公共財と最適計画の解法

青木　昌彦

I

周知のように，公共財(public goods)が存在する場合に，資源配分の最適解がみたす条件は，サミュエルソンの著名な論文[7]によって与えられた。しかし，バローネにたいするミーゼス，ハイエクの議論をもちだす迄もなく，解の数学的特徴づけは，ただちにその解を実際にみいだすことのできる数学的な，或いは制度的な手つづきが存在する事を意味しない。規模の経済性や外部性——公共財はその特殊な一例であるが——の現象から自由な，ハーウィッツのいわゆる古典的な経済環境においては，最適解はある所得配分に対応した競争市場の均衡解と同一視されうる。規模の経済が存在する場合も，期待価格の形成や投資資金の配分などによって修正もしくは補完された模索法が，最適解をすくなくとも局所的にはさがしうる([1],[2],[3])。しかし，公共財の存在する場合における最適問題の市場における解法には，すでにサミュエルソン[7]によってあきらかにされた様に，本質的な困難がよこたわる。もし個人が公共財にたいする真の選好を市場において顕示しなくても，彼は公共財の性質上その消費から排除されない，といういわゆる“ただ乗り問題”(the free rider problem)が生ずるからである。

この困難にかんがみて，サミュエルソンは最近公刊された論文[8]において，計画当局による最適条件方程式の解法として，擬需要解法(a pseudo-demand algorithm)なるものを提案した。この提案の骨子は次のようなものである：計画当局は，それぞれの消費者の無差別関数の情報をなんらかの手段で知っているレフェリーを任命する。レフェリーは，消費者の予算制約条件下の効用最大化行動をシミュレートして，彼の私的財と公共財にたいする擬需要関数を計算する。この擬需要関数は，レフェリーの調整者に伝達され，調整者は，すべての私的財市場において需給が一致し，公共財の需要はすべての消費者において等しくなるという擬一般均衡問題をとく。しかし，例えこのようなレフェリーが存在しえても，経済の組織構造や，経済環境に関する情報が余程単純でないと，その解法の実行は簡単ではないであろう。ある質問に答えて，サミュエルソンが，多分このような手つづきは“擬解法”(pseudo-algorithm)とよばれるべきだった，と答えたのもこのような困難を認識したからであろう([6], p. 508)。

したがって，さほどの情報量の交換を必要とすることなく，公共財(又は，社会資本)の最適供給水準を位置づける事のできる“解法”をみいだすという任務は，いぜん未解決のまゝ残されているわけである。本論文の目的は，公共財の存在下における最適問題の解法を二つ提案し，それらの特性を特に情報交換量という点で比較・検討する事にある。その際，解法が公共財のありうべき技術的性格，すなわち不分割性(indivisibility)の現象に対処しうるかどうかに特別の注意が払われるであろう。

II

この論文では，その目的がはっきりとさだめられた，すなわちその選好が単一の目的関数によってあらわされた経済組織を考える。生産部門は二つのサブグループに分割され，それぞれ公共財，私的財を生産する。公共財の産出セクターによって生産される財は，両セクターにおいて中間投入財(社会資本)として使用されると同時に，最終消費セクターによっても使用される。最適計画問題とは，私的財と公共財の消費(使用)量にいぞんする目的関数の値を最大にする様に稀小資源を各生産単位の間に配分することである。

今，財の種類は $m+s$ 個存在するとしよう。このうち番号 $j=1, \cdots, m$ で表示される財は公共財であり，番号 $j=m+1, \cdots, m+s$ で表示される財は私的財である。生産単位の数は $m+n$ で，番号 $i=1, \cdots, m$ で表示される単位は公共財生産単位，番号 $i=m+1, \cdots, m+n$ で表示される生産単位は，私的財生産単位とする。第 j 公共財は，第 j 生産単位 $(j=1, \cdots, m)$ によってのみ供給されるものとしよう。したがって，公共財の初期存在量も当該単位によって保有されているものとする。モデルを定式化するために次のような記号を導入しよう。

$x=(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_{m+s})=$ 最終消費ヴェクター；

$y^i=(y_1^i, \cdots, y_j^i, \cdots, y_{m+s}^i)$＝第 i 生産単位の投入産出ヴェクター $(i=1, \cdots, m+n)$；

$w=(w_1, \cdots, w_j, \cdots, w_{m+s})$＝財の初期保有量ヴェクター；

財の投入産出ヴェクターにおいて，正数は当該単位の産出量，負数は投入量をあらわす，という約束にしたがう。

第 i 生産単位の技術的可能性は，ある微分可能な(生産)関数 F^i にたいし

(1)　$$F^i(y^i) \geqq 0 \quad (i=1, \cdots, m+n)$$

をみたすヴェクター y^i の集合によってあらわされるものとする。すでになされた仮定によって，そのような y^i は必ず，符号条件：$y_j^i \leqq 0 (j=1, \cdots, m;\ i \neq j)$ をみたす。

次に経済組織の目的は，最終消費ヴェクターに依存する，微分可能，単調増加の凹関数

(2)　$$U(x)$$

によってあらわされるものとする。単純に，$x \geqq 0$ のみが最終消費可能で，U は $m+s$ 次元空間の正象限の上で定義されている，とする。最後に，第 j 公共財の供給量：

(3)　$$z_j=y_j^j+w_j (j=1, \cdots, m)$$

を導入する事により，公共財，私的財の需給条件：

(4)　$$\begin{aligned} & x_j=z_j (j=1, \cdots, m), \\ & y_j^i=-z_j (i, j=1, \cdots, m;\ j \neq i), \\ & \sum_{i=1}^{m+n} y_j^i+w_j-x_j \geqq 0 (j=m+1, \cdots, m+s) \end{aligned}$$

がみたされなければならない。

最適計画問題とは，条件(1)，(3)，(4)のもとで目的関数(2)を最大にするような $x, y^i (i=1, \cdots, m+n)$ をみいだすことである。我々は，この計画問題の解——以下最適解と呼ぶ——が必ず存在するものとして，そのような解を x^*, y^{i*} で記そう。有名なキューン・タッカーの条件により，(ゆるい正規化条件のもとに)，最適解は，必ず次のような条件をみたす。(コーナー解は無視した)

$$\begin{aligned} & U_j^*=p_j (j=1, \cdots, m+s) \\ & q_j^i=p_j+\sum_{i \neq j}^{m+n} q_j^i (j=1, \cdots, m) \\ & F_j^{i*}/F_{m+s}^{i*}=q_j^i/p_{m+s} \\ & (i=1, \cdots, m+n, j=1, \cdots, m) \\ & F_j^{i*}/F_{m+s}^{i*}=p_j/p_{m+s} \\ & (i=1, \cdots, m+n, j=m+1, \cdots, m+s)\ ; \end{aligned}$$

で，ここに

p_j＝第 j 財にたいする最終消費セクターの(影の)需要価格 $(j=1, \cdots, m+s)$

q_j^i＝第 j 公共財の(影の)供給価格 $(j=1, \cdots, m)$

q_j^i＝第 j 公共財にたいする第 i 生産単位の(影の)需要価格 $(i=1, \cdots, m+n;\ j=1, \cdots, m)$

で，かつ，F_j^{i*} は，F^i の第 j 変数に関する偏微分 F_j^i が $y^i=y^{i*}$ で評価されたものである。この条件は，公共財が主として，中間財として使用される場合に適用されたサミュエルソンの条件に他ならない。もちろん，生産関数にたいする付加的条件をぬきにしては，このような条件をみたす x, y^i は，最適解以外にも存在しうる。

III

いま，この経済組織の情報保有構造として，(1)各公共財生産単位は，当該公共財の初期保有量と自己の生産関数の形状；(2)各私的財生産単位は，自己の生産関数の形状；(3)計画当局は，目的関数の形状と私的財の初期存在量；に関する情報をそれぞれ有するが，その他の知識は一切有しない，としよう。したがって，最適解をみいだすためには，組織の内部において，情報の交換が行われる必要があるが，すべての情報を計画当局に一挙に集中するのには，組織があまりに巨大であるか，技術に関する情報があまりに複雑である，としよう。(このような方法の欠陥については，[2]第一章第三節を参照されたい。)したがって，情報交換の必要量を節約しつゝ，最適解に逐次的に接近していく方法をみいだす事が要請されているとしよう。

さて，そのような方法を二つ提示するわけであるが，そのいずれにおいても情報の交換は，離散的な時においてのみ行われるものとし，この時を $t=0, 1, \cdots$ であらわそう。そして，t を情報交換の第 t ステップ，又は単に第 t ステップと呼ぶことにする。

まず，第一の方法では計画当局は，一人のレフェリーを指命し，目的関数に関する情報を委譲するものとする。このレフェリーは，ヘルムスマンと呼ばれ，番号0で表示される。このレフェリーをまじえた経済組織内部の情報交換＝意思決定のプロセスは次のように描写される。

(1)生産単位［ヘルムスマン］の通信符号。第 i 生産単位 $(i=1, \cdots, m+s)$［ヘルムスマン］は，第 t ステップにおいて，私的財の需給量 $y_j^i(t)$［需要量 $x_j(t)$］$(j=m+1, \cdots, m+s)$ と共に，公共財の供給水準についての提案 $z_j^i(t)$［$x_j(t)$］$(j=1, \cdots, m)$ を行う。

(2)計画当局の通信符号。計画当局は，第 t ステップにおいて，私的財の価格 $p_j(t)$ $(j=m+1, \cdots, m+s)$ を公表すると共に，第 i 単位 $(i=1, \cdots, m+s)$［ヘルムスマン］に各公共財の単位当り使用料 $q_j^i(t)$［$p_j(t)$］$(j=1, \cdots, m)$ を通告する。(ただし，$j=i$ の時は，第 j 公共財生産単

位への単位あたり補助金をあらわすものとする。) $t=0$ において，計画当局は，条件 $q_j{}^j(0)=p_j(0)+\sum_{i\neq j}^{m+n} q_j{}^i(0)$ $(j=m+1, \cdots, m+s)$ のもとでこれらの値を任意の水準に設定する。

(3)生産単位の反応ルール。第 t ステップにおいて，第 j 生産単位は，技術的制約条件と計画当局により公表された価格，使用料，補助金の水準のもとで，純収入が最大になるような計画を作成し，計画当局に報告する。すなわち，条件:

$$F^i(y^i)\geqq 0$$

$$y_j{}^i=\begin{cases} z_j{}^i-w_j (j=i \text{ の時}) \\ -z_j{}^i \quad (j=1, \cdots, m;\ i\neq j)\end{cases}$$

のもとで，

$$\sum_{j=1}^{m} q_j{}^i(t)y_j{}^i+\sum_{j=m+1}^{m+s} p_j(t)y_j{}^i$$

を最大にするような，$z_j{}^i$, $(j=1, \cdots, m)$, $y_j{}^i(j=m+1, \cdots, m+s)$ をそれぞれ $z_j{}^i(t)$, $y_j{}^i(t)$ として，計画当局に伝達する。

(4)ヘルムスマンの反応ルール。第 t ステップにおいて，ヘルムスマンは，目的関数値と私的，公共財の消費費用の差

$$U(x)-\sum_{j=1}^{m+s} p_j(t)x_j$$

を最大にするような消費計画 x_j を計画当局に伝達する。

(5)計画当局の改訂ルール。第 $t+1$ ステップにおいて計画当局は，各単位にたいする公共財の単位当り使用料又は補助金，及び私的財の価格を次のようなルールにもとづいて改訂する。

$$p_j(t+1)=p_j(t)+\alpha_j[x_j(t)-z_j{}^j(t)]\,(j=1, \cdots, m)$$

$$p_j(t+1)=p_j(t)+\beta_j[x_j(t)-w_j-\sum_{i=1}^{m+n} y_j{}^i(t)]$$

$$(j=m+1, \cdots, m+s)$$

$$q_j{}^i(t+1)=q_j{}^i(t)+\gamma_j[z_j{}^i(t)-z_j{}^j(t)]$$

$$(j=1, \cdots, m;\ i=1, \cdots, m+n;\ i\neq j)$$

$$q_j{}^j(t+1)=p_j(t)+\sum_{i\neq j}^{m+n} q_j{}^i(t+1)\,(j=1, \cdots, m)$$

ここに，$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ は調整速度常数である。すなわち，計画当局は，公共財の各単位に対する使用料を，もしその単位による供給水準の提案が，当該公共財生産単位による供給水準の提案を上廻った場合に引き上げ，下廻った場合に引き下げる。そして単位当り使用料の総額は，当該生産単位に単位当り補助金として与えられる。私的財の価格は，いわゆる“需要供給の法則”に応じて上下される。

(6)決定ルール。もし情報交換が，第 T ステップで終了した時には，公共財の産出水準としては，当該生産単位の提案 $y_j{}^j(T)(j=1, \cdots, m)$ が採用される。私的財の需給については，各生産単位の需給計画 $y_j{}^i(T)(i=1, \cdots, m+n, j=m+1, \cdots, m+s)$ が採用される。

このように，各単位が単に自己の産出量を提案するばかりでなく，他単位の産出する公共財についてもその供給水準を提案するというアイデアは，デーヴィス，ホインストン [4] によって外部経済の存在下における最適問題の解法として，はじめて提唱された。しかし，彼らのとり扱ったのは，二生産単位が相互的な外部的影響を及ぼしている場合で，又，生産関数ではなく費用関数によって各単位の技術的条件が定式化されている。

さて，以上に展開された解法の特性として，どのような点が指適されうるであろうか。

第一に，模索法に一般的にあてはまる欠陥として，マランヴォー [5] があげた点であるが，情報交換が有限のステップ $T<\infty$ で打ち切られた時にえられる最終解が，実現可能であるという保証はない。いいかえれば，私的財の純供給が正であるという保証はない。

第二に，たとえ情報交換の度数 T を無限に大きくしても，最終解 $y^i(T)(i=1, \cdots, m+n)$ が最終解に収束するためには

仮定 U　目的関数が強い凹関数(strictly-concave function)である，すなわち，限界効用が逓減する；

仮定 P　生産関数が強い凹関数である。すなわち技術は規模に関する収獲の逓減にしたがう；

の二つの仮定がみたされなければならない [3]。特に，第二の仮定は，公共財の存在のもとではなはだ非現実的なものである。すなわち，道路，港湾などのように，公共財は，生産における規模の経済性や，使用における機能の非分割性によって特徴づけられるものが多い。

第三に，この解法では，依然として，情報の交換量が多い。計画当局に生産単位に対して，私的財の価格 s 個プラスそれぞれの生産単位およびヘルムスマンにたいして区別された公共財の使用料又は補助金 m 個，合計 $s+m(m+n+1)$ 個の通信符号を送らなければならない。

このような点からみて，上に提案されたような解法は，いまだ完全に満足しうるものとはいえないであろう。

IV

では，次に上のような事態におそらくよりよく対処しうるような，別の解法を提案しよう。この方法では，必

ずしも計画当局とヘルムスマンを区別する必要はないが，私的財生産単位と公共財生産単位とを区別せねばならない。

(1)生産単位の通信符号。第 t ステップにおいて，第 i 単位 $(i=1, \cdots, m+n)$ は，私的財の需給量 $y_j{}^i(t)(j=m+1, \cdots, m+s)$ と，公共財の単位当り評価額 $q_j{}^i(t)(j=1, \cdots, m)$ を計画当局に送る。

(2)計画当局の通信符号。第 t ステップにおいて計画当局から送られる通信は，公共財の供給水準の提案 $z_j(t)$ $(j=1, \cdots, m)$ 及び私的財の価格 $p_j(t)$ $(j=m+1, \cdots, m+s)$ である。計画当局は，初期ステップにおいてこれらを任意の水準にさだめる。

(3)公共財生産単位の反応ルール。第 t ステップにおいて，第 i 公共財生産単位 $(i=1, \cdots, m)$ は，計画当局が提案した公共財の供給水準を最小の費用で実現する計画をたて，それに必要な私的財の需要量を計画当局に報告する。すなわち，条件

$$\mathrm{F}^i(y^i) \geqq 0$$

$$y_j{}^i = \begin{cases} z_j(t) - w_j & (j=i \text{ の時}) \\ -z_j(t) & (j=1, \cdots, m;\ j \neq i) \end{cases}$$

のもとで

$$-\sum_{j=m+1}^{m+s} p_i(t) y_j{}^i$$

を最小にする解 $y_j{}^i(j=m+1, \cdots, m+s)$ を $y_j{}^i(t)$ として，計画当局に伝達する。

(4)私的財生産単位の反応ルール。第 t ステップにおいて，第 i 私的財生産単位 $(i=m+1, \cdots, m+n)$ は，計画当局が公表した公共財の供給計画と私的財の価格を与件として，利潤最大をもたらす生産計画をたて，私的財の需給量を計画当局に報告する。すなわち，条件:

$$F^i(y^i) \geqq 0$$

$$y_j{}^i = -z_j(t)(j=1, \cdots, m)$$

のもとで

$$\sum_{j=m+1}^{m+s} p_j(t) y_j{}^i$$

を最大にするような解 $y_j{}^i(j=m+1, \cdots, m+s)$ を $y_j{}^i(t)$ として，計画当局に報告する。

(5)計画当局の価格改訂ルール。第 $t+1$ ステップにおいて，計画当局は，次のような公式にもとづいて，自己の公共財評価額及び私的財価格を改訂する:

$$p_j(t+1) = U_j(x(t))(j=1, \cdots, m+s),$$

ここに U_j は目的関数 U の第 j 財に関する偏微分であり，かつ

$$x_j(t) = z_j(t) \quad (j=1, \cdots, m)$$

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{m+n} y_j{}^i(t) \quad (j=m+1, \cdots, m+s)$$

である。すなわち，計画当局は，私的財の各単位による需給を合算して，生産部門からの純供給量を計算し，その供給量をちょうど吸収しうるような需要価格を新しい価格として公表する。公共財の評価額は，計画当局において記憶される。

(6)生産単位の反応ルール。第 $t+1$ ステップにおいて，第 i 生産単位 $(i=1, \cdots, m+n)$ は，計画当局から受理した私的財の価格 $p_j(t+1)(j=m+1, \cdots, m+s)$ と自己が第 t ステップでたてた生産計画 $y^i(t)$ にもとづいて，公共財の評価額;

$$q_j{}^i(t+1) = \sum_{k=m+1}^{m+s} p_k(t+1) F_j{}^i / F_k{}^i (j=1, \cdots, m)$$

を計算し，計画当局に報告する。

(7)計画当局の公共財需給計画改訂ルール。第 $t+1$ ステップにおいて計画当局は，公共財の供給計画を公式;

$$z_j(t+1) = z_j(t) + \alpha_j \Big[p_j(t+1) + \sum_{i \neq j}^{m+n} q_j{}^i(t+1) - q_j{}^j(t+1) \Big] \quad (j=1, \cdots, m)$$

にもとづいて改訂する。すなわち，公共財の使用者による評価額総額が，供給者による評価額を上廻った場合には引き上げる。

(8)決定ルール。第 T ステップにおいて，情報交換が終了した時には，計画当局による公共財の供給計画 $z_j(T)$ $(j=1, \cdots, m)$ と各単位による私的財の需給計画 $y_j{}^i(T)$ $(i=1, \cdots, m+n, j=m+1, \cdots, m+s)$ が採用される。

このような“解法”がうまく働くためには，次のような二つの仮定が必要である。

仮定 U'　すべての財の正の水準での最終消費が不可欠(indispensable)である。すなわち，任意の x^1, $x^2 \geqq 0$ にたいして，もし，

$$x_j{}^1 = 0 \quad (\text{ある } j \text{ に対して}),$$

$$x_j{}^2 > 0 \quad (\text{すべての } j \text{ に対して})$$

なら必ず

$$U(x^1) < U(x^2);$$

仮定 P'　すべての生産関数 F^i は，次のような意味において私的財に関し強く擬凹関数(strictly quasi-concave function)である: (1)をみたす，任意の y', y'' にたいして，もし

$$y'_j = y_j'' (\text{すべての } j=1, \cdots, m)$$

$$y'_j \neq y_j'' (\text{ある } j=m+1, \cdots, m+s)$$

なら，任意の $0 < \alpha < 1$ にたいして

$$F^i(\alpha y' + (1-\alpha) y'') > \alpha F^i(y') + (1-\alpha) F^i(y'')。$$

この仮定 P' は，仮定 P よりはるかに弱い。すなわち，それは(1)(公共財セクターにおいてはある一定水準の公共財を生産するためには，私的財の投入に関して限界代替率の逓減の法則が働く，(2)私的財セクターにおいては，もし公共財の供給水準が一定であると私的財のあいだには限界変形率の逓減の法則が働く；ということのみを要求している。したがってそれは，(1)公共財の生産に関して規模の経済性がある；(2)公共財の使用機能に関して不分割がある；という二つの重要な現象を必ずしも排除しない。このような二つの仮定のもとで次のような特性が生ずる。

第一に，もし初期ステップにおける解が実現可能なら，すなわち

$$\sum_{i=1}^{m+n} y_j^i(0) + w_j > 0 \quad (j=m+1, \cdots, m+s)$$

なら，情報交換はどのステップで打ち切られても必ず実現可能である。

第二に，解は，情報交換ステップの度数が増大するにつれ，逐次的に改良される，すなわち均衡解に達する迄

$$U(x(t+1)) > U(x(t))$$

がなりたつ。したがって，もし強い規模の経済性，又は不分割性の故に，最適解以外にも均衡解が存在したとしても，局所的に最適でない均衡解に収束するのは，偶然によってのみである。

第三に，模索法に比し，情報の必要量がずっとすくなくてすむ。すなわち，計画当局の発しなければならない通信符号の次元数は，模索法の $s+m(m+n+1)$ 個に比し，s 個の私的財価格プラス m 個の公共財の供給計画の合計 $s+m$ にすぎない。

(これらの特性に関する詳しい議論に関しては，紙面の余裕がないので [2] を参照されたい。)

参考文献

[1] M. Aoki, *Investment Planning Procedure for an Open Economy with Increasing Returns*, Discussion Paper, No. 021(Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University, 1969).

[2] 青木昌彦「組織と計画の経済理論」(岩波書店)近刊予定.

[3] K. J. Arrow and L. Hurwicz, "Decentralization and Computation in Resource Allocation," in R. W. Pfouts (ed.): *Essays in Economics and Econometrics*, (Chapel Hill: University of North Carolina Press, 1960), pp. 34–104.

[4] O. A. Davis and A. B. Whinston, "On Externalities, Information and the Government Assisted Invisible Hand," *Economica*, N. S. 33 (August 1966), 303–18.

[5] E. Malinvaud, "Decentralized Procedures for Planning," in Malinvaud (ed.): *Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning*, (London: Macmillan, 1967), pp. 170–208.

[6] J. Margolis (ed.), *Public Economics*, Proceedings of a Conference held by the International Economic Association, (London and New York: Macmillan and St. Martin's Press 1969).

[7] P. A. Samuelson, "Pure Theory of Public Expenditure and Taxation," in [6], pp. 98–123.

[8] P. A. Samuelson, "The Pure Theory of Public Expenditure," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 36 (November 1964), pp. 387–389.