係数変化型モデルの有効推定

速　水　佑次郎

1　線型回帰モデルの制約

いうまでもないが計量経済分析に通常もちいられる線型回帰モデル(linear regression model)は理論仮説の“推計的に容易な”近似にすぎない。その制約の1つは係数が固定され，特定経済関係におよぼす他変数の影響が常数項の変化(レベルの変化)としてのみ把えられ，係数の変化(構造的変化)として把えられない点にある。

いま変数XとYとについて前者が後者を決定するという経済的因果関係が存在し，この関係に他要因Zが影響を与えるという仮説を線型回帰式によってあらわせば

(1)　$Y_i=\alpha+\beta X_i+\gamma Z_i+\varepsilon_i,\quad i=1, 2, \cdots\cdots, n.$

となる。ここでε_iは近似誤差を含む誤差項である。

(1)式において係数βはZの全レンジにわたって固定せられ，Zの変化はX, Y間の1次直線を平行的に移動せしめると想定(specify)せられている。これはあくまで推定便宜上の想定で，現実にはZの変化はβを変化させ，$X\sim Y$のシェジュールを非平行的に移動せしめるかもしれない。一般に(1)式が実践的に妥当な近似式であるか否かはZのβに対する影響如何にかかっている。

2　係数変化型モデル

もしZがβを appreciably に変化させるとすれば(1)式は妥当な近似式ではない。Zのもたらす構造的変化を把握するにはβをZの函数と想定したモデルを用うべきであろう。このようなモデルはβがZの線型函数であれば容易に推定できる。最も単純に

(2)　$\beta=\beta_0+\beta_1 Z_i+\mu_i$

と想定(μ_iは誤差項)すれば，これを(1)式に代入して

(3)　$Y_i=\alpha+(\beta_0+\beta_1 Z_i+\mu_i)X_i+\gamma Z_i+\varepsilon_i$

$\qquad=\alpha+\beta_0 X_i+\beta_1(X_i Z_i)+\gamma Z_i+(\varepsilon_i+\mu_i X_i)$

を得る。上式においてX_iおよびZ_iが非確率変数であれば，通常の最小2乗法によってα, β_0, β_1, γの不偏推定値を得ることができよう。

(3)式のごときモデルは Hurwicz [5] によって示唆され，Brittain [1], Telser [6] [7], 速水・佐藤[19]などの応用例を見ることができる。ここではこのモデルを係数変化型モデルと呼ぶことにしよう。Z_iとして0～1のごとき dummy variable を用うれば(3)式はいわゆる共分散分析のモデルとなる(小宮[10]参照)。係数変化型モデルとは共分散分析モデルを特殊ケースとして含むモデルということができよう。

係数変化型モデルの推定にあたっての困難は多重共線関係[1]と誤差項分散の非斉一性(heterocedasticity)であろう。本稿でとり扱う問題は後者である。すなわち(3)式の誤差項はX_iの函数であるから，その分散はX_iにともなって変化し，iについて一定不変ではない。したがって最小2乗法による同式の推定は不偏(unbiased)であるが有効(efficient)ではない。

これまで係数変化型モデルをもちいた分析はいずれもβとZ_iの関係における確率誤差――(2)式のμ_i――を無視し，したがって(3)式における heterocedasticity を問題としなかった。しかし理論的に考えれば，βとZ_iとの関係を決定的(deterministic)と想定することは一般性に欠けるといわざるを得ない。本稿の目的は両者の関係を(2)式のごとき確率式としてとらえ，(3)式の有効推定法を導出し，最小乗2法にもとずく有効性の損失(loss of efficiency)を事例的に評価せんとするにある。

3　係数変化型モデルの最尤推定

ここで係数変化型モデルの最尤推定法を導出しよう。それにはまずε_iとμ_iの確率的性格を限定しなければならない。ここでは両者が(i)相互に独立な平均値0の正規分布に従う，(ii)分散は有限値をとる。(iii)系列的に無相関であるとする。以上の条件の下で誤差項の分散は$V(\varepsilon_i+\mu_i X_i)=\sigma_\varepsilon^2+\sigma_\mu^2 X_i^2$となる。

周知のごとく誤差項の分散が非斉一であれば分散の大きさに逆比例するウェイトを乗じた正規方程式を解くこと――いわゆる加重回帰法(weighted regression method)――によって有効推定量を得ることができる。(3)式の誤差分散を一定にするウェイトは$k=\sigma_\mu^2/\sigma_\varepsilon^2$とおけば

$$w_i=\frac{1}{1+kX_i^2}$$

である。ここでσ_μ^2が相対的に negligible ($k\cong 0$)であれば最小2乗法は有効推定値をもたらし，σ_ε^2が相対的に negligible ($k\cong\infty$)であれば$w_i=1/X_i^2$をウェイトとした加重回帰法によって有効推定値が得られる。

問題はいかにしてkを推定するかである。kの推定式

---

1)　係数変化型モデルは interaction term を含むため不可避的に多重共線関係が生ずる。この問題については Telser [8, pp. 287-289] を参照されたい。

は尤度函数より導出されねばならない。数式展開の便宜上，(3)式をつぎのごとく書きかえよう。

(4)　$y_i = a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{3i} + (\varepsilon_i + \mu X_i)$

ここで $y_i = Y_i - \bar{Y}$, $x_{1i} = Z_i - \bar{Z}$, $x_{2i} = X_i - \bar{X}$, $x_{3i} = X_iZ_i - \overline{XZ}$; $a_1 = \gamma$, $a_2 = \beta_0$, $a_3 = \beta_1$ である。ただし $\bar{Y}, \bar{X}, \bar{Z}, \overline{XZ}$ はいずれも Y_i, X_i, Zi, (X_iZ_i) の w_i をウェイトとする加重平均値である。$\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2$ とおけば(4)式の尤度函数は

(5)
$$\log M = -\frac{1}{2}\left[n\log 2\pi + n\log\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}\log(1+kX_i^2)\right] - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} w_i(y_i - a_1x_{1i} - a_2x_{2i} - a_3x_{3i})^2$$

となる。上式を $a_1, a_2, a_3, k, \sigma^2$ について偏微分し，0と等置すれば

(6)
$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_{hi}(y_i - a_1x_{1i} - a_2x_{2i} - a_3x_{3i}) = 0,\quad h = 1, 2, 3$$

(7)
$$\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{1+kX_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{(1+kX_i^2)^2}d_i^2$$

(8)
$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+kX_i^2}d_i^2$$

を得る。なお(7)～(8)式において $d_i = y_i - a_1x_{1i} - a_2x_{2i} - a_3x_{3i}$ である。

(6)～(8)式は5個の未知数を含む5個の方程式体系であるが(7)式および(8)式が非線型であるため，その解法は近似にもとずく逐次法によらざるを得ない。

(6)式 w_i はをウェイトとする加重正規方程式であり，k が与えられれば a_1, a_2, a_3 が求められる。一方(7)～(8)式より σ^2 を消去して

(9)
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i^2}{1+kX_i^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{1+kX_i^2} = n\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i^2X_i^2}{(1+kX_i^2)^2}$$

を得る。上式を k についてテーラー展開し，Δk の2次項以上を落し整理すれば次式が得られる。

(10)
$$\Delta k = [(\sum w_id_i^2)(\sum w_iX_i^2) - n\sum w_iX_i^2d_i^2] \div [(\sum w_id_i^2)(\sum w_i^2X_i^4) + (\sum w_iX_i^2)(\sum w_iX_i^2d_i^2) - 2n\sum w_i^3X_i^4d_i^2]$$

a_1, a_2, a_3, k は(6)式と(10)式を用いて逐次的に推定される。k に初期値 $\tilde{k}$ を与えて w_i を求め，(6)式を解いて $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ を得る。これを(10)式に代入し修正項 Δk を求め，$k = \tilde{k} + \Delta k$ をもって第2次の w_i を求め，(6)式を解く。以下この過程を収斂点までくりかえせばよい。逐次計算の場合，パラメターの収斂性が問題となるが，Hartley [2] の方法を用うればこの問題を回避することができよう。また尤度函数が concave であり，収斂値が maximum point である保証はないから，一般には数種の初期値について試行し，収斂値が異る場合には尤度を最大にする収斂値を推定値として採用せねばならない。

4 計測例

ここに事例として採り上げる対象は米国における鶏卵の供給関係(生産者段階における)である。1930年代以降，米国の鶏卵生産技術の進歩はきわめて著しいが，技術進歩に伴い鶏卵供給の価格反応は低下傾向にあるといわれている。第1表は供給関係を次式のごとく想定し，

第1表　(11)式の期間別推定結果

期　間	パラメター推定値			R^2
	α	β	γ	
1926～33	1.5393	0.2808 (0.1229)	−0.1318 (0.3215)	0.6702
1934～40	−1.5200	0.1032 (0.0661)	1.4021 (0.1945)	0.9286
1926～40	1.3100	0.1433 (0.1389)	0.0499 (0.2017)	0.0852
(1941～46)	−2.6459	0.4895 (0.2095)	1.7542 (0.6017)	0.8943
1947～58	0.4360	0.0396 (0.0378)	0.5698 (0.0748)	0.8696
1926～58	−1.2680	0.3615 (0.1253)	1.1761 (0.0874)	0.8781

注：括弧内は係数標準誤差

期間別に推定したものであるが[2]，供給価格弾力性の低下傾向(第2次大戦の特殊期，1941～1946年を除き)をここに読みとることができよう。

(11)　$\log Q_t = \alpha + \beta\log P_{t-1} + \gamma\log T_t + \varepsilon_t$

ここで，Q_t: t 年の鶏卵生産量(10億個)；P_t；鶏卵・飼料価格比(ポンド当りドル)，$(t-1)$年11月～t 年5月平均；T_t；t 年の鶏卵生産技術指数である。価格変数 P の観測単位期間として$(t-2)$年11月～$(t-1)$年5月を採用したのは t 年の産卵鶏数を決定する牝雛の購入が主としてこの時期におこなわれるからである。技術指数 T_t は成鶏1羽当り産卵数の logistic time trend[3] である。

ここで第1表に示された価格弾力性の低下は生産技術の進歩にもとずくとの仮説が定立される。鶏卵生産技術の高度化は経済単位規模を拡大し，専業化の傾向を生んだが，養鶏への専業化は生産要素の固定化を意味する。農家の経営が多角的であれば要素の移動は個別農家の経営部門間で比較的自由に行われ，個別生産物の供給は価

2)　鶏卵供給の実体的な分析ならびに資料については Heady and Hayami [4] を参照されたい。

3)　$T_t = 100 + \dfrac{117.5}{1+e^{-0.1242t}}$, $t=1$ at 1926.

格に対し弾力的であろう。養鶏専業となると経営上の知識，労働力，設備等が鶏養に固定化し，価格の変動に対し鶏卵生産を伸縮することが困難となろう(Heady[3]参照)。技術進歩は専業化の過程を通じて供給の価格弾力性を低下させたと考えられる。

上記の仮説を検証するため，(11)式の β と T との間に次の函数関係を想定しよう。

(12)　$\beta=\beta_0+\beta_1 T_t+\mu_t$

ここで μ_t は確率誤差項。上式を(11)式に代入して，

(13)　$\log Q_t=\alpha+\beta_0\log P_{t-1}+\beta_1(T_t\log P_{t-1})$
$+\gamma\log T_t+(\varepsilon_t+\mu_t\log P_{t-1})$

を得る。ここで $\log Q_t=Y_t$, $\log P_{t-1}=X_t$, $T_t=Z_t$ とおけば上式は(3)式に一致する。

(13)式を1926～58年のデータにもとずき，前節に導出した最尤逐次法を用いて推定した結果が第2表 I-B である。まず $k=0$ を初期値として a_1, a_2, a_3 を通常の(最小2乗法によって推定し，以下逐次的にを修正した。なお iteration のステップごとに尤度を計算し，尤度が低下した場合に Hartley [2] の方法で Δk を調節した。[4]

収斂値は $1/X_t^2$ をウェイトとした加重回帰推定値に一致(iteration 21 回にして小数点4位まで一致，この間は発散して行く)する。ここで最小2乗法による推定値(I-A)と最尤逐次法による推定値(I-B)とがほぼ等しいことは注目にあたいする。パラメター推定値はいずれも符合条件を満足し，パーセント水準で有意である。特に β_1 の推定値は負の符号を有し，技術進歩に伴う価格弾力性の低下を示している。第3表の IV, V 欄は第2表 I の β_0 と β_1 の推定および各期間別の T の平均値を(12)式に代入して算出した価格弾力性である。その値は個別計測値に比して戦時の特殊期を除き大であり，両者の差異は初期にさかのぼるにつれて拡大している。これは第1に特殊期の影響であり，第2に β と T の関係を単純に線型1次式として想定した結果であろう。区分した各期間についてかなりの差異を有しながら，全期間の推定値としては両者ほぼ一致している。このことは第2表に推定された技術進歩に伴う弾力性の変化率(β_1 の推定値)が全期間の平均値として妥当であることを示している。

第2表 I の推定結果についての問題点はダービン・ワトソン統計量が誤差項の系列相関の存在を示している点である。ここで(11)～(12)式にもとずく供給函数の計測を補強し，供給価格弾力性の低下が技術進歩にもとずくという仮説を検証するため牝雛の需要分析をおこなおう。

鶏卵の生産量は養鶏業者が前年度において鶏卵業者より購入する牝雛数によってほぼ決定される。鶏卵価格の変動に対応する牝雛購入量の変動は鶏卵生産量の変動と1年のずれをもって表裏の関係にあり，鶏卵供給と牝雛需要に対する技術進歩の影響は同一方向に働くと考えてよい。ここに牝雛需要函数を次式によって想定しよう。

(11)′　$\log H_t=\alpha'+\beta'\log P_t+\gamma'\log T_t+\varepsilon_t'$

(12)′　$\beta'=\beta_0'+\beta_1' T_t+\mu_t'$

ここで H_t は t 年における牝雛の購入量，P_t および T_t は(11)～(12)式のそれと同値である。ただし(11)式と異って(11)′式の価格変数にはラグをつける必要はない。(11)′～(12)′式より次式を得る。

(13)′　$\log H_t=\alpha'+\beta_0'\log P_t+\beta_t'\ (T_t\log P_t)$
$+\gamma'\log T_t+(\varepsilon_t'+\mu_t' P_t)$

上式の推定結果は第2表 II に示すとおりである。最尤逐次法によるパラメター推定値(最小2乗法推定より出発して 40 iterations で小数点4位まで収斂)は $1/X_t^2$ をウェイトとする荷重回帰推定値の近傍に収斂している。

4)　計算プログラムは三菱計算原子力電子力計算所の鈴木一行氏による。計算機は IBM 7090.

第2表　(13)式および(13)′式の推定結果

	推定方法	k	パラメター推定値				決定係数 R^2	残差分数 s^2	ダービン・ワトソン・統計量 d
I			α	β_0	β_1	γ			
(13)式	A. 最小2乗法	0	−8.0697	1.6092 (0.5170)	−0.0084 (0.0034)	4.3237 (1.2381)	0.8717	0.00132	0.71
	B. 加重回帰=最尤逐次法	∞	−8.4273	1.6772 (0.5056)	−0.0089 (0.0033)	4.4893 (1.2036)	0.8798	0.00124	0.73
II			α'	β_0'	β_1'	γ'			
	A. 最小2乗法	0	−10.8344	2.9765 (0.4562)	−0.0154 (0.0029)	5.8535 (1.0726)	0.6286	0.00137	1.21
(13)′式	B. 加重回帰	∞	−10.5848	2.9397 (0.4565)	−0.0151 (0.0029)	5.7392 (1.0653)	0.6343	0.00135	1.22
	C. 最尤逐次法	40.81	−10.5876	2.9400 (0.4565)	−0.0151 (0.0029)	5.7405 (1.0653)	0.6343	0.00135	1.22

注：括弧内は係数標準偏差。

この収斂値は最小2乗推定値にきわめて近い値をとる。β_1の推定値は負の符合を有し，技術進歩に伴う弾力性の低下過程を示している。パラメター推定値はすべて符合条件を満し，1パーセント水準で零との有意を有する。さらに残差項の系列相関は5パーセント水準においてinconclusiveである。以上の統計的諸規準よりみて，第2表IIの推定結果は技術進歩が牝雛需要の鶏卵価格に対する弾力性の低下をもたらしたという仮説を支持する有力な統計的証拠であり，鶏卵供給の価格弾力性の低下が技術進歩によってもたらされたとする仮説を裏面より証拠づけるものといえよう。

なお第2表のIとIIとを比較するに，技術指数1単位の上昇に伴う弾力性の低下は鶏卵需要について約0.0085，牝雛需要について約0.015であって前者は後者の60パーセント程度である。このことは次のように説明されよう。1羽当りの産卵量が上昇すれば一定の産卵量の変化に必要な飼養羽数の変化は比例的に低下する。いま10羽の鶏が年間1000個の卵を生んだとする。1羽当り100個という平均産卵量が一定ならば4000個の卵を生産するには飼養羽数を4倍にせねばならない。しかし平均産卵量が2000個になれば羽数を2倍にすることによって4000個の卵を生産することができる。すなわち平均産卵量が2倍になれば産卵量を一定率変化させるに必要な飼養羽数の変化は半分でよい。ここで分析の対象となる1926～58年に米国の成鶏1羽当り平均産卵量は120個の水準から200個の水準へと約60パーセントの上昇を示した。かくして弾力性の低下率については(13)式と(13)′式の推定値が相互にチェックしあっている。

第3表　鶏卵供給の価格弾力性期間別推定方法別比較

期　間 (I)	技術指数の期間別平均 (II)	価格弾力性の推定値		
		個別推定値 (III)[a]	第2表 I-A (IV)[b]	第2表 I-B (V)[c]
1926～33	115.3	0.2808	0.6407	0.6510
1934～40	131.8	0.1032	0.5021	0.5042
1926～40	123.0	0.1433	0.5760	0.5825
(1941～46)	153.1	0.4895	0.3232	0.3146
1947～58	183.1	0.0396	0.0712	0.0476
1926～58	150.3	0.3615	0.3467	0.3395

注：aは　第1表の期間別推定値。
　　bは　$\gamma=1.6092-0.0084T_t$　より算出。
　　cは　$\gamma=1.6772-0.0089T_t$　より算出。

第2表に見るかぎり，最小2乗推定値と最尤逐次法による推定値とのあいだに大なる差異を認めることはできない。また最小2乗法による有効性の損失を残差分散の差異によって計れば(13)式については6.5パーセント，(13)′式については1.5パーセントにすぎない。[5] 本稿の分析は係数変化型モデルの推定に通常の最小2乗法を適用することの妥当性を示す事例といえよう。今後，計測例の積み重ねによって最小2乗法による有効性の損失が一般に大でないと結論できるなら，係数変化型モデルの実証分析における有用性は保証せられることになろう。

参　考　文　献

[1] Brittain, J. A., "The Tax Structure and Corporate Dividend Policy," *American Econ. Rev.*, 54, 272-287, May 1964.

[2] Hartley, H. O., "The Modified Gaus-Newton Method for the Fitting of Non-linear Regression Functions by Least Squares," *Technometrics* 3, 269-280, May 1961.

[3] Heady, E. O., "The Supply of Farm Products at Full Employment," *American Econ. Rev.*, 45, 228-236, May 1955.

[4] ______ and Y. Hayami, *Poultry Supply Functions*, Research Bulletion 505, Iowa Agricultural and Home Economics Experiment Station, May 1962.

[5] Hurwicz, L., "Variable Parameters in Stochastic Processes: Trend and Seasonality," in Koopmans, T. C., ed., *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, 329-344, London, 1950.

[6] Telser, L. G., "The Demand for Branced Goods as Estimated from Consumer Panel Date," *Rev. of Econ. and Stat.*, 44, 300-324, Aug. 1962.

[7] ______ "Advertising and Cigarettes," Jour. Pol. Econ., 70, 471-499, Oct. 1962.

[8] ______ "Least-Squares Estimates of Transition Probabilities," in Christ, C. F., *et al.*, *Measurement in Economics*, 270-292, Stanford, 1963.

[9] 速水佑次郎・佐藤三次「技術革新の普及動態と消費需要構造の変動——生糸を事例とする研究——」『季刊理論経済学』14巻3号，25-36, 1964年6月。

[10] 小宮隆太郎「計量経済学と共分散分析」　森嶋通夫他編『新しい経済分析』269-296，東京 1960。

5)　有効性の損失＝[(最小2乗推定式の残差分散)
　　－(最尤推定式の残差分散)]
　　÷(最尤推定式の残差分散)として計算。