmatrix}P_LQ_L & -P_L \\ -Q_L & 1\end{bmatrix}$$

$$D=(1+P_L^2)(1+Q_L^2)$$

である。(5·35) からつぎの事実がわかる。すなわち，E_0 の主対角要素は η と同符号であり，したがって，pq' の主対角要素はこれに対応する C の要素よりも大きい。つまり，Theil の指数はフィッシャーの要素転逆テストの意味で上方に偏倚を持つことになる。

そこで Kroek と Wit は，この偏倚を除くために

$$\mathrm{tr}E=\mathrm{tr}C-p'q=0 \tag{5·36}$$

の条件のもとで $\mathrm{tr}(EE')$ を最小にすることをこころみた。その結果近似的につぎの式を誘導している。

$$P_\mu=P_L\left\{1+\eta Q_L\frac{Q_L(1+P_L^2)-(P_L-Q_L)}{D+(P_L-Q_L)^2}\right\} \tag{5·37}$$

$$Q_\mu=Q_L\left\{1+\eta P_L\frac{P_L(1+Q_L^2)+(P_L-Q_L)}{D+(P_L-Q_L)^2}\right\} \tag{5·38}$$

Kroek と Wit はこの両式を最良線型不偏指数(best linear unbiased index)と名づけた。しかしこの両式は前述の Theil 指数の上方偏倚を除くための技術的な分析であって，本質的には Theil の考え方と変りはない[16]。

16) Kroek と Wit はかれらの指数を不偏であるといっているが，これは推測統計学でいうような厳密な意味ではない。すなわち期待値についての意味ではない。

6. 指数の最小二乗推定値

Theil の最良線型指数は principal component 法を適用した一種の最小二乗推定式と考えられるが，(5·2) によってあらわされるベクトル p はすでに指数の形をとっており，α はウェイトを示していることはすでに説明したとおりである。

ここでは，Theil たちとは別の考え方によって，物価指数および数量指数の意味を再検討することにしよう。その考え方は，まず個別価格指数および個別数量指数をモデル化し，これから総合的な物価指数ならびに数量指数を導びくのである。順序として物価指数の問題から初める。

A. 物価指数

基本的な考え方は，つぎの式が示すように，個別価格指数 α_t を最小二乗法によって推定することである。

$$p_{it}=\alpha_tp_{i0}+e_{it}\ (i=1, 2, \cdots, n\,;\, t=1, 2, \cdots, T) \tag{6·1}$$

前述のように添字の初めのものは商品番号を，2番目の添字は時点を示す。n は商品の総数であり，T は時点の総数である。上式において e_{it} は第 i 番目の t 時点における p_{it} の理論値 α_tp_{i0} からの乖離をあらわす。

いま t 時点における価格ベクトル，乖離ベクトルをそれぞれ

$$P_t=\begin{bmatrix}P_{1t}\\ \vdots \\ p_{nt}\end{bmatrix},\qquad e_t=\begin{bmatrix}e_{1t}\\ \vdots \\ e_{nt}\end{bmatrix}$$

とすれば，(6·1) は

$$P_t=\alpha_tP_0+e_t\quad (t=1, 2, \cdots T) \tag{6·2}$$

上式において α_t はスカラーである。通常の最小二乗法では $e_t'e_t$ を最小にすることを考えるのであるが，ここでは一種の加重最小二乗法 (weighted least square method)[17] を採用しよう。ウェイト・マトリックスをつぎのように定義する。

$$w=\begin{bmatrix}w_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & w_n\end{bmatrix}$$

そうすれば，この場合最小にすべき値は

$$\mathrm{tr}(e_te_t'w) \tag{6·3}$$

17) N. R. Draper and H. Smith, *Applied Regression Analysis*, New York, 1966, pp. 77—81. Gerhard Tintner, *Econometrics*, New York, 1952, pp. 121—153.

である。これを計算すれば

$$\mathrm{tr}(e_t e_t' w) = \mathrm{tr}(P_t P_t' w) - 2\alpha_t \mathrm{tr}(P_0 P_t' w) + \alpha_t^2 \mathrm{tr}(P_0 P_0' w) \qquad (6\cdot4)$$

となるから，上式を α_t について偏微分した結果をゼロとおけば

$$\alpha_t = \frac{\mathrm{tr}(P_0 P_t' w)}{\mathrm{tr}(P_0 P_0' w)} \quad (t=1, 2, \cdots, T) \qquad (6\cdot5)$$

がえられる。ここで w をどのようにとればよいかを検討してみる。明らかにスカラー w_i を

$$w_i = \frac{q_{i0}}{p_{i0}} \qquad (6\cdot6)$$

とすれば，(6•5) はラスパイレスの物価指数となり，

$$w_i = q_{it}/p_{i0} \qquad (6\cdot7)$$

とおけば，(6•5) はパーシェの物価指数となる。というのは，(6•5) の右辺の分子は

$$\mathrm{tr}(P_0 P_t' w) = \sum_{i=1}^{n} w_i p_{i0} p_{it} \qquad (6\cdot8)$$

であり，分母は

$$\mathrm{tr}(P_0 P_0' w) = \sum_{i=1}^{n} w_i p_{i0}^2 \qquad (6\cdot9)$$

となるから (6•5) は

$$\alpha_t = \frac{\sum_i w_i p_{i0} p_{it}}{\sum_i w_i P_{i0}^2} \qquad (6\cdot10)$$

となる。

この式に (6•6) を代入すればラスパイレス式となることがわかり，またこの式に (6•7) を代入すれば，パーシェ式となることがわかるからである。問題はこのウェイトの意味であるが，(6•6) は，基準時点において第 i 番目の商品を1円につきどれだけ購入できるかという貨幣の個別購買力を意味している。(6•7) は同じく貨幣の購買力を示すものであるが，この場合は基準時点でえた1円をもって t 時点ではどれだけの商品を購入できるかという事実をあらわしている。前者の購買力をかりに基準時点の貨幣の個別購買力，後者の購買力を比較時点の貨幣の個別購買力と名づけるならば，以上の事実はつぎのように要約することができる。

> 個別価格関係式 (6•1) のなかの係数 α_t の加重最小二乗推定値において，ウェイトを基準時点の貨幣の個別購買力にとった場合はラスパイレス式がえられ，比較時点の貨幣の個別購買力にとった場合はパーシェ式がえられる。

以上は t 時点という単一時点についての考察であるが，つぎには全時点についての総合モデルについて考えてみよう。そのためには，(6•2) 式を基礎として

$$[P_1 \cdots P_T] = [\alpha_1 P_0 \cdots \alpha_T P_0] + [e_1 \cdots e_T]$$

あるいは

$$P = P_0 \alpha' + e \qquad (6\cdot11)$$

ここに

$$P = [P_1 \cdots P_T] = \begin{bmatrix} p_{11} \cdots p_{1T} \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{n1} \cdots p_{nT} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_T \end{bmatrix}$$

$$e = [e_1 \cdots e_T] = \begin{bmatrix} e_{11} \cdots e_{1T} \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_{n1} \cdots e_{nT} \end{bmatrix}$$

とおく。

さて α の推定がここでの問題であるが，この場合も加重最小二乗法を採用する。ウェイト w はまえと同じ対角マトリックスである。

まず最小にすべき値は $\mathrm{tr}(wee')$ である。

$$\mathrm{tr}(wee') = \mathrm{tr}(wPP') - 2\mathrm{tr}(wP_0\alpha' P') + \mathrm{tr}(wP_0\alpha'\alpha P_0') \qquad (6\cdot12)$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{tr}(wee') = -2P'wP_0 + 2\alpha P_0' w P_0 = 0 \qquad (6\cdot13)$$

これから

$$P'wP_0 = \alpha P_0 w P_0$$

となるが，これを計算すれば

$$P'wP_0 = \begin{bmatrix} \sum_i w_i p_{i0} p_{i1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_i w_i p_{i0} P_{iT} \end{bmatrix}$$

$$\alpha P_0' w P_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \sum_i w_i p_{i0}^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_T \sum_i w_i p_{i0}^2 \end{bmatrix}$$

したがって

$$\alpha_t = \frac{\sum_i w_i p_{i0} p_{it}}{\sum_i w_i p_{i0}^2} \quad (t=1, 2, \cdots, T) \qquad (6\cdot14)$$

この値は (6•5) とまったく同じであることがわかるが，このことは当然である。その理由は，(6•4) と (6•12) とは同じであるからである。すなわち

$$\mathrm{tr}(e_t e_t' w) = \mathrm{tr}(wee') = \sum_i w_i e_{it}^2$$

である。このことから，総合モデル (6•11) でも個別モデル (6•2) でも，加重最小二乗法を適用してえられる平均値 α_t の値は同一であることがわかる。

B. 数量指数

物価指数の分析と並行して，数量指数の問題を考えることができる。まず，t 時点における数量ベクトルおよび乖離ベクトルを

$$Q_t=\begin{bmatrix} q_{1t} \\ \vdots \\ q_{nt} \end{bmatrix}, \quad d_t=\begin{bmatrix} d_{1t} \\ \vdots \\ d_{nt} \end{bmatrix}$$

と定義すれば，個別数量の関係式は

$$Q_t=\beta_t Q_0+d_t \quad (t=1, 2, \cdots, T) \qquad (6\cdot15)$$

となる。上式中の β_t はスカラーである。加重最小二乗法を適用して β_t の値を推定するに際して，ウェイト・マトリックスをつぎのように定義する。

$$v=\begin{bmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n \end{bmatrix}$$

そこで

$$\mathrm{tr}\,(d_t d_t' w)$$

を β について偏微分して，その結果をゼロにおけば

$$\beta_t=\frac{\mathrm{tr}\,(Q_0 Q_t' v)}{\mathrm{tr}\,(Q_0 Q_0' v)}=\frac{\sum_i v_i q_{i0} q_{it}}{\sum_i v_i q_{i0}^2} \qquad (6\cdot16)$$

総合モデルを作るには，つぎのベクトルとマトリックスとを使用する。

$$Q=[Q_1 \cdots Q_T]=\begin{bmatrix} q_{11} \cdots q_{1T} \\ \cdots\cdots \\ q_{n1} \cdots q_{nT} \end{bmatrix}, \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_T \end{bmatrix}$$

$$d=[d_1 \cdots, d_T]=\begin{bmatrix} d_{11} \cdots d_{1T} \\ \cdots\cdots \\ d_{n1} \cdots d_{nT} \end{bmatrix}$$

そこで β に関して最小にすべき値は

$$\mathrm{tr}\,(vdd')=\mathrm{tr}\,(dQQ')-2\mathrm{tr}\,(dQ_0\beta' Q')+\mathrm{tr}\,(dQ_0\beta'\beta Q_0)$$

であり

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\mathrm{tr}\,(vdd')=-2Q'dQ_0+2\beta Q_0' dQ_0=0 \qquad (6\cdot17)$$

この式から

$$\beta_t=\frac{\sum_i v_i q_{i0} q_{it}}{\sum_i v_i q_{i0}^2} \quad (t=1, 2, \cdots, T) \qquad (6\cdot18)$$

がえられる。以上の分析に関するかぎり，物価指数の場合とまったく同じ結論がえられる。しかしこれからさきは，数量指数特有の問題である。

いま(6•16)もしくは(6•18)のなかのウェイト v_i につぎの値を代入することをこころみる。

$$v_i=p_{i0}/q_{i0} \qquad (6\cdot19)$$

と定義して，この値を(6•16)もしくは(6•18)に代入すれば，明らかにラスパイレスの数量指数がえられ

$$v_i=p_{it}/q_{i0} \qquad (6\cdot20)$$

を代入すれば，パーシェの数量指数がえられるとこがわかる。ところで(6•19)は(6•6)の逆数であり，(6•20)は(6•7)に対応する。

7. 最小二乗指数の性質

物価指数の分析でその基礎になった(6•1)は明記はしなかったが標本空間における関係式である。これに対して，母集団空間における関係式を

$$p_{it}=a_t p_{i0}+u_{it} \quad (i=1, 2, \cdots, n\,; t=1, 2, \cdots, T) \qquad (7\cdot1)$$

としよう。a_t は t 時点における真の物価指数であり，u_{it} は個別価格の場合の誤差項である。ここで，通常 u_{it} に課される仮定を列記する。

$$Eu_{it}=0 \qquad (7\cdot2)$$

$$Eu_{it}u_{jt}=0 \quad (i\neq j) \qquad (7\cdot3)$$

$$Eu_{it}^2=\sigma_u^2 \qquad (7\cdot4)$$

そこで(7•1)を(6•2)に代入すれば

$$\alpha_t=a_t+\frac{\sum w_i p_{i0} u_{it}}{\sum w_i p_{i0}^2} \qquad (7\cdot5)$$

となる[18]。α_t の期待値を(7•2)の仮定のもとで求めると

$$E\alpha_t=a_t+\frac{\sum w_i p_{i0} Eu_{i0}}{\sum w_i p_{i0}^2}=a_t \qquad (7\cdot6)$$

がえられるが，このことから，α_t は真の物価指数 a_t の不偏推定値であることがわかる。ところで α_t の分散 $V(\alpha_t)$ は

$$V(\alpha_t)=E(\alpha_t^2)-a_t^2 \qquad (7\cdot7)$$

であるから，$E(\alpha_t^2)$ を計算する必要がある。これには(7•5)を使って

$$E(\alpha_t^2)=a_t^2+\frac{\sum w_i^2 p_{i0}^2}{(\sum w_i p_{i0}^2)^2}\sigma_{ut}^2 \qquad (7\cdot8)$$

となるから，(7•7)より

$$V(\alpha_t)=\frac{\sum w_i^2 p_{i0}^2}{(\sum w_i p_{i0}^2)^2}\sigma_{ut}^2 \qquad (7\cdot9)$$

上式のなかの σ_{ut}^2 は t 時点における u の分散を意味する。つぎにこの分散をウェイト w_i に関して最小にすることを考える。したがって，$V(\alpha_t)$ を w_i に関して偏微分すれば

$$w_i=\frac{\sum w_i^2 p_{i0}^2}{\sum w_i p_{i0}^2}=const. \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (7\cdot10)$$

18) 以下 $\sum_i$ を $\sum$ であらわす。

がえられる。すなわち商品の種類が異ってもそのウェイトは同一でなければならない，ことがわかる。この結果を(6・10)に代入すれば

$$\alpha_t=\frac{\sum p_{i0}p_{it}}{\sum p_{i0}^2} \qquad (7\cdot11)$$

これもまた a_t の不偏推定値であることは明らかであり，しかも分散が最小であることから α_t は最良線型不偏推定値(best linear unbiased estimate)となるわけである。

さて，ここでえられた物価指数(7・11)は，以上の最良不偏性のほかどのような性質を有するか，とくにラスパイレス式およびパーシェ式に対してどのような関係を持つかを考えてみよう。そのためにいま

$$\frac{p_{it}}{p_{i0}}=x,\quad \frac{q_{i0}}{p_{i0}}=y,\quad \frac{q_{it}}{p_{i0}}=z,\quad p_{i0}^2=m \qquad (7\cdot12)$$

とする。y は貨幣の購買力を示す(6・6)であり，z はその逆数を示す(6・7)と同じである。(7・12)によって(7・11)の α_t をあらわせば

$$\alpha_t=\frac{\sum mx}{\sum m} \qquad (7\cdot13)$$

となり，ラスパイレス式は

$$P_L=\frac{\sum p_{it}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=\frac{\sum mxy}{\sum my} \qquad (7\cdot14)$$

そこで α_t と P_L との差をとれば，Bortkiewicz の関係式を誘導するのと同様の手続きによって，つぎの結果をうる。

$$P_L-\alpha_t=\frac{1}{\sum my}\sum m(x-\alpha_t)(y-W_0) \qquad (7\cdot15)$$

あるいは

$$P_L-\alpha_t=A_1r_{xy} \qquad (7\cdot16)$$

ここに

$$W_0=\frac{\sum p_{i0}q_{i0}}{\sum p_{i0}^2}=\frac{\sum my}{\sum m} \qquad (7\cdot17)$$

であって，これは y すなわち基準時点の貨幣の個別購買力 y のウェイト m による加重平均購買力である。また

$$A_1=\frac{\sigma_x\sigma_y}{W_0} \qquad (7\cdot18)$$

をあらわす。なお r_{xy} は x と y との間の相関係数 σ_x, σ_y はそれぞれ x および y の標準偏差であり

$$r_{xy}=\frac{\sum m(x-\alpha_t)(y-W_0)}{\sigma_x\sigma_y\sum m}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum m(x-\alpha_t)^2}{\sum m}}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum m(y-W_0)^2}{\sum m}}$$

である。(7・18)の A_1 はつねにプラスであり，したがって P_L と α_t との大小関係は x と y との相関係数 r_{xy} の値によって決定される。したがって，x つまり個別価格指数と y つまり基準時点の貨幣の商品別個別購買力とが正相関の場合，すなわち基準時点の個別購買力が高い商品ほど値上りが大きいという関係がある場合は，r_{xy} はプラスとなり，最良不偏物価指数 α_t はラスパイレス式 P_L より小さくなる。これとは逆に，x と y とが逆の関係にある場合には r_{xy} はマイナスとなり，したがって α_t は P_L より大きくなる。

つぎにこの α_t とパーシェ式との関係を考えてみよう。この場合パーシェ式は

$$P_P=\frac{\sum p_{it}q_{it}}{\sum p_{i0}q_{it}}=\frac{\sum mxz}{\sum mz} \qquad (7\cdot19)$$

となり，したがって

$$P_P-\alpha_t=\frac{1}{\sum mz}\sum m(x-\alpha_t)(z-W_t) \qquad (7\cdot20)$$

あるいは

$$P_P-\alpha_t=A_2r_{xz} \qquad (7\cdot21)$$

ここに

$$W_t=\frac{\sum p_{i0}q_{it}}{\sum p_{i0}^2}=\frac{\sum mz}{\sum m} \qquad (7\cdot22)$$

であり，これは比較時点における貨幣の個別購買力 z を m によって加重した加重平均購買力である。また

$$A_2=\frac{\sigma_x\sigma_z}{W_t} \qquad (7\cdot23)$$

であり，この値はつねにプラスである。したがって，もし x と z との間の相関係数 r_{xz} がプラスの場合は，(7・21)によって α_t は P_P よりも小さくなり，この反対に，r_{xz} がマイナスの場合は，α_t は P_P よりも大きくなる。

ところで，基準時点に対して比較時点の価格が高くなった個別商品を考えてみると，その商品についての貨幣の個別購買力は減少するのが一般の場合と考えられる。したがって，r_{xz} は普通の場合はマイナスとなるであろう。このことから，α_t は P_P よりも大きいものと考えて差し支えない。これに対して，α_t と P_L との間には，このような一方的な大小関係は見られないから，$\alpha_t<P_L$ の場合も，$\alpha_t>P_L$ の場合もありうる。

この節の最後に α_t の限界を求めてみよう。これは，α_t が最小二乗推定値であるから，この推定値の場合の信頼限界を求めればよい。p_{i0} と p_{it} との真の関係は

(7•1) で与えられた。この値を (7•11) に代入すれば

$$\alpha_t=a_t+\frac{\sum u_{it}p_{i0}}{\sum p_{i0}^2} \qquad (7\cdot24)$$

これから

$$E\alpha_t=a_t \qquad (7\cdot25)$$

がえられるが，このことは α_t は真の値 a の不偏推定値であることを示すことはいうまでもない。ところで

$$E(\alpha_t^2)=a_t^2+E\left(\frac{\sum u_{it}p_{i0}}{\sum p_{i0}^2}\right)^2=a_t^2+\frac{\sigma_{ut}^2}{\sum p_{i0}^2}$$

となるから，この式を (7•7) に代入すれば

$$V(\alpha_t)=\frac{\sigma_{ut}^2}{\sum p_{i0}^2} \qquad (7\cdot26)$$

がえられる。いま (6•2) から e_{it} を求め，この式のなかの p_{it} に (7•1) を代入すれば

$$e_{it}=-(\alpha_t-a_t)p_{i0}+u_{it}$$

これから

$$\sum e_{it}^2=(\alpha_t-at)^2\sum p_{i0}^2+\sum u_{it}^2-2(\alpha_t-a_t)\sum u_{it}p_{i0}$$

したがって

$$E\sum e_{it}^2=(\sum p_{i0}^2)E(\alpha_t-a_t)^2+\sum Eu_{it}^2 -2E[(\alpha_t-a_t)\sum u_{it}p_{i0}] \qquad (7\cdot27)$$

上式において右辺第1項は (7•24) から σ_{ut}^2，第2項は $n\sigma_{ut}^2$，第3項は $-2\sigma_{ut}^2$ となることが容易に知れるから，これらの値を (7•27) に代入して次式をうる。

$$E\sum e_{it}^2=(n-1)\sigma_{ut}^2 \qquad (7\cdot28)$$

そこで σ_{ut}^2 の推定値 $\hat{\sigma}_{ut}^2$ を

$$\hat{\sigma}_{ut}^2=\frac{\sum e_{it}^2}{n-1} \qquad (7\cdot29)$$

と定義すれば，(7•26) を考慮することにより

$$E\hat{\sigma}_{ut}^2=\frac{E\sum e_{it}^2}{n-1}=\sigma_{ut}^2 \qquad (7\cdot30)$$

がえられる。これは $\hat{\sigma}_{ut}^2$ が σ_{ut}^2 の不偏推定値であることを示している。したがって，真の値 at の限界はつぎのようにあらわすことができる。

$$\alpha_t-t(n-1,\alpha)\frac{\hat{\sigma}_{ut}^2}{\sum p_{i0}^2}\leqq a_t\leqq\alpha_t+t(n-1,\alpha)\frac{\hat{\sigma}_{ut}^2}{\sum p_{i0}^2} \qquad (7\cdot31)$$

上式のなかの $t(n-1,\alpha)$ は自由度 $n-1$ で α 水準のときの t の値である。

つぎにラスパイレス式およびパーシェ式の信頼限界を求めるには，以上とまったく同様の手続きを踏めばよい。この場合にも (6•1) と (7•1) が分析の基礎となる。

まず，ラスパイレス式 α_t' は (6•10) の w_i に (6•6) を代入して

$$\alpha_t'=\frac{\sum p_{it}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}}=a_t'+\frac{\sum u_{it}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}}$$

これから

$$E\sum e_{it}^2=\left[n-2+\frac{\sum p_{i0}^2\sum q_{i0}^2}{(\Sigma p_{i0}q_{i0})^2}\right]\sigma_{ut}^2$$

したがって σ_{ut}^2 の不偏推定値 $\hat{\sigma}_{ut}^2$ は

$$\hat{\sigma}_{ut}^2=\frac{\sum e_{it}^2}{n-2+\dfrac{\sum p_{i0}^2\sum q_{i0}^2}{(\sum p_{i0}q_{i0})^2}} \qquad (7\cdot32)$$

となる。この場合の α_t の分散 $V(\alpha_t')$ は

$$V(\alpha_t')=\frac{\sum q_{i0}^2}{(\sum p_{i0}q_{i0})^2}\sigma_{ut}^2 \qquad (7\cdot33)$$

であるから，真のラスパイレス式の値 a_t' の信頼限界は

$$\alpha_t'-t(n-1,\alpha)\frac{\sum q_{i0}^2}{(\sum p_{i0}q_{i0})^2}\hat{\sigma}_{ut}^2\leqq a_t'$$

$$\leqq\alpha_t'+t(n-1,\alpha)\frac{\sum q_{i0}^2}{(\sum p_{i0}q_{i0})^2}\hat{\sigma}_{ut}^2 \qquad (7\cdot34)$$

パーシェ式 α_t'' は (6•10) の w_i に (6•7) を代入して

$$\alpha_t''=\frac{\sum p_{it}q_{it}}{\sum p_{i0}q_{it}}=a_t''+\frac{\sum u_{it}q_{it}}{\sum p_{i0}q_{it}}$$

となり

$$E\sum e_{it}^2=\left[n-2+\frac{\sum p_{i0}^2\sum q_{it}^2}{(\sum p_{i0}q_{it})^2}\right]\sigma_{ut}^2$$

がえられる。したがって σ_{ut}^2 の不偏推定値および α_t'' の分散は，それぞれ

$$\hat{\sigma}_{ut}^2=\frac{\sum e_{it}^2}{n-2+\dfrac{\sum p_{i0}^2\sum q_{it}^2}{(\sum p_{i0}q_{it})^2}} \qquad (7\cdot35)$$

$$V(\alpha_t'')=\frac{\sum q_{it}^2}{(\sum p_{i0}q_{it})^2}\sigma_{ut}^2 \qquad (7\cdot36)$$

となる。そこで真のパーシェ式の値 a_t'' の信頼限界は次式であらわされる。

$$\alpha_t''-t(n-1,\alpha)\frac{\sum q_{it}^2}{(\sum p_{i0}q_{it})^2}\hat{\sigma}_{ut}^2\leqq a_t''$$

$$\leqq\alpha_t''+t(n-1,\alpha)\frac{\sum q_{it}^2}{(\sum p_{i0}q_{it})^2}\hat{\sigma}_{ut}^2$$

いうまでもないことであるが，ラスパイレス式およびパーシェ式とも自由度は $n-1$ である。この両式の場合，$\sum q_{i0}^2$ および $\sum q_{it}^2$ はなまの数量の合計を考えることは無意味であるが，たとえば産業連関表の金額表からえられる数量価値を前提としたものである[19]。

[山田勇——一橋大学経済研究所]

19) 山田勇『産業連関分析の理論と計測』 勁草書房 1961, pp. 281—289.