予想と寡占均衡の安定性

奥口　孝二

1. 問題の所在

1財または相互に代替的な製品を少数の企業が生産する寡占行動を説明するモデルはこれまでにいろいろ考えられているが，学説史的に最も古くからあり，かつ現在においてもなお様々な観点から問題にされているものの代表例はCournotモデルである。Cournotは各企業は今期の利潤極大化産出量を決定する場合，他企業の今期の産出量は前期のそれと変らないであろうと予想するものと考えた。Quandt[10]は製品差別をともなう価格調整モデルに外挿的予想 extrapolative expectations を導入し，Cournot的予想との関係を分析し，それら2つの予想形態の stability-wise equivalence を明らかにした。Hadar[3]およびOkuguchi[7]はそれぞれ産出量調整モデルおよび価格調整モデルにおけるCournot的予想と適応的予想 adaptive expectations とについて同様の関係を明らかにした。しかし彼等は外挿的予想または適応的予想について企業間の相違を考慮しなかった。したがって，彼等は i 企業と j 企業の k 企業の産出量または価格に関する予想は同じであると仮定した。他方Okuguchi[9]は製品差別のない適応的予想体系に企業間の予想の相違を導入し，Cournot的予想と適応的予想の stability-wise equivalence を証明したが，製品差別がない場合には各企業は全ての他企業の産出量について予想する必要はなく，自己以外の全ての企業の産出量の合計に関する予想のみをたてるとよいことがわかる。本論文はそのような予想を外挿的な場合と適応的な場合とについて考え，それら予想とCournot的予想の stability-wise equivalence を明らかにすることを目的にする。

2. 外挿的予想の場合

同一の製品を競争的に生産する企業の数を n とする。需要関数は価格を p，i 企業の産出量を x_i とすると

$$(1)\quad p=a\sum_{i=1}^{n}x_i+b \quad a<0,\quad b>0$$

であらわされる。i 企業の費用関数 $C_i(x_i)$ を

$$(2)\quad C_i(x_i)=c_ix_i+\frac{d_i}{2}x_i^2+e_i,\quad c_i\geq 0,\quad e_i\geq 0$$

とすると i 企業の利潤関数 $\pi_i(x)$ は

$$(3)\quad \pi_i(x)=px_i-C_i(x_i)$$

となる。ただし，

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'。$$

したがって，i 企業が他企業の産出量に関しCournot的予想をするものと仮定すると，その利潤極大化産出量 x_i^* は

$$(4)\quad x_i^*=\frac{a}{d_i-2a}\sum_{j\neq i}x_j+\frac{b-c_i}{d_i-2a}$$

であらわされる。i 企業は実際の産出量 x_i を次式にしたがって調整するものとする。

$$(5)\quad \frac{dx_i}{dt}=k_i(x_i^*-x_i),\quad k_i>0。$$

また，利潤が極大となるためには

$$(6)\quad d_i>2a$$

が満たされねばならない。

つぎに，

$$\xi_i=\frac{a}{d_i-2a},\quad \eta_i=\frac{b-c_i}{d_i-2a}$$

と定義すると，(6)より $\xi_i<0$ となるが，さらに i 企業以外の全ての企業の産出量が0のとき i 企業の利潤極大化産出量は正でなければならぬから $\eta_i<0$ である。(4)および(5)より次式が導かれる。

$$(7)\quad \begin{bmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1 & k_1\xi_1 & \cdots & k_1\xi_1\\ k_2\xi_2 & -k_2 & \cdots & k_2\xi_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_n\xi_n & k_n\xi_n & \cdots & -k_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1\eta_1\\ k_2\eta_2\\ \vdots\\ k_n\eta_n\end{bmatrix}。$$

このCournot動学体系の係数行列を G であらわす。まず，G の対角成分が負であることに注意する。そこで，全ての i について

(8)　$\xi_i > -\dfrac{1}{n-1}$

を仮定すると，G は negative quasi-dominant diagonal をもち，G の全ての固有値の実部は負となるから Cournot 体系(7)は安定となる[1)]。

つぎに，利潤関数の定義より

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_i^2} = 2a - d_i < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_j \partial x_i} = a < 0, \quad j \neq i$$

となるから

$$\sum_{j \neq i} \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_j \partial x_i} = (n-1)a < 0$$

が導かれ，ξ_i の定義を考慮すると，i 企業の限界収入の自己の産出量に関する変化率の絶対値が i 企業の限界収入の他の全ての企業の産出量の同時的変化に関する変化率の絶対値よりも大となる場合には Cournot 的安定条件(8)が満たされることが云える。

さて，外挿的予想を導入しよう。製品差別がないので各企業は全ての他企業の産出量の合計を外挿的に予想するものと考えられるので，$x^i = \sum_{j \neq i} x_j$ で i 以外の全ての企業の実際の産出量の合計をあらわし，x^{ie} で i 企業の全ての企業の産出量の合計の予想をあらわすと，外挿的予想のもとでの動学体系はつぎのようにあらわされる。

(5)　$\dfrac{dx_i}{dt} = k_i(x_i{}^* - x_i)$,

(9)　$x^{ie} = x^i + \mu_i \dfrac{dx_i}{dt}$,

(10)　$x_i{}^* = \xi_i x^{ie} + \eta_i$。

したがって，

$$(11)\quad \begin{bmatrix} 1 & -k_1\xi_1\eta_1 & \cdots & -k_1\xi_1\eta_1 \\ -k_2\xi_2\eta_2 & 1 & \cdots & -k_2\xi_2\eta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_n\xi_n\eta_n & -k_n\xi_n\eta_n & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -k_1 & k_1\xi_1 & \cdots & k_1\xi_1 \\ k_2\xi_2 & -k_2 & \cdots & k_2\xi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n\xi_n & k_n\xi_n & \cdots & -k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1\eta_1 \\ k_2\eta_2 \\ \vdots \\ k_n\eta_n \end{bmatrix}$$

が得られる。ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 & \cdots & \xi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \xi_n & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & k_2 & \cdots \\ \vdots & & \ddots \vdots \\ 0 & \vdots & k_n \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \mu_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix},$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right)',$$

$$\gamma = (k_1\eta_1, k_2\eta_2, \cdots, k_n\eta_n)'$$

と定義し，簡単化のため $K=I$ を仮定すると上式はつぎのように書きかえられる。

(12)　$\dfrac{dx}{dt} = (I-MA)^{-1}(A-I) + (I-MA)^{-1}\gamma$。

つぎに，

$$(I-MA)^{-1}(A-I) = -I + (I-MA)^{-1}(I-M)A$$

となることに注意し，Cournot 体系の安定条件(8)を仮定し，さらに，

(13)　　$-1 < \mu_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$

が成立するものと仮定する。全ての i につき $\mu_i = 0$ となる場合，(12)は Cournot 体系に帰着する。$M \neq 0$ とすると MA は非負行列となり Frobenius 根 $\rho(MA)$ をもつが，仮定(8)および(13)より $\rho(MA) < 1$ となり $(I-MA)^{-1}$ は非負行列になる。そこで

$$B = [b_{ij}] = (I-MA)^{-1}(I-M)A \leqq 0,$$

$$C = [c_{ij}] = -B \geqq 0$$

となり C は Frobenius 根 $\rho(C)$ をもつ[2)]。ここで2つの場合を考える必要がある。1つは全ての μ_i が等しい場合で他は少なくとも2つの μ_i の値が相違する場合である。まず，$\mu_i = \mu$, $i = 1, 2, \cdots, n$ となる場合を考えよう。そのため，

$$D = [d_{ij}] = (I-MA)^{-1}$$

とおき，(8)を考慮すると

$$(14)\quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = -(1-\mu)(n-1)\sum_{i=1}^{n} d_{ij}\xi_j$$

$$< (1-\mu)\sum_{j=1}^{n} d_{ij}$$

となる。ここで，一般的に行列 $Y = [y_{ij}]$ について，そのノルム $\|Y\|$ を

$$\|Y\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |y_{ij}|$$

1)　McKenzie[5] を見よ。

2)　例えば Debreu and Herstein [1] を参照。

によって定義すると，仮定(8)より $\|A\|<1$ であるから，

$$\begin{aligned}\|D\| &= \|I+A+\mu^2A^2+\cdots\| \\ &\leq 1+\mu\|A\|+\mu^2\|A\|^2\cdots \\ &< 1+\mu+\mu^2+\cdots \\ &= \frac{1}{1-\mu}\end{aligned}$$

となるから，(14)より

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}<1,$$

ゆえに，$\rho(C)<1$ となる。したがって，行列 $(I-MA)^{-1}(A-I)$ の固有値の実部は全て負となり動学体系(13)は安定である。

つぎに，μ_i に相等しくないものがある場合を考える。この場合

$$\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n$$

とおいても一般性は失なわれない。いま，$s\geqq 0$ をパラメタとする n 個の微分可能なつぎの諸条件を満足する関数 $m_i(s)$ および対角行列 $M(s)$ を考える。

$$m_i(s)\geq 0,\ \ m_i(0)=\mu_1,\ \ -1<m_i\leq 0,$$
$$m_1(s)\leq m_2(s)\leq\cdots\leq m_n(s),$$
$$M(s)=\begin{bmatrix} m_1(s) & \cdots & 0 \\ \cdots & m_2(s) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_n(s)\end{bmatrix}。$$

行列 C における M を $M(s)$ でおきかえた行列を $C(s)$ であらわし，u を全ての成分が1に等しい n 次列ベクトルとすると $C(s)$ の第 i 行 $C_i(s)$ の和 $C^i(s)$ は

$$C^i(s)=C_i(s)u$$

とあらわされる。上述の議論より $C_i(0)<1$ が全ての i について成立する。さらに

$$\bar{C}=(C^1, C^2, \cdots, C^n)',$$
$$\frac{d\bar{C}}{ds}=\left(\frac{dC^1}{ds},\ \frac{dC^2}{ds},\ \cdots,\ \frac{dC^n}{ds}\right)'$$

とおくと

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{C}(s)}{ds} &= -(I-M(s)A)^{-1}\frac{dM(s)}{ds}\cdot \\ &\quad A(I-M(s)A)^{-1}(I-M(s))Au \\ &\quad +(I-M(s)A)^{-1}\frac{dM(s)}{ds}\cdot Au \\ &= (I-M(s)A)^{-1}\frac{dM(s)}{ds}\cdot \\ &\quad A[-(I-M(s)A)^{-1}(I-M(s))Au \\ &\quad +u] \\ &= -(I-M(s)A)^{-1}\frac{dM(s)}{ds}\cdot \\ &\quad A(\bar{C}(s)+u)\end{aligned}$$

となる[3)]。したがって，

$$\bar{C}(o)<(1, 1, \cdots, 1)'$$

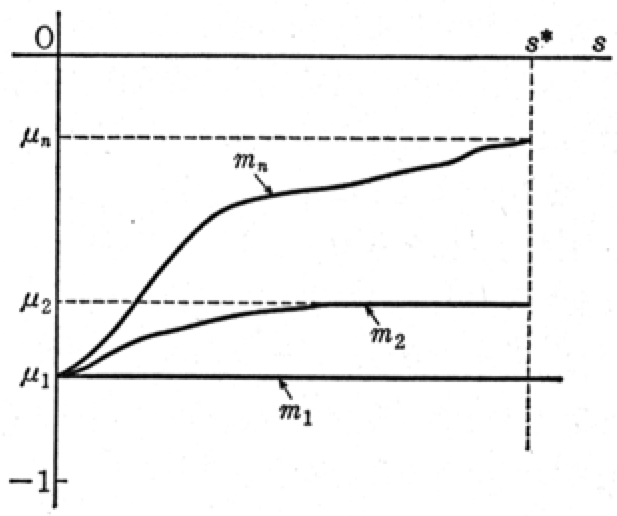
を考慮すると

$$\frac{d\bar{C}(s)}{ds}\leqq 0,\ \ s\geq 0$$

となる。そこで，s が0から増加しながらある値 s^* に収斂するとき $m_i(s)$ が μ_i に収斂するように $m_i(s)$ を適当に定めると(第1図参照)

$$\bar{C}(s^*)\leqq\bar{C}(0)$$

第1図



が導かれ，μ_i に相異なるものがある場合についても $\rho(C)<1$ となることが云えるから，行列 $(I-MA)^{-1}(A-I)$ の全ての固有値の実部は負となり，外挿的予想のもとでの動学体系(12)の安定性を結論することができる。

3. 適応的予想の場合

本節では各企業が他企業の産出量の合計を適応的に予想する場合を分析する。記号を前節のごとく定める。ただし，x^{ie} は i 企業の他企業の産出量の合計に関する適応的予想をあらわし，$m_i>0$ が全ての i について仮定される。適応的動学体系はつぎのようにあらわされる。

$$(5)\qquad \frac{dx_i}{dt}=k_i(x_i{}^*-x_i),$$

$$(15)\qquad \frac{dx^{ie}}{dt}=m_i(x^i-x^{ie}),$$

---

3)　一般的に非特異行列

$$Y=[y_{ij}]$$

の各成分が x の関数であるとすると，

$$\frac{dY^{-1}}{dx}=-Y^{-1}\frac{dY}{dx}Y^{-1}$$

である。

(10)　$x_i^* = \xi_i x^{ie} + \eta_i$。

行列を用いてこの動学体系を書きあらわすとつぎのごとくなる。

$$
(16)\quad
\begin{bmatrix}
\frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{dx^{1e}}{dt} \\ \frac{dx^{2e}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx^{ne}}{dt}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-k_1 & \cdots\cdots & 0 & k_1\xi_1 & \cdots & 0 \\
\vdots & -k_2 \cdots & \vdots & \vdots & k_2\xi_2 & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & -k_n & 0 & \cdots & k_n\xi_n \\
0 & m_1 \cdots\cdots & m_1 & -m_1 & \cdots\cdots & 0 \\
m_2 & 0 \cdots & m_2 & \vdots & -m_2 & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
m_n & m_n \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & -m_n
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x^{1e} \\ x^{2e} \\ \vdots \\ x^{ne}
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
k_1\eta_1 \\ k_2\eta_2 \\ \vdots \\ k_n\eta_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0
\end{bmatrix}。
$$

つぎに，上の $2n \times 2n$ 係数行列を

$$H = [h_{ij}]$$

であらわし，

$$q_i = 1,\quad i = 1, 2, \cdots, n,$$
$$q_i = n-1,\quad i = n+1, n+2, \cdots, 2n$$

とおくと，Cournot 体係の安定条件(8)のもとでは

$$q_i |h_{ii}| > \sum_{j \neq i}^{2n} q_j |h_{ij}| \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

となるが，さらに

$$q_i |h_{ii}| = \sum_{j \neq i}^{2n} q_j |h_{ij}| \quad i = n+1, n+2, \cdots, 2n$$

も成立することは明らかである。また，行列Hの対角成分は全て負である。したがって，H は negative quasi-dominant diagonal をもつからその固有値の実部は全て負となり[4]，適応的予想のもとでの動学体系(16)の安定性が証明されることになる。

4)　McKenzie [5] を見よ。

参 考 文 献

[1] Debreu, G. and I. N. Herstein, "Nonnegative Square Matrices," *Econometrica*, 21 (1953), pp. 597–607.

[2] Enthoven, A. C., and K. J. Arrow, "Theorem on Expectations and the Stability of Equilibrium," *Econometrica*, 24 (1956), pp. 288–293.

[3] Hadar. J. "On Expectations and Stability," *Behavioral Science*, 13 (1968), pp. 445–454.

[4] Hahn, F. H., "The Stability of the Cournot Oligopoly Solution," *Review of Economic Studies*, 29 (1962), pp. 329–331.

[5] McKenzie, L. W., "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory", *in* Arrow, K. J., et. al. (eds.), *Mathematical Methods in the Social Science* (Stanford Univ. Press; Stanford, 1960), pp. 47–62.

[6] Okuguchi, K., "The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: A Further Generalization," *Review of Economic Studies*, 31 (1964), pp. 143–145.

[7] Okuguchi, K., "The Stability of Price Adjusting Oligopoly: the Effects of Adaptive Expectations", *Southern Economic Journal*, 35 (1968), pp. 34–36.

[8] Okuguchi, K., "On the Stability of Price Adjusting Oligopoly Equilibrium under Product Differentiation," *Southern Economic Journal*, 35 (1969), pp. 244–246.

[9] Okuguchi, K., "Adaptive Expectations in an Oligopoly Model," in *Review of Economic Studies*, 37 (1970). pp. 233–237.

[10] Quandt, R. E., "On the Stability of Price Adjusting Oligopoly," *Southern Economic Journal*, 33 (1967), pp. 332–336.