需要関数の1研究*

吉 原 久 仁 夫

典型的な需要関数の分析は，消費支出総額は前以て決定されているという仮定の下で，種々な消費品目に対する支出額の問題を取扱う。しかし，配分の問題は消費支出総額決定の問題と関連しているかもしれない。だから，これら2つの問題は，1つのフレームワークの中で同時に取扱わるべきなのであるが，ここではとりあえず今迄の需要関数研究における方法論に従い，消費支出総額の配分の問題に対象を限定する。この方法論は，上述の2つの問題が互いに分離可能であり，かつ支出額決定の問題はすでに解決ずみのものと暗黙の中に仮定している。

この論文では，需要関数が効用関数から導かれたものとする時，まず(1)それが持つべき条件を求め，かつ(2)実証研究で使われている4つの支出体系がこれらの条件を満足させるかどうかを検討する。Stone の linear expenditure 体系(以下 LE と略記)と Houthakker の indirect addi-log 体系(以上 IA と略記)は上記のテストを通過するので，次に(3)これら2つの体系を日本の長期データにあてはめる作業を行った。その結果，Stone の体系は Houthakker の体系よりも日本の長期支出パターンをはるかによく説明することが判明した。そこで，需要関数を含む計量モデルにおいては，理論的にも実証的にも満足な Stone の体系が採用さるべきだというのが筆者の結論である。

A 需要関数の持つべき条件

効用関数は2階微分可能であり，消費者はその効用を一定の支出総額の制約の下で最大にするものと仮定する。x_i を品目 i に対する需要量，p_i をその単位価格，y を消費支出総額とすれば，効用関数は $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ と書け，消費支出総額の定義式は $y=\sum p_i x_i$ となる。きめられた予算の中で u を最大にするためには，ラグランジュの乗数法によって $L=u-\lambda y$ とおき，$\partial L/\partial x_i=0$ および $\partial L/\partial \lambda=0$ を解けばよい。すなわち，

$$(1)\quad \begin{cases} \partial u/\partial x_i=-\lambda p_i & : i=1, n \\ y=\sum p_i x_i \end{cases}$$

の $(n+1)$ 個の方程式が同時に満足されねばならない。$\partial u/\partial x_i$ は x_i の関数であるから，これら $(n+1)$ 個の方程式は，$x_1, \cdots, x_n$ と λ とについて解け，その解は

$$(2)\quad \begin{cases} x_i=x_i(p_1, \cdots, p_n, y) & : i=1, n \\ \lambda=\lambda(p_1, \cdots, p_n, y) \end{cases}$$

と書ける。ここに(2)の第1式を需要関数と呼ぶ。

ところで，(1)はまた

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big/\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=\dfrac{p_i}{p_1} & : i=2, n \\ y=\sum p_i x_i \end{cases}$$

とも書けるから，需要関数が効用関数から導かれる限り，前者は(3)を満足させねばならない。故に，需要関数は次の条件を満たさねばならぬ。

P. I. $y=\sum p_i x_i$

P. II. $x_i=x_i(\xi p_1, \cdots, \xi p_n, \xi y)$

P. I. は(3)の均衡式の1つである。P. II. は，(3)の n 個の方程式において，p_i と y に任意の定数 ξ を乗じても式の性格は変らないという事実による。いいかえれば，P. II. は需要関係が価格と消費支出に関して0次の同次であることを示している。

今迄は，価格と消費支出総額は不変と仮定したが，もしこれらが変化するとすれば，代替項が対称的(symmetric)であることを導くことができる(Slutzky の条件)。今はその結果のみを掲げよう：

P. III. $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}+x_j\dfrac{\partial x_i}{\partial y}=\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i}+x_i\dfrac{\partial x_j}{\partial y} \quad (i \neq j).$

以上，需要体系の有する3つの条件を効用関数から導いたが，これに加えて，実証の立場からはもう1つの条件が必要である。すなわち，

P. IV. $\xi_i=\dfrac{\partial x_i}{\partial y}\dfrac{y}{x_i}=1$ (for all i) は成立しない。

ξ_i が全ての i について1だということは，各品目への支出配分が y の値の如何にかかわらず一定だということに等しい。これは明かに不合理である。

ところで，もし効用関数が同次であれば，それから導かれた需要関数は全ての品目に関して $\xi_i=1$ という性格を持つ。問題は，その逆も成り立つかであるが，実は，効用関数の同次性は，全ての i について $\xi_i=1$ であるための必要十分条件である。十分であることの証明

* この論文をまとめるに当り，消費データの使用を許された篠原三代平教授に深甚の感謝をささげる。

はよく知られていて簡単であるが，必要であることの証明は文献に見当らないので，次にその概略を示そう。

定理　ベクトル $x=x(x_1,\cdots,x_n)$ の関数 $u(x)$ で，

(1)　x が0ベクトルならば $u(x)=0$;

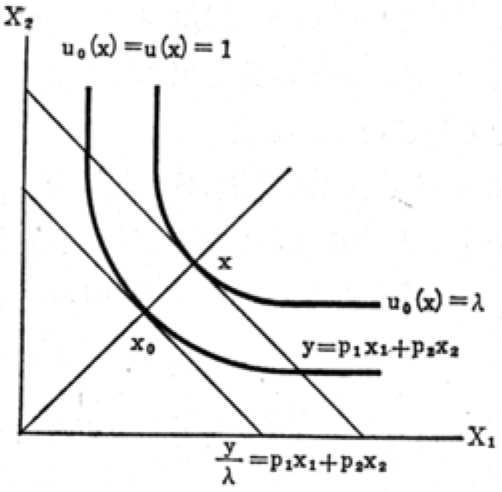
(2)　$x\neq 0$ ならば $u(x)\neq 0$; および

(3)　$\lambda\to\infty$ のとき $u(\lambda x)\to\infty$ (λ は任意の実数)

と仮定する。ここで，もし全ての i について　$\xi_i=\dfrac{\partial x_i}{\partial y}\dfrac{y}{x_i}=1$ ならば，$u(x)$ は同次関数である。

証明　もし　$\xi_i=1$　ならば，$x_i=g_i(p)y$　と書けることは，微分方程式　$\partial x_i/x_i=\partial y/y$　を解けば明かである ($p=(p_1,\cdots,p_n)$)。いま　$\Omega=\{x|x_i>0\}$, $S=\{x|u(x)=1\}$　と定義すると，Ω の中の任意の x に対して，$\lambda x'=x$　を満足させるような x' が S の中に存在する。次に，$u_0(x)=||x||/||x'||=\lambda$　と定義すると，$u_0(x)$ が同次であることは簡単に分る。そこで，残された問題は，$u_0(x)$ が $g_i(p)y$ の形の需要関数を導くことを示すことである。$u_0(x)$ を　$y=\sum p_i x_i$　の制約条件の下で最大にすれば $x_i{}^*=f_i(p,y)$ を得，しかも　$y=\sum p_i x_i$　が作る平面は点 $x^*=(x_1{}^*,\cdots,x_n{}^*)$　において無差別曲面　$u_0(x)=\lambda$　に接する。そこで，$x_i{}^*=f_i(p,y)=g_i(p)y$　であることを示さねばならない。S の中で　$x^*=\lambda x^0$　を満足させる

第1図



x^0 を選ぶと，$u_0(x)$ は同次だから，

$$x_i{}^0=f_i(p,y/\lambda)=g_i(p)(y/\lambda),$$

$$\therefore\quad x_i{}^*=\lambda x_i{}^0=g_i(p)y.$$

故に，$u_0(x)=\|x\|/\|x'\|$　は同次であり，そこから導かれた需要関数は $g_i(p)y$ の形を取る。全く同一のことは，任意のより高次の関数についても証明することができる。

B　実証研究に使われている需要関数

ここで，今迄使われている需要関数の体系が上記の4条件を満たすか否かを調べてみよう。両対数の体系，Theil の需要体系，Houthakker の IA 体系，および Stone の LE 体系が，実証研究に使用される需要体系のほとんどを占めるから，以下ではこの4体系について検討する。

【1】　両対数の体系

両対数の体系は

$$(4)\quad x_i=A_i y^{\alpha_{i0}}\prod_{j=1}^{n}p_j{}^{\alpha_{ij}}\quad : i=1,n$$

の形をとる。(4)を考慮しつつ　$y=\sum p_i x_i$　を y について微分すると

$$(5)\quad 0=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i(1-\alpha_{i0})$$

を導くことができる。さらに，(4)を書き直すと，

$$p_i x_i/y=\left[A_i\prod_{j=1}^{n}p_j{}^{\alpha_{ij}}p_i\right]y^{\alpha_{i0}-1}$$

となる。もし1つの i においてでも，α_{i0} が1より大きいと，$p_i x_i/y$ は y が大きくなるに従って無限に大きくなる。故に，α_{i0} が1つの i においてでも1より大きければ，P. I. が満足されない。だから，α_{i0} は1よりも小さくなければならない。しかし，$p_i x_i$ は常に正であるから，(5)を満足させるには，α_{i0} がすべての i について1より小さいということはあり得ない。故に，全ての i について　$\alpha_{i0}=1$　でなければならぬ。しかし，これは P. IV. に反する。だから，両対数の体系は，理論的にいってあまり望ましくない体系なのである[1)]。

【2】　シカゴ大学の H. Theil は，最近の論文(*Econometrica*, Vol. 33, No. 1, 1965年1月)および同大学の講義録の中で，次の様な需要体系を提案している。

$$(6)\quad W_i d(\log x_i)=B|d(\log y)-\sum W_K d(\log p_K)|$$
$$+\sum C_{ij}[d(\log p_j)-\sum B_K d(\log p_K)]: i=1,n$$

ただし　$W_i=p_i x_i/y$　で，パラメター B_i, C_{ij} は次の条件を満足させねばならない。

$$(7)\quad C_{ij}=C_{ji}$$

$$(8)\quad \sum_i B_i=1$$

$$(9)\quad \sum_j C_{ij}=\varphi B_i\quad \left(\varphi=\frac{\partial\log y}{\partial\log\lambda}\right)$$

(6)の体系は，(9)を使って次の微分方程式に直すことができる[2)]。

$$(10)\quad \partial x_i/\partial y=B_i/p_i\quad : i=1,n$$

$$(11)\quad \partial x_i/\partial p_j=-B_i x_j/p_i+(C_{ij}-\varphi B_i B_j)(y/p_{ij})$$

---

1)　P. III. を満たすためには，この体系のパラメターに新たな条件を加える必要がある。例えば，$i\neq j$ ならば $\alpha_{ij}=0$, $i=i$ ならば $\alpha_{ij}=-1$ という条件を付加すれば，需要関数は　$p_i x_i=A_i y$　の形をとり，P. III. を満足する(この条件の一般式は未だ導けていない)。

2)　この証明については，D. McFadden, *Notes on Professor Theil's Demand System*, University of California (mimeo.) を見よ。

(10)の解は

(12)　$x_i=B_i(y/p_i)+b_i(p_1,\cdots,p_n)\quad :i=1,n$

となるが，$y\to 0$ に従って $x_i\to 0$ であるから，b_i は0でなければならぬ。だから(12)は

(13)　$x_i=B_i(y/p_i)\quad :i=1,n$

と書き直される。この需要体系は，$u=\sum B_i\log x_i$ という効用関数から導かれるものである。しかるに，この効用関数は同次であり，$\xi_i=1$ (for all i)であることは簡単に分るであろう。

【3】 IA体系

Houthakker の提案する需要体系は

(14)　$x_i=a_i\left(\dfrac{y}{p_i}\right)^{b_i+1}\Big/\sum_j a_j\left(\dfrac{y}{p_j}\right)^{b_j}\quad :i=1,n$

である[3]。この体系がP. I. とP. II. を満たすことは簡単に分る。P. III. については(14)を p_j について微分すると

(15)　$\partial x_i/\partial p_j=x_ix_j(b_j/y)$

を得るが，(14)を y について微分し x_j を乗ずると

(16)　$x_j\dfrac{\partial x_i}{\partial y}=\dfrac{1}{y}\left[x_ix_j+b_ix_ix_j-x_ix_j\dfrac{\sum b_ia_i(y/p_i)^{b_i}}{\sum a_i(y/p_i)^{b_i}}\right]$

を得る。同じく x_j については

(15′)　$\partial x_j/\partial p_i=x_ix_j(b_i/y)$

(16′)　$x_i\dfrac{\partial x_j}{\partial y}=\dfrac{1}{y}\left[x_ix_j+b_jx_ix_j-x_ix_j\dfrac{\sum b_ia_i(y/p_i)^{b_i}}{\sum a_i(y/p_i)^{b_i}}\right]$

である。よってSlutzky条件 P. III. は満たされている。

最後に，P. IV. については，

$\alpha_i=a_i(y/p_i)^{b_i}/\sum a_i(y/p_i)^{b_i}$

とおくと，

$\xi_i=1+b_i-\sum b_i\alpha_i$

となる。一般に b_i は負でその絶対値は1よりも小さいから[4]，もし $b_i<\sum b_i\alpha_i$ であれば $\xi_i<1$ である(逆もまた成り立つ)。もし $b_i=\sum b_i\alpha_i$ であれば $\xi_i=1$ である。全ての i について $b_i=\sum b_i\alpha_i$ でなければならぬ理由はないから，IA体系はP. IV. をも満足させているということができる。

【4】 LE体系

Stone は次の様な需要体系を提案している[5]。

(17)　$p_ix_i=p_ic_i+b_i(y-\sum_j p_jc_j)\quad :i=1,n$

この方程式によると，i 品目の現在価格で評価された支出額は(イ)その最低必要量(c_i)と(ロ)消費支出総額と生活維持必要額の差とによって決まるというのである。消費者は，まず最低必需品ベクトル$(c_1,\cdots,c_n)$を獲得するために支出総額の1部を使い，その残余を b_i の比率で各品目に配分する。

さて，この体系においてP. I. を満足させるには，パラメターの推計に際し $\sum b_i=1$ という条件を加えればよい。また，(17)が p と y について0次の同次であること(P. II.)を示すには，同式を

$x_i=c_i+b_i[(y/p_i)-\sum_j(p_j/p_i)c_j]\quad :i=1,n$

と書き変えればよい。さらにP. III. については，x_i を p_j に関して，また x_j を p_i に関して，それぞれ微分すると，

$$(18)\quad\begin{cases}\partial x_i/\partial p_j=-b_ic_j/p_i,\ \partial x_j/\partial p_i=-b_jc_i/p_j\\[4pt] \dfrac{\partial x_i}{\partial y}x_j=\dfrac{b_i}{p_i}\left(c_j+b_j\dfrac{y}{p_j}-b_j\sum_l\dfrac{p_l}{p_j}c_l\right)\\[4pt] \dfrac{\partial x_j}{\partial y}x_i=\dfrac{b_j}{p_j}\left(c_i+b_i\dfrac{y}{p_i}-b_i\sum_l\dfrac{p_l}{p_i}c_l\right)\end{cases}$$

となる。これらの方程式から，LE体系がSlutzkyの条件を満足することは簡単に分ると思う。

最後に，P. IV. について調べる必要があるが，そのために ξ_i を求めれば

$\xi_i=b_iy/p_ix_i$

を得る。従って ξ_i は全ての i について1である必要はない。このように，LE体系は4条件全部を満たすから，理論的に好ましい需要体系ということができる[6]。

C　日本における長期支出パターンへの応用

IAおよびLE体系が理論的に他の2者より優れていることが判ったので，次にこれらの2体系を1902—1960年間の個人支出パターンにあてはめてみよう[7]。

消費品目は，第1次産業生産物，第2次産業生産物，公共事業サービス，一般サービス，および家賃の5種目

3) H. Houthakker, "Additive Preference," *Econometrica*, Vol. 28 (April, 1960), pp. 244—257. IA需要関数を導く効用関数(indirect utility function)は $u=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/b_i)(y/p_i)^{b_i}$ である。

4) *Ibid.*, p. 256.

5) R. Stone, "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand," *Economic Journal*, LXIV (Sept., 1954), pp. 511—527.

6) LE体系を導く効用関数は $u=\prod_{i=1}^{n}(x_i-c_i)^{b_i}$ である。R. C. Geary, "A Note on 'A Constant Utility Index of the Cost of Living'," *Review of Economic Studies*, XVIII (1), 1949/50, pp. 65—66.

7) 価格，消費支出総額ならびに割合に関するデータは，拙稿 *An Econometric Study of Japanese Economic Development* (unpublished Ph. D. thesis, Univ. of Calif. (Berkeley), 1966)の統計付表に収録してある。データ作製に当っては，一橋大学経済研究所諸氏のご助力を得た。

である。以下に各体系の推計方法と推計結果とを述べる。

【1】 IA 体系

(14)式を書き改めると,

$$(19)\quad p_ix_i/y=a_i\left(\frac{y}{p_i}\right)^{b_i}\Big/\sum_j a_j\left(\frac{y}{p_j}\right)^{b_j}\quad :i=1,5$$

となる。これは5品目の消費実額を全支出額に対する割合に直したものである。ところが(19)式はパラメター a_i, b_i について非線型であるので，仮りに y, p_ix_i, p_i のデータが揃っていたとしても，通常の方法によってはその推計を行えない。この困難を回避するためには，次の2つの方法が考えられる。

その第1は以下の通りである。まず，2つのグループの支出比率をとって

$$p_ix_i/p_jx_j=a_i\left(\frac{y}{p_i}\right)^{b_i}\Big/a_j\left(\frac{y}{p_j}\right)^{b_j}$$

と変形する。ここで両辺の対数をとると，b_i, b_j, および (a_i/a_j) を推計することができる。もし消費品目数が n であれば，合計 $n(n-1)/2$ 個の相対比の組合せができ，従って1つの b_i について $(n-1)$ 個の推計値が求められる[8]。最初の方程式から得られる b_i の推計値は，他の方程式による b_i の値と必ずしも同一ではない。

しかし，違った方程式から求まる b_i はそれぞれ同一の値を示さねばならぬという制約条件 (constraint) を導入した場合には，パラメターは $(n-1)$ 個の独立の方程式群から同時推計される。ここで各々の方程式群は2個の式より成り立ち，例えば，品目1と品目2，品目1と品目3,…, 品目1と品目 n という組合せから構成できる[9]。パラメターを同時推計すれば，n 個の b_i と $(n-1)$ 個の (a_i/a_1) の推計値が得られる。(19)を書き直すと,

$$(20)\quad p_ix_i/y=\left(\frac{a_i}{a_1}\right)\left(\frac{y}{p_i}\right)^{b_i}\Big/\sum\left(\frac{a_i}{a_1}\right)\left(\frac{y}{p_i}\right)^{b_i}\quad :i=1,5$$

となるから，b_i と (a_i/a_1) の推計値を代入すれば各品目別に p_ix_i/y の予測値が求まる。

しかし，この方法には問題点がある。いま $\hat{z}_{ij}=\log(p_{ij}x_{ij}/p_{1j}x_{1j})$ と定義すると，最小自乗法は $\sum\sum(\hat{z}_{ij}-\hat{z}_{ij})^2$ を最小にする b_i および (a_i/a_1) の値を与えるのであるから，$p_{ij}x_{ij}/y$ の予測値は必ずしも良好ではない。事実，この方法を用いた結果はきわめて不満足なものであった(その推計結果はここには省略する)[10]。

第2の方法は，(19)式を非線型なままパラタター推計するアプローチである[11]。この方法でパラメターを各品目毎に推計すると，その結果は第1表のごとくである。第1次産業品目については，支出割合の80%程度が回帰式((19)を使用)によって説明されるにすぎないが[12]，他の品目についてはその支出割合の85~90%が説明されている。各式間における b_i の値の差は比較的僅かであるが，a_i の値にはかなりの異動がみられる。

次に，各式における a_i と b_i とは同一値をとるとの制約条件を加えて，(19)の形でパラメターを同時推計すると，第2表の結果を得る。同表によれば R^2 は約60%であり，上記の制約条件のためにこの体系の説明力は大きく低下したことになる。第1表と第2表を比較すると，後者において $\sum\sum e_{ij}^2$ の値は約7倍増加している[13]。

パラメターの推計式は，パラメターが線型である時と異なり，従属変数の1次関数の形をとらないので，たとい誤差項 (ε_i) が相互に独立な正規分布を有すると仮定しても，$\sum\sum e_{ij}^2$ の分布を知ることはできない。だから その推計結果を統計的に検討することは不可能なのであるが，$\sum\sum e_{ij}^2$ の値が制約条件の導入によって7倍も増加したという事実は，制約条件およびパラメター相互間

8) n 個のグループがあれば $n(n-1)/2$ 個のペアーが得られ，各ペアーにつき b_i と b_j の推計値を得る。故に全部で $n(n-1)$ 個の b の推計値が求まる。n グループには n 個の違った b_i があるのであるから，1つの b_i につき $(n-1)$ 個の推計値があることになる。

9) $n=3$ の場合を例にとると，$a_2/a_1, a_3/a_1, a_3/a_2, b_1, b_2, b_3$ の各々に対して2個ずつの推計値を得る。これら3つのペアーにおける a_i, b_i の値は同一であると仮定すると，最後のペアーに対応する方程式は不要となり，b_1, b_2, b_3, (a_2/a_1) および (a_3/a_1) を最初の2式だけから求めることができる。これらの推計値を使えば，支出割合を(20)式の形で予測することができる。

10) Durbin-Watson の統計量 $(d=\sum(e_t-e_{t-1})^2/\sum e_t^2)$ は，10個のペアーのいずれについても自己回帰の存在を示していたので，誤差項 (ε_t) に関して $\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+v_t$ (ただし $E(v_t, v_{t-i})=0, i\neq0$) と仮定して $d=2(1-\rho)$ から ρ の値を得た。この ρ の値によって自己回帰による偏りを調整した後，a_i と b_i とを推計した。

11) "Non-Lin" というプログラムが，Univ. of California (Berkeley) の電子計算機室 (Computer Center) 図書中に収められている。このプログラムは，H. Hartley, "The Modified Gauss-Newton Method of the Fitting of Non-Linear Regression Functions by Least Squares," *Technometrics* (1961), pp. 269—280 にもとづいている。プログラム使用に当って，同室の Richard Haney 氏の援助を得た

12) $R^2=1-\sum e_{ij}^2/\sum(y_{ij}-\bar{y}_j)^2$

13) 第2次産業グループにおける $\sum e_{ij}^2$ は $\sum\sum e_{ij}^2$ の約半分を占める。読者は，パラメターの値を変えることによって $\sum\sum e_{ij}^2$ の値をより小さくすることができると思うかもしれない。しかし，この操作で第2次産業の $\sum e_{ij}^2$ は小さくなっても，他のグループの $\sum e_{ij}^2$ は大きくなり，結果において $\sum\sum e_{ij}^2$ は大きくなる。

第1表　IA 体系による品目別推計結果

品目グループ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\sum e_i^2$	$\sum_i (y_{ij}-\bar{y}_j)^2$
1. 第1次産業	14.1	.001	.0008	.00002	5.78	−1.01	−.128	−.242	.135	−.97	.038	.180
2. 第2次産業	21.4	.001	.0005	.00002	7.51	−1.06	−.130	−.185	.128	−1.003	.028	.252
3. 公共事業	16.2	.0008	.0006	.00006	8.07	−1.04	−.143	−.239	.137	−1.023	.001	.009
4. サービス	18.2	.0009	.0004	.00002	6.04	−1.04	−.131	−.161	.134	−.976	.003	.042
5. 家　賃	10.4	.0008	.0006	.00009	5.13	−1.00	−.107	−.231	.103	−.976	.029	.235
Σ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.099	.718

第2表　IA 体系による同時推計結果

品目グループ	b_i	a_i	$\sum e_i^2$	$\sum (y_{ji}-\bar{y}_j)^2$
1. 第1次産業	−1.0134	14.0997	.0493	.180
2. 第2次産業	−0.1280	.00098	.4633	.252
3. 公共事業	−0.2424	.00077	.0637	.009
4. サービス	0.1350	.000019	.0041	.042
5. 家　賃	−0.9701	5.7795	.1540	.235
Σ	—	—	.7344	1.235*

*: $1.235=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y})^2=\sum_{ij}(y_{ij}-\bar{y}_j)^2+n\sum_j(\bar{y}_j-\bar{y})^2$.

の斉合性(consistency)に強い疑いを持たせる。さらに，R^2 の値が60%程度を出ないという程度をもってしても，日本の長期消費支出パターンに対するこの体系の説明力が弱いことは明かである。

【2】 LE 体系

前項の体系のパラメターは支出割合を従属変数にして推計されているから，比較の便宜上(17)を支出割合の形に書き直すと，

$$p_ix_i/y=(p_i/y)c_i+b_i(1-\sum_j c_j(p_j/y)) \quad : i=1,5 \tag{21}$$

となる。まず(21)式を各品目別に計測するため，$\alpha_i=(1-b_i)c_i$,　$\alpha_j=b_jc_j\,(i \neq j)$　と定義すると，同式は

$$p_ix_i/y=\alpha_i(p_i/y)-\sum_{j\neq i}(p_j/y)\alpha_i+b_i \quad : i=1,5 \tag{22}$$

と書くことができる。(22)の形はパラメターについて1次であるから，通常の最小自乗法によりパラメターを推計できる。その結果は第3表に示してある。

第1表と第3表を比較すると，どのグループについても，後者における $\sum e_{ij}^2$ の値は前者のそれよりも小さい。ただし，第3表における第1次産業品目への支出割合に関する説明力は，第1表におけると同様，非常に良好だとはいえない。

次に，AI 体系について行った様に，5つの方程式に現われる b_i, c_i は同一の値をとるという制約条件を設け，さらに　$\sum b_i=1$　という条件の下で b_i と c_i の同時推計を行った。この場合には，(21)式はパラメターに関して1次でなくなる。そこで，ここでは Stone によって提唱された2段階反復法(two-stage iterative method)を用いてパラメターを推計した[14,15]。その結果は第4表にまとめてある。$\sum\sum e_{ij}^2$ の値は .0397(第3表)から .0509 へと約1.3倍の増加にとどまったことを注目されたい。この変化が統計的に有意であるかどうかは，前項と同じく $\sum\sum e_{ij}^2$ の分布が不明のため，検定することができない。しかし，上記の制約条件の妥当性を否定するためには，この程度の変化では小さすぎる様に思われる。

第3表　LE 体系による品目別推計結果

品目グループ	b_i	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	$\sum e_i^2$	$\sum_i (y_{ij}-\bar{y}_j)_2$
1. 第1次産業	.089	15,701	6,180*	4,764*	12,427*	22,696	.0254	.180
2. 第2次産業	.627	14,380	3,569*	−338*	1,407*	4,887	.0115	.252
3. 公共事業	.085	30,788	2,716*	199*	253*	235*	.0007	.009
4. サービス	.200	15,455	4,060	225*	2,130	8,520	.0017	.042
5. 家　賃	.018	7,072	7,494*	6,333*	15,305*	6,803	.0004	.235
Σ	—	—	—	—	—	—	.0397	.718

注：*は，2×(標準偏差)より小さい値であることを示す。

第4表　LE 体系による同時推計結果

品目グループ	b_i	c_i	$\sum e_i^2$	$\sum_i (y_{ij}-\bar{y}_j)^2$
1. 第1次産業	.102	12,623	.0310	.180
2. 第2次産業	.628	7,707	.0156	.252
3. 公共事業	.080	402	.0009	.009
4. サービス	.200	2,485	.0017	.042
5. 家　賃	.001	7,064	.0017	.235
Σ	1.000	30,281	.0509	1.235*

*: $1.235=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y})^2=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_j)^2+n\sum_j(\bar{y}_j-\bar{y})^2$.

14)　R. Stone, ed., *The Model in Its Environment, Progress Report*, A Program for Growth # 5, pp. 37—38, 44—46. 上記論文中には LE 体系のパラメター推計法が述べられているが，本論文における推計作業では，p_i/y を p_i に，1を y に，それぞれおきかえて b_i および c_i を求めた。これは，支出割合を従属変数に置換するために必要な変形である。

15)　この推計に当り，シカゴ大学経済学部 Richard Parks 氏の作製にかかるプログラムを使用した。

D　結語

結論として言えることは，IA 体系が支出割合の動きの 60% 程度しか説明できないのに反し，LE 体系はその 96% を説明していること，さらに後者は体系全体として説明力が大きいばかりでなく，各品目別の支出割合に関する説明力も高いこと，である。従って，以上に検討した 4 つの需要体系の中では，Stone の体系が最も満足すべきものだということになる。

第 2 図　長期消費支出パターンの計測結果