レオンティエフ型モデルの適用について

——1つの多部門循環モデル——

新 飯 田 宏

I 序

1. 在庫循環に関するマクロ・モデルの最も明確な定式化は，L. Metzler〔7〕による優れた研究をもって嚆矢とするが，在庫循環が経済活動水準の変動に及ぼす影響の重要性が認識されるにつれ，在庫投資を中心とする在庫循環の理論的実証的研究が数多く展開されてきた[1]。これらの研究の中で，Metzler 型のマクロ・モデルを多部門化しょうとする試みもまた，在庫循環の分析にとって果さるべき重要な理論的果題の1つであると思われる。最近 M. C. Lovell によって発表された論文〔6〕は，この方向に沿った多部門モデルの労作に挙げてよいであろう。彼のモデルは，各産業部門の buffer stocks としての在庫量を，生産量に関係づけた生産量を内生変数とする1階の非同次定差方程式で表現され，中心的分析は将来時点の予想販売量を形成する期待係数の各種の値について，多部門モデルの安定条件を導出し，現実にこの条件が満されるかどうかを実証的に検討している点にある。

本稿の目的は，各産業部門の生産量・在庫量を explicit に内生変数として表現した tentative なモデルによって，1つの多部門循環モデルを構成することにある。そこでは生産量・在庫量の変動径路がどのような性質を持つかを主要な問題とするから，多部門分析の操作を容易にするために，極めて特殊な仮定を導入する。かかる意味で本稿の分析方法は，Lovell のそれとは本質的に異っており，むしろ接近方法の特徴的部分は2部門の動学的産業連関モデルについて Georgescu-Roegen〔1〕が採用した方法に沿っており，かつ piecewise linear の非線型モデルの採用という点で Hicks〔3〕モデルを踏襲している。

II 多部門循環モデルの定式化

2. 理論の単純化のために，我々は次のような経済体系を想定しよう。(i) 我々の経済では合計 $n+1$ 種類の商品(第 $n+1$ 番目の商品は労働力という商品)を生産しており，これらの各々を生産する産業の数は各々1個併せて $n+1$ 個の産業から成り，外生部門は全く存在しない。(ii) 所謂商品を生産する産業は代表的企業から成り立つ。(iii) 第 $n+1$ 産業部門を除く他のすべての産業部門は，毎期の予想販売量を基礎に在庫量が最適と考えられる水準に落ちつくように毎期の生産計画をたて，それに基づいて他部門に投入量の註文を発する。(iv) 註文を受けた各産業部門は，期首の在庫量から自己の部門で生産している商品を供給しようとする。このとき，もしも総註文量が在庫量を超過する場合には，各産業から受けた註文量に比例して在庫量を配分しようとする。(v) 各産業部門へ出した註文量のうち，それぞれの部門からどれだけの比率で満たされるかを通告された産業部門は，その中の最小の比率によって自己の生産量は制約されるから，各部門への希望註文量のうち，この最小比率を越える註文を取消すことが出来る。(vi) (iii)～(v) のプロセスを経て最終的に定まった産業間の取引は即時的に行われ，その期の生産が始まる[2] (vii) 固定資本の存在を無視する。(viii) 我々のモデルはすべて real term で示される。

3. さて，我々のモデルは各産業部門の生産量と在庫量の関係を追究することを意図するが，第 $n+1$ 番目の産業が生産する労働力という商品は在庫量としては貯えられないと考えなければならない。そこでモデルを完全なものとするために，労働力商品を他の n 個の所謂普通商品で表現し，労働力商品を消去したモデルにすることが必要である。いま a_{ij} を第 j 商品1単位の生産に必要な i 商品の投入量，a_{n+1j}, a_{in+1} をそれぞれ j 商品1単位の生産に要する労働量，単位労働量を生産するに要する j 商品の投入量とし，Q_i を i 商品の生産量とすれば，我々は明らかに次式を持つ。

$$Q_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}Q_j+a_{in+1}Q_{n+1} \qquad i=1, \cdots\cdots, n.$$

$$Q_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}a_{n+1j}Q_j+a_{n+1n+1}Q_{n+1}$$

1) 例えば，戦後の在庫循環に関して最も綜合的な研究として Joint Economic Committee 編〔4〕をあげることが出来る。

2) 我々のモデルはこのような生産計画に従うから，これは丁度 Hicks〔2〕が採用した week to week basis で進行するモデルと言うことが出来よう。

最後の式を Q_i の各式に代入すれば

$$Q_i=\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}Q_j \qquad i=1,\cdots\cdots,n. \qquad ここに$$

(1)　$\bar{a}_{ij}=a_{ij}+(1-a_{n+1n+1})^{-1}a_{in+1}a_{n+1i}$

$\bar{a}_{ij}$ は j 商品1単位を生産するに必要な i 商品と労働力とを i 商品のタームで表現した直接間接投入量である。我々はこれを**準投入係数**と呼ぼう。以上の関係から，我々は準投入依数を使用することによって第 $n+1$ 部門を無視することが出来るから，以下では n 個の普通商品の生産量と在庫量にのみ注意を払えばよい。

ところで投入係数 a_{ij} からなる行列 A は**分解不可能**でそのフロベニッス根 $F_r(A)$ は1より小であるとしよう[3)]。このとき(1)から明らかなように $\bar{a}_{ij}\geqq a_{ij}\geqq 0$ であるから，$\bar{A}$ も分解不可能な行列で，しかも $F_r(\bar{A})\geqq F_r(A)$ である。しかし，我々は $F_r(\bar{A})$ の値は1に極めて近い正の値であるが，依然として1より小であると仮定しよう。

(A.1)　$F_r(\bar{A})\equiv\rho\ll 1$

ここに≪記号は極めて近い値であるが不等号の向きが＜であることを示すものとする。フロベニッスの定理から明らかなように，$\bar{A}$ のフロベニッス根 ρ に対して次式を満足する固有ベクトル y が存在する。

(2)　$\bar{A}y=\rho y;\ y>0$

4. 以上に想定した我々のモデルを順次定式化していくために，まず次の記号法を追加しておく。$H_i(t)\cdots t$ 期の期首における i 産業の現実在庫水準。$H_i{}^O(t)\cdots t$ 期における i 産業の最適在庫水準。$Q_i(t)\cdots t$ 期における i 産業の産出量水準。$Q_i{}^D(t)\cdots t$ 期における i 産業の希望産出量水準。$Q_i{}^P(t)\cdots t$ 期における i 産業の計画産出量水準。$X_i(t)\cdots t$ 期における i 産業の現実販売量。$\hat{X}_i(t)\cdots t$ 期における i 産業の予想販売量。

さて，我々の仮定から産出量と在庫量との間には当然に次式が成立している。(以下 for $i=1,\cdots,n$ を省略)。

(3)　$H_i(t)=H_i(t-1)+Q_i(t-1)-X_i(t-1)$

また想定(iii)に従って，各産業が希望する産出量は，予想販売量を考慮して決定される最適在庫量と現実在庫量との調整差額と予想販売量との和であるから，計画産出量について次式が成立する。

(4)　$Q_i{}^P(t)=\mathrm{Max}(Q_i{}^D(t),0)$
$\qquad=\mathrm{Max}(H_i{}^O(t)-H_i(t)+\hat{X}_i(t),0)$

この式はもしも望ましい産出量が負の値であれば，負の生産は出来ないから，計画産出量はゼロとなり，希望産出量が非負の時のみ，$Q_i{}^D(t)=Q_i{}^P(t)$ となることを示す。

次に各産業が最適と考える在庫量水準 $H^O(t)$ はその期の予想販売量の β 倍であるとしよう。即ち，

(5)　$H_i{}^O(t)=\beta_i\hat{X}_i(t)$

この β_i を我々は i 産業の**最適在庫係数**と呼ぼう。我々のモデルでは，各産業部門への販売はすべて期首の在庫量からなされるから，予想販売量以下に在庫量を抑えることは考えられない。そこで次式を仮定しょう。

(A.2)　$\beta_i\geqq 1$

さて，各産業の計画生産量決定のためにエッセンシャルに重要な問題は予想販売量の推定である。この期待形成に関して我々は簡単に次式を仮定しよう。

(6)　$\hat{X}_i(t)=(1+e_i)X_i(t-1)\quad 0\leqslant e_i\leqslant 1$

即ち，各産業は前期の販売量の $100\times e_i\%$ 増に今期の販売量を予想すると仮定する。$e_i\geqslant 0$ は成長に基づく期待を考慮している[4)]。以下 e_i を**期待係数**と呼ぼう。

我々の想定する経済では，各産業の販売量は生産の目的のために他産業が購入した量の合計であるから，準技術係数を媒介として次の関係を持つ。

(7)　$X_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}Q_j(t)$

かくて，(5)，(6)及び(7)式の関係を(3)式と(4)式に代入することによって，各産業の計画生産量と在庫水準に関して，それぞれ次式が導かれる[5)]。

(8)　$Q_i{}^P(t)=\mathrm{Max}\{[(1+\beta_i)(1+e_i)+1]\cdot$
$\qquad\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}Q_j(t-1)-Q_i(t-1)-H_i(t-1),0\}$

(9)　$H_i(t)=Q_i(t-1)-$

3) 投入係数行列 A のフロベニッス根が1より小であることの経済学的意味などについては例えば二階堂〔8〕を参照せよ。

4) 予想販売量の推定にはいろいろな方法が考えられよう。最も一般的には完全なる全能な予言者の予想とナイーヴな期待形成(前期の販売量と同一であるとする予想)との中間であるとして，

$X_i(t)=e_iX_i(t-1)+(1-e_i)X_i(t)\quad 0\leqslant e_i\leqslant 1$

とする方法がある。例えば Lovell〔5〕はこの方法を採用している(〔5〕p. 305 参照)。但しこの方法では $e_i<0$ を考慮していないから，今期の販売量が前期より増大する場合には過大な推定は決して起り得ず，逆に減少する場合には過小な推定を行うことは決してあり得ないことになる。我々の(6)式で $e_i<0$ を想定しないのは強い仮定であると考えられるが，以下の推論では非常に小さな負値であるかぎり，何らの問題も起らないことを指摘しておこう(註 11)参照)。

5) (8)式において $Q_i{}^P(t)=Q_i(t)$ とし，しかもナイーヴな期待形成を仮定して $e_i=0$ とすれば，このモデルは Metzler〔7〕のマクロ・モデルの1類型となることは直ちに理解されよう，(〔7〕p. 125)参照。

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}Q_j(t-1)+H_i(t-1)$$

5. さて，第 j 産業部門は t 期の初めに(8)式に従って t 期の計画生産量を決定し，これを実現するために他産業部門にそれぞれ $\bar{a}_{ij}Q_j{}^P(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ だけの註文を行う。第 i 産業部門が各産業部門から受取った総註文量は $\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}Q_j{}^P(t)$ となるが，これに応ずる供給可能量は t 期首の在庫量 $H_i(t)$ である。もしも $H_i(t)\geqq\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}Q_j{}^P(t)$ であれば，各産業部門から i 部門へなされた註文量はすべて完全に充足される。しかし，もしも $H_i(t)<\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}Q_j{}^P(t)$ のときには，我々の想定(iv)に従って，各産業の i 部門に対する註文量の1部は満されなくなるが，その比率は同一比率であり次の値をとると仮定しよう。

$$(10)\quad s_i(t)=H_i(t)\Big/\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}Q_j{}^P(t)$$

即ち，t 期に各産業部門は i 部門への註文量 $\bar{a}_{ij}Q_j{}^P(t)$ のうち $100\times s_i(t)\%$ だけ充足されうることが i 産業から通告されるのである。この s_i を i 部門の**註文充足係数**と呼ぼう。

このようにして各産業部門からの註文充足係数 $s_i(t)$ の通告を受けた j 産業では，想定(v)に従って投入量の制約の最も厳しい部門の註文充足係数によって規定される生産量 $Q_i{}^P(t)\,\mathrm{Min}\,s_i(t)$ をもって今期の生産量とするように計画を変更せざるを得ないから，$\mathrm{Min}\,s_i(t)$ を越える他の部門に対しては $\bar{a}_{ij}Q_j{}^P(t)\,\mathrm{Min}\,s_i(t)$ に註文量を抑え，これを越える註文量を取消すことが出来る。そこで t 期の各産業の現実産出量は次式で表現される。

$$(11)\quad Q_i(t)=Q_i{}^P(t)\cdot\phi(t)$$
$$=\mathrm{Max}\{[(1+\beta_i)(1+e_i)+1]\sum_{j=1}^{n}a_{ij}Q_j(t-1)-Q_i(t-1)-H_i(t-1),0\}\phi(t)$$

ここに

$$(12)\quad \phi(t)=\mathrm{Min}[1,s_1(t),s_2(t),\cdots,s_n(t)]$$

かくて我々は，各産業の現実の生産量及び在庫量の決定式として(13)式と(9)式を得たことになる。これらを行列形式で明示しておこう。

$$(13)\quad \begin{bmatrix}Q^+(t)\\ H(t)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}\phi(t)\{[(1+\beta)(1+e)+1]\bar{A}-I\} & -\phi(t)I\\ \hline I-\bar{A} & I\end{array}\right]\begin{bmatrix}Q(t-1)\\ H(t-1)\end{bmatrix}$$

ここに Q,H はそれぞれ Q_i,H_i をエレメントとする n 次元ベクトル，$Q^+(t)$ は右辺から計算される $Q_i(t)$ がもしも負値をとるときには $Q_i(t)=0$ と決定されている非負ベクトル，I は n 次の単位行列，$\bar{A}$ は $\bar{a}_{ij}$ をエレメントとする準技術係数行列，$[(1+\beta)(1+e)+1]$ は $(1+\beta_i)(1+e_i)+1$ を対角要素とする n 次対角行列，$\phi(t)$ は(12)式より定まるスカラー量である。

6. (13)式から，我々は生産量在庫量の time path を持つことが出来るが，そのモデルは線型の1階定差方程式ではない。そこで最も簡単な方法で time path を扱うことを可能にするように drastic な仮定を設けよう。1つは最適在庫係数及び期待係数がそれぞれ全産業部門について同一であること，他の1つは Q,H に関する初期値を同一比率で与えることである。

まず前者については，(A.2)式及び(6)式を考慮して次のように定式化しておく。

$$(\text{A.}3)\quad \beta_1=\beta_2=\cdots\cdots\beta_n\equiv\bar{\beta}\geqq1$$

$$(\text{A.}4)\quad 0\leqq e_1=e_2=\cdots\cdots=e_n\equiv\bar{e}\leqq1$$

後者の仮定は最も重要で drastic であるが，(13)式に示される $2n$ 次元の問題を2次元に誘導しようとする意図に基づいている。そこで我々は生産量と在庫量の初期値をいずれも，準技術係数行列 $\bar{A}$ のフロベニュス根 ρ に対応する固有ベクトル y のエレメントに等しい比率で与えることにする。いま一般的に $t-1$ 期を初期とすれば，

$$(14)\quad Q(t-1)=q(t-1)y;\qquad H(t-1)=h(t-1)y$$

ここに q,h はそれぞれ生産量，在庫量の水準でスカラー。

かくして，(A.3)，(A.4)，(14)及び(2)式を考慮すれば生産量，在庫量の決定式(11)式，(9)式はそれぞれ次のように示される。

$$(15)\quad Q(t)=\mathrm{Max}(\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1\}q(t-1)-h(t-1),0)\phi(t)y.$$

$$(16)\quad H(t)=[(1-\rho)q(t-1)+h(t-1)]y$$

ここで(15)式の $\phi(t)y$ にかかっている変数が計画生産量の絶対水準であることは云う迄もないのであろう。

次に $\phi(t)$ を明確にするために，各産業の註文充足係数 $s_i(t)$ の値を(2)(8)及び(10)式から求めると[6]，

$$(17)\quad s_i(t)=\frac{h(t)}{\mathrm{Max}(\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1\}q(t-1)-h(t-1),0)y}$$

この式は各産業の註文充足係数は自己の商品生産から独立であること，換言すれば，すべての産業の註文充足係数は同一であることを示している。

そこで，(12)，(17)式の関係を(15)式に代入すれば，最終的な生産量決定式が得られる。即ち

$$(18)\quad Q(t)=\mathrm{Min}$$

$$\left[1,\frac{h(t)}{\mathrm{Max}(\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1\}q(t-1)-h(t-1),0)\rho}\right]$$

$$\times\mathrm{Max}(\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1\}q(t-1)-h(t-1),0)y$$

$$=\mathrm{Min}\left[\mathrm{Max}(\{(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1\}q(t-1)-h(t-1),0),\frac{h(t)}{\rho}\right]y$$

我々は drastic な仮定を導入することによって，各産業の生産量と在庫量の水準を最終的にそれぞれ(18)式，(16)式の形で示すことが出来た。これら両式において右辺のフロベニッス・ベクトル y にかかる係数はともにスカラー量である。このことは，我々のモデルではすべての時点について各産業間の生産量と在庫量のそれぞれの比率は，初期のフロベニッス均衡比率を永久に保ち続けることを意味している。したがって $t-1$ 時点と同様の記号法を採用すれば $Q(t)=q(t)y, H(t)=h(t)y$ と示すことが出来る。したがって以下では生産量と在庫量との絶対水準 q, h の2変数にのみ注意を払えば十分である。そこで我々は(18)式，(16)式を水準のみで表示した次の方程式をもって我々の**基本方程式**と呼ぼう[7]。

$$(19)\quad \begin{aligned} q(t)&=\mathrm{Min}[\mathrm{Max}(\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})\\ &\quad+1]\rho-1\}q(t-1)-h(t-1),0),h(t)/\rho].\\ h(t)&=(1-\rho)q(t-1)+h(t-1). \end{aligned}$$

III　循環の輪廓

7. 我々の基本方程式式は，直観的には，生産量，在庫量の2次元空間の1点に前期の座標が与えられると，3つのパラメーター $\bar{\beta}, \bar{e}$，及び ρ によって規定される(19)式の変換によって今期の座標が決定され，以下同じ step によって逐次的に毎期の座標が決定されるということである。しかし，(19)式の変換は単純な線型変換ではない。何故なら毎期の在庫量 $h(t)$ は前期の生産量と在庫量とが与えられると，通常の線型変換によって一義的に決定されるが，生産量 $q(t)$ は，希望生産量がそのまま実現されるかどうかによって，変換のタイプが変るからである。即ち(19)式による変換は，動学径路が常に $q(t)=0$ によって規定される限界線と $q(t)=h(t)/\rho$ によって規定される限界線との間の非負象限にあるように装置されている。我々は前者の限界線を**下方限界線**，後者のそれを**上方限界線**と呼ぼう。(19)式は両限界線に制約された空間内での変換が遂次的になされていくことを示す運動方程式である。自由な運動は下方限界線と上方限界線との間(以下ではこの領域を**自由領域**と呼ぶ)で行われ，経済体系内部にそのどちらかの限界線を越えるような力が働くと，自由領域内とは異る変換によって強制的に自由領域内に引き戻される。この意味で我々のモデルは Hicks〔3〕と同じく piecewise linear の非線型モデルである。

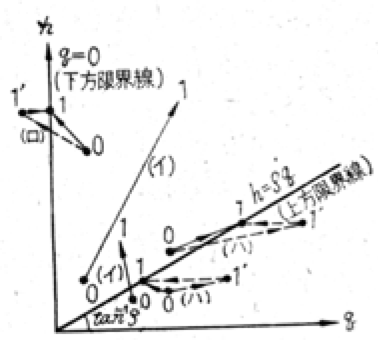
さて，いま前期の生産量と在庫量とが与えられたとしよう。(19)式による今期の $q(t), h(t)$ の決定は，まず次式に示される今期の希望生産量 $q^D(t)$ と在庫量 $h(t)$ の計算から始まる。

$$(20)\quad \begin{bmatrix} q^D(t)\\ h(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1 & -1\\ 1-\rho & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} q(t-1)\\ h(t-1)\end{bmatrix}\equiv M\begin{bmatrix} q(t-1)\\ h(t-1)\end{bmatrix}$$

この M 行列を媒介とした線型変換によって決定される $q^D(t)$, $h(t)$ の座標の位置によって，我々の基本方程式(19)式の座標変換は次の3つのタイプに大別される。

(イ)　自由運動タイプ。(19)式が示すように，もしも $q^D(t), h(t)$ の座標が自由領域内にあるならば，(20)式において $q^D(t)=q^P(t)=q(t)$ とした形で今期の生産量，在庫量は(20)式で決定される。各時点においてこの状態が続く限り，生産量，在庫量の time path は M 行列による線型変換を追跡すればよい。即ち(20)式の線型の1階同次定差方程式の解を求めて行けばよい。第1図の(イ)のケースがこのタイプの変換である[8]。

第 1 図



(ロ)　下方限界線へのスウィッチ・タイプ。(20)式から定まる $q^D(t), h(t)$ が下方限界線の左に出た場合には(即ち $q^D(t)<0$)，(19)式によって $q^P(t)=q(t)$

---

6)　i 産業の註文充足係数 $s_i(t)$ は次のように導かれる。

$$s_i(t)=\frac{H_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}Q_j{}^p(t)}$$

$$=\frac{h(t)y_i}{\mathrm{Max}(\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})1]\rho-1\}q(t-1)-h(t-1),0)\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}y_i}$$

$$=\frac{h(t)y_i}{\mathrm{Max}(\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1\}q(t-1)-h(t-1),0)\rho y_i}$$

$$=\frac{h(t)}{\mathrm{Max}(\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1\}q(t-1)h(t-1),0)\rho}$$

7)　(19)式の第2式の在庫量が示すようにフロベニッス根 ρ がこのモデルで果たしている経済的意味は，全産業部門を集計した意味での投入係数にほぼ匹敵するものであると云えよう。

$=0$ とされる。このとき在庫量は(19)式にみる如くそのまま実現されるから，第1図(ロ)のように起点0からまず(20)式によって $1'$ へ，次に $1'$ から下方限界線への水平移動の変換によって今期の座標1が決定される。この場合には M 行列の変換ルールは変更されることになる。

(ハ)　上方限界線へのスウッチ・タイプ。もしも(20)式から定まる $q^D(t), h(t)$ が上方限界線の右側に来た場合には，$q^D(t)=q^P(t)$ は生産要素の制約よってに実現されず，上方限界線に引き戻される。従ってこの場合には(ロ)の説明と同じく線型の M 変換ルールはスウッチされて，第1図の(ハ)のタイプとなる。

8. 以上の考察にしたがって，我々は生産量在庫量の変動径路を明らかにすることが出来る。いま問題を一般的に扱うために初期点が自由領域内に与えられたとしよう。このとき，(20)式において $q^D(t)=q(t)$ とした場合の初期値からの運動が，自由領域外に飛び出すに至るある有限の期間迄は，基本方程式(19)式は実は(20)に他ならない。そこで $\{q, h\}$ のベクトルを z で示せば，初期点からある有限の期間迄の運動は次式で示される。

(21)　$z(t)=Mz(t-1)$

これは同次の1階定差方程式であるから，その解は次のように示すことが出来る[9)]。

(22)　$z(t)=M^t z(0)=R\Lambda^t R^{-1}z(0)$

ここに Λ は

(23)　$|M-\lambda I|=0$

の固有根 λ_1, λ_2 を対角要素とする対角行列 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$；$R$ は λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトル r^1, r^2 をそれぞれ第1列，第2列とする固有ベクトルの行列；$z(0)$ は初期値を示すベクトルである。固有根 λ_i は(23)式により

$$\lambda^2-[(1+\bar{\beta}))(1+\bar{e})+1]\rho\lambda+(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})\rho=0$$

の2根である。即ち $i=1,2$ について，

$$(24)\ \lambda_i=\frac{1}{2}\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho$$
$$\pm\sqrt{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]^2\rho^2-4(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})\rho}$$

(A.1)，(A.3)及び(A.4)式から，λ_1, λ_2 はそれぞれ1より大なる相異る実根であることが容易に確められる[10)]。λ_1, λ_2 に応ずる固有ベクトル γ^1, γ^2 は，$M\gamma^i=\lambda_i\gamma^i$ から次のいずれの方程式によってでも求められる。

$$(25)\quad \gamma_h{}^i=\frac{1-\rho}{\lambda_i-1}\gamma_q{}^i$$
$$\gamma_h{}^i=\{[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1-\lambda_i\}\gamma_q{}^i$$

ここに $\gamma_h{}^i$ は γ^i ベクトルの第2行の要素で在庫量に対応し，$\gamma_q{}^i$ は第1行の要素で生産量に対応している。(25)式のいずれによっても $\gamma_q{}^i$ と $\gamma_q{}^i$ の比率は同一であるから，いま γ^i ベクトルを規準化して示せば $\{1, 1-\rho/\lambda_i-1\}$ か $\{1, [(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1-\lambda_i\}$ で示しうる。ところで $\lambda_i>1$ であるから，γ_1, γ_2 の2つの固有ベクトルは共に正ベクトルであることを知る[11)]。我々はここで，λ_i の大きなものを λ_1，小さなものを λ_2 としよう。従って第1図のような生産量，在庫量の2次元空間で表示すれば，正象限において γ^1 ベクトルは必らず γ^2 ベクトルの下方に存在していることになる。

さて(21)式の解(22)式は，M 行列による逐次的な線型変換のプロセスが次のプロセス，即ち，まず初期には2次元空間に与えられた初期点を2つの固有ベクトル γ^1，γ^2 の上に変換し，以後毎期 γ^1 ベクトル上に変換された初期の点を γ^1 方向に $\lambda_1{}^t$ 倍し，γ^2 ベクトル上に変換された初期の点を γ^2 方向に $\lambda_2{}^t$ 倍して，これを合成していくプロセスに等しくそれによって各期の座標が決定されることを示している。何故なら，$R\Lambda^t=\lambda_1{}^t\gamma^1+\lambda_2{}^t\gamma^2$ であり，$R^{-1}z(0)$ は q, h 空間上に与えられた初期点を，基底に選んだ γ^1 と γ^2 の2つのベクトルによって示したときの両ベクトルのウェイト(両ベクトル上における原点からの距離)となっているからに他ならない。そこで(22)式を次のように書いておこう[12)]。

---

8)　第1図において0は前期の座標，1は今期の座標を示し，$1'$ 点は(20)式による変換で定まる座標を示している。(イ)と(ハ)のケースについては，前期の点が自由領域内と域外とに与えられた場合に応じて2つのケースが示されている。また $\rho\ll 1$ であるから，両軸が同一の尺度で測られたグラフであれば上方限界線は45°線より下に位置している。

9)　$MR=R\Lambda$ より $M=R\Lambda R^{-1}$　∴　$M^t=R\Lambda^t R^{-1}$

10)　簡単には次のように確められる。いま $(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})\equiv w$ とおけば固有方程式は $\lambda^2-(w+1)\rho\lambda+w\rho=0$. この2次方程式の判別式を D とすれば $D=(w+1)^2\rho^2-4w\rho=\rho\{(w+1)^2\rho-4w\}$. 我々の仮定によって $w\geqq 2$, $\rho\ll 1$ であるから $D\fallingdotseq\rho(w-1)^2>0$ としてよいであろう。次に $\lambda_i\geqq 1$ の考慮には $f(\lambda)=\lambda^2-(w+1)\rho\lambda+w\rho$ として $f(0), f(1)$ を求めてみる。$f(0)=w\rho>0$; $f(1)=1-\rho>0$. そこで $f(\lambda)$ の最小値を与える λ を求める。$f'(\lambda)=2\lambda-(w+1)\rho=0$　∴　$\lambda=\dfrac{(w+1)\rho}{2}>1$　故に優根はもとより劣根も1より大である。

11)　γ^i ベクトルが正であることのためには $\lambda_i>1$ であればよいから期待係数 $\bar{e}$ は必ずしも非負でなくともよい。10)で述べた所からこの条件を求めれば $e>-\beta/1+\bar{\beta}$ ならば十分である。

12)　この点に関するやさしい解説については例えば岡本・稲田〔9〕pp. 103–106 参照。

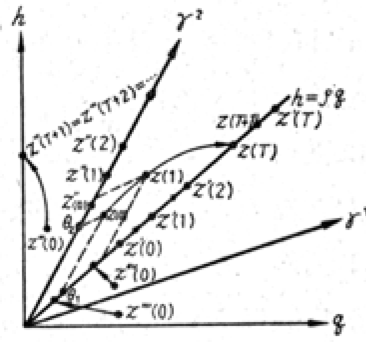
(22′) $z(t)=\theta_1\lambda_1{}^t\gamma^1+\theta_2\lambda_2{}^t\gamma^2$

ここに $\{\theta_1\theta_2\}=R^{-1}z(0)$ である。先に示したように，λ_1，λ_2 の2根は共に1より大でしかも λ_1 が優根であるから，(22′)式は t が大きくなるにつれて θ_1 がゼロでない限り，q, h の変動径路は γ^1 の方向($\theta'_1>0$ のとき)か，その逆の方向($\theta_1<0$ のとき)に接近していくことがわかる。

9. 生産量・在庫量の変動径路を特徴づけるものが固有ベクトル γ^1, γ^2 であることは明らかであるから，これと変動径路を制約する上方限界線(規準化して示せば $\{1, \rho\}$ というベクトル)との関係で次の3つのケースに分けて動学径路を考察し経済的意味を検討しょう[13]。

i) 上方限界線が γ^1 ベクトルと γ^2 ベクトルの間に位置する場合。このときには $\dfrac{1-\rho}{\lambda_2-1}>\rho>\dfrac{1-\rho}{\lambda_1-1}$ か，同じことであるが $[(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1-\lambda_2>\rho>[1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1-\lambda_1$ が成立している(第2図参照)。(イ) 初期点 $z(0)$ が上昇限界線と γ^2 ベクトルの間に与えられるケース。$z(0)$ 点を γ^1, γ^2 ベクトル上で示した値 θ_1, θ_2 は両ベクトルの間にあるから共にプラスである。以後 q, h 空間を動く変動径路 $z(1)$, $z(2)$……$z(T)$ 点は優根 λ_1 によって次第に γ^1 ベクトルに接近する。従ってある有限の期間後(これを T 時点としよう)に上方限界線に丁度到達するか，或いは $T-1$ 期から T 期の運動で上方限界線の右に出ることになろう。後者の場合には T 期にこれ迄の M 行列による変換のルールが変更になって上方限界線に引き戻される。いずれの場合も $T+1$ 期以後は毎期(20)式による変換では上方限界線の右に出るから，必らず上方限界線に沿って上昇を続けることになる。(ロ) 初期点 $z'(0)$ が上昇限界線上に与えられる場合。このときには(イ)のケースの $T+1$ 期以後の場合と同一の運動となるから，上昇限界線上を進む一種の均衡成長径路が強制的に実現される。このときの成長率は $1-\rho/\rho$ である[14]。(ハ) 初期点 $z''(0)$ が γ^2 上に与えられるケース。このときには $\theta_1=0$ であるから，以後の変動径路は γ^2 ベクトル上を生産量について λ_2-1 の成長率で成長していく全くの均衡成長が実現する[15]。(ニ) γ^2 ベクトルと下方限界線との間に初期点 $z'''(0)$ が与えられるケース。このときには $\theta_1<0$ となるから，γ^1 ベクトルの負の方向に z の time path は接近しつづける。従ってある有限の期間後に必らず下方限界線を横切ることになる。このとき変換のルールは M 変換からスウィッチされて下方限界線に引き戻される。一度びこの下方限界線上に到達すると，以後この点に止まり続けることは，基本方程式の在庫量水準の決定式から容易に理解されよう。(ホ) 自由領域外に初期点 $z''''(0)$ が与えられた場合。このときには第1期目に必らず上方限界線上にスウィッチされ，以後は(ロ)のケースと同一である[16]。

第2図



以上が第 i) のケースの変動径路であるが，その経済的意味を吟味しておこう。まず(イ)，(ロ)及び(ホ)のケースでは，在庫量に比較して生産量が高い状態から出発するから，各産業は在庫を多くするために多くの生産計画をたてることになる。すべての産業がこのように行為する結果，販売量は増加するが，依然在庫量はそれに追いつけず不足気味に推移する。そこで，次の期にまた各産業はより多くの生産計画をたてることになって，先と同一の経過をたどり，繁栄が続くのである。(ニ)のケースでは，各産業は初期に販売量に比して在庫量が過大であることを自覚して生産計画を切下げる。すべての産業がこのように行為するから，販売量はますます減少し在庫量との関係はますます過剰気味となり，生産は更に切下げられることになる。このようなプロセスを経て，遂に生産量

13) 固有ベクトル γ^1, γ^2 と上方限界線のベクトルとの大小関係は，パラメーター $\bar{\beta}$, $\bar{e}$, ρ の値が definite に定まっていれば明確であるが，ここでは一般的に考えられる3つのケースをすべて検討することにした。γ^1 ベクトルが上方限界線の下にあることの可能性は非常に大きい。

14) 成長率が $1-\rho/\rho$ であることは次のように計算される。$h(t)=(1-\rho)q(t-1)+h(t-1)$ であるから，この $h(t)$ を上方限界線に代入すれば

$$q(t)=\frac{(1-\rho)q(t-1)+h(t-1)}{\rho}$$

となる。そこで

$$\frac{q(t)-q(t-1)}{q(t-1)}=\frac{1-\rho}{\rho}$$ を得る。

15) γ^2 ベクトル上の点であるから，

$$(1-\rho)q(t-1)+h(t-1)=\frac{1-\rho}{\lambda_2-1}q(t)$$

より $$\frac{q(t)-q(t-1)}{q(t-1)}=\lambda_2-1$$

を得る。

16) (ホ)のケースでは初期点が γ^1 ベクトルより上方に与えられる場合と下方に与えられる場合の2つの場合が考えられる。どちらの場合も本文の説明の如く径路が定まるが，操作上では γ^1 ベクトルの上に与えられた場合には $\theta_1>0$, $\theta_2>0$ となるが，γ^2 ベクトルの下に与えられたときには $\theta_1>0$, $\theta_2<0$ となるという相異がある。

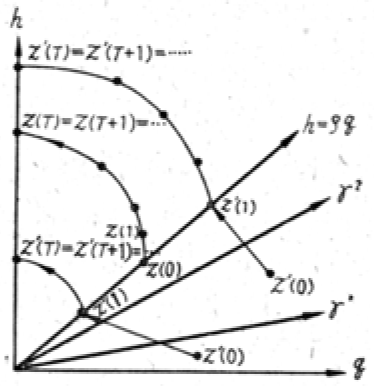
はゼロに落ちこむのであって，drastic な不況経済に見舞われるケースがこれである。(ハ)は以上の中間のケースであって，i) の条件下では1つの好ましいパターンと云えよう。

10. ここでは，**ii)** γ^2 ベクトルが上方限界線の下に位置する場合，を考えよう。このときには当然に

$$\rho > \frac{1-\rho}{\lambda_i-1} \text{（又は } \rho > [(1+\bar{\beta})(1+\bar{e})+1]\rho-1-\lambda_i\text{）}$$

第3図がこの状態を示している。動学径路の追跡方法は i) のケースと同一であるから簡単に説明する。(イ) いま初期点 $z(0)$ が上方限界線を含めた自由領域内に与えられた場合には $\theta_1<0$, $\theta_2>0$ となるから，既に説明したメカニズムによって $z(0)$ は下方限界線に向って進行する。下方限界線に達すると，それ以後，生産量ゼロの水準に止まり続けることは先に説明した通りである。(ロ) 初期点 $z'(0)$ が上方限界線の右に与えられた場合には，必らず最初の第1期に上方限界線上に変換され，以後は(イ)と同一のケースとなる。

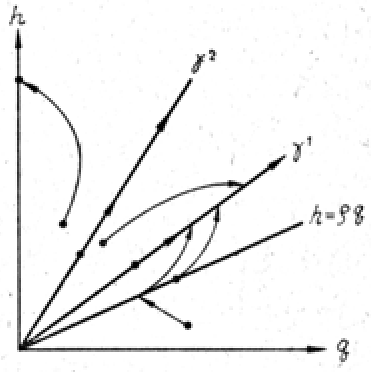
第 3 図



したがって，γ^2 ベクトルが上方限界線の右に位置する場合には経済体系は全く繁栄の見込みはなく，不況経済を経験しなければならない。このような経済的に好ましからざる結果が生じるのは，この経済では企業家の意欲が極めて消極的で最適在庫係数，期待係数の値が低過ぎることに起因しているのである。

11 最後のケースとして，**iii)** γ^1 ベクトルが上方限界線の左に位置している場合を検討しよう。先の i) 及び ii) のケースについて詳細な説明を加えたから，ここでは第4図の結果のみを述べれば十分であろう。(イ) 初期点が γ^1 ベクトルより左の自由領域内に与えられた場合には，その動学径路は全く i) のケースと相似た運動によって γ^1 ベクトルに収斂していく。i) では上方限界線のために γ^1 ベクトルに収斂出来ず，上方限界線に収斂したが，ここでは直接に γ^1 ベクトルに収斂していく。もしも γ^2, γ^1 両ベクトル上に初期点が与えられれば，均衡成長が行われ，その成長率はそれぞれ λ_2-1, λ_1-1 である[17]。(ロ) 初期点が γ^1 ベクトルより右に与えられた場合には，下方から γ^1 ベクトルに収斂していく。

第 4 図



IV　結びに代えて

12. 我々が以上において明らかにした問題は，常に産業間のバランスが保たれている経済において，景気変動がどのような様相を示すかである。モデル分析によって主張しうることは，**景気循環の原因を資本主義経済における産業間の生産のアンバランスに帰ることは必ずしも正当な主張とは言えない**ということである。勿論，この主張が強い説得力を持つためには，我々の仮定した多くの単純化の条件が取除かれねばならない。これの問題への接近は今後に残されている。

17) γ^1 ベクトル上の成長率が λ_1-1 であることの証明は，γ^2 ベクトルについてその均衡成長率が λ_2-1 となることを証明した註 15) から直ちに導出される。

〔参　照　文　献〕

〔1〕 Georgescu-Roegen, N., "Relaxation Phenomena in Linear Dynamic Models", in *Activity Analysis of Production and Allocation,* edited by T.C. Koopmans, 1951.

〔2〕 Hicks, J. R., *Value and Capital,* 2nd Edition, 1946. (安井・熊谷訳)

〔3〕 ————, *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle,* 1951. (古谷訳)

〔4〕 Joint Economic Committee, *Inventory Fluctuations and Economic Stabilization,* part I. part II, and part III, 1961.

〔5〕 Lovell, M., "Manufacturers' Inventories, Sales Expectations, and the Acceleration Principle", *Econometrica,* Vol. 29, No. 3, July 1961.

〔6〕 ———— "Buffer Stocks, Sales Expectations, and Statbility : A Multi-Sector Analysis of the Inventory Cycle," *Econometrica,* Vol. 30, No. 2, April 1962.

〔7〕 Metzler, L. A., "The Nature and Stability of Inventory Cycles", *Review of Economic Statistics,* XXIII, No. 3, August 1941.

〔8〕 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』1960。

〔9〕 岡本哲治・稲田献一,『現代経済理論のための数学入門』。