地域経済分析

——チェネリー方式を中心として——

山田　勇

1. まえがき

地域経済分析と産業連関方式によって分析する場合，いろいろな研究が行われてきたが，大きく分けて，アイザード方式[1)]，レオンチエフ方式[2)]，チェネリー方式[3)]に分けることができよう。これらは本質的に異なるものとは考えられないが，これを後進地域の開発計画方式として考える場合，チェネリー方式が有益な分析方法を提供してくれる。

さきにチェネリー方式について，これを定式化することをこころみたのであるが[4)]，本稿では，さきの考察をさらに追求して，これと一般的な産業連関モデルとの関係を求めた。その結果は，容易に予想できるように，各地域ごとの投入係数が相互に相等しく，さらに各地域の需要がそれぞれの地域ごとに完全に自給されるものと考えた場合，チェネリー方式は全国を1本にした通常の産業連関モデルに誘導できる点を証明した。

本稿の主たる目的は以上のとおりであるが，この際，チェネリー方式に線型計画法を適用して，与えられた条件のもとに労働投入量を最小ならしめるためには，その供給係数マトリックスが単位マトリックスとならなければならないことをも併せて証明した。

ここで残された問題は，供給係数マトリックスの統計的測定の方法についてである。チェネリー方式が実際問題に適用されるためには，ぜひとも供給係数マトリックスが測定されなければならないが，これは必ずしも容易なわざではない。筆者はこの点を考慮して1つの簡易推定法を考えているのであるが，ここではこれを割愛し，他の機会にゆずることとした。残された問題の第2は，開発方式の動学化であるが，これについてもまた後日の機会を待たねばならない。ここでは静学モデルについての検討を一応の問題としたことを注記しておく[5)]。

2. 国民経済と地域経済の関連

通常の産業連関分析を地域経済分析にそのまま適用すれば，どうなるかをここでの問題としよう。ここに通常の産業連関分析というのは，各地域のインプット，アウトプットおよび最終需要を地域ごとに合計したものが全国の計数に等しくなるようなモデルを意味する。例を示してこれを説明しよう。いま簡単のために地域をA, Bの2つとし，部門をI，IIの2つとする。この場合，各地域の産業連関表およびこれを合計した全国の産業連関表が第1表に示す如くであったとする。ここにY

第1表　地域別・全国産業連関表

	A地域				B地域				全国			
	I	II	Y	X	I	II	Y	X	I	II	Y	X
I	5	2	3	10	6	2	22	30	11	4	25	40
II	4	5	11	20	9	10	21	40	13	15	32	60

は最終需要，Xはアウトプットをあらわす。この表から明らかなように，全国の計数は両地域の計数A, Bの合計である。しかもこの表は，A, B両地域が地域ごとにバランスを保つと同時に，全国に

1) Walter Isard, "Interregional and Regional Input-Output Analysis: A Model of a Space-Economy", *Resriw of Economics and Statistics*, Vol. XXXIII, No. 4, Nov. 1951, pp. 318—328.

2) Wassily W. Leontief, "Interregional Theory", *Studies in the Strurc of the American Economy*, ed. by W. Leontief and Others, 1953, pp. 93—115.

3) Hollis B. Chenery, "Regional Analysis" *The Stracture and Growth of the Italian Economy*, ed. by Mutual Security Agency, 1953, pp. 97—116.

4) 山田勇『産業連関の理論と計測』1961, pp. 128—139.

5) 地域分析の動学モデルを取り扱った文献としてつぎの研究を掲げておく。F. T. Moore, "Regional Economic Reaction Paths", *American Economic Review*, Vol. XLV, No. 2, Hay 1955, pp. 133—148.

おいてもバランスを保つものと仮定した表である。そこで A, B 両地域および全国の投入係数 a_a, a_b, a, ならびにそれらの逆行列 R_a, R_b, R を示せばつぎのとおりである。

$$a_a=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1\\ 0.4 & 0.25\end{bmatrix},\quad a_b=\begin{bmatrix}0.2 & 0.05\\ 0.3 & 0.25\end{bmatrix},\quad a=\begin{bmatrix}0.275 & 0.067\\ 0.325 & 0.25\end{bmatrix}$$

$$R_a=\begin{bmatrix}2.238 & 0.299\\ 1.194 & 1.492\end{bmatrix},\quad R_b=\begin{bmatrix}1.282 & 0.085\\ 0.513 & 1.368\end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix}1.437 & 0.128\\ 0.623 & 1.389\end{bmatrix}$$

そこでいま，A地域において第Ⅰ部門の最終需要が5だけ増加したものとして，A地域のバランスをこの地域の逆行列を使って求めたものが第2表のA地域の計数である。B地域においてはこの場合何等の変化も生じないのであるから，第2表のB地域の計数を第1表のB地域の計数そのままとし，そのうえで両地域の計数を合計して全国の表を作ったものが第2表の全国の表である。しかしここで注意すべき問題は，このようにして作成された全国表はすでにバランスを失してしまっているということである。何となれば，この全国表から求めた投入係数は(1)式の a とは異なることが明らかであるからである。

第2表　A地域のYが5増加した表

	A地域				B地域				全国			
	Ⅰ	Ⅱ	Y	X	Ⅰ	Ⅱ	Y	X	Ⅰ	Ⅱ	Y	X
Ⅰ	10.6	2.6	8	21.2	6	2	22	30	16.6	4.6	30	51.2
Ⅱ	8.5	6.5	11	26	9	10	21	40	17.5	16.5	32	66

それではA地域においてもバランスを保ち，かつ全国表においてもバランスを保つようにした場合，B地域の表はどうなるか。第3表はその結果を示したものであるが，ここでA地域表は第2表と同じであり，全国表はその第Ⅰ部門の最終需要を第1表より5だけ多いものとして，これにまえのRを使って計算したものである。問題はB地域表であるが，これは，全国表の計数からA地域表の計数を差し引いたものである。この結果を見れば明らかなように，B地域はすでにバランスを失している。しかもこの場合注意すべきことは，第1表と比較して，最終需要には変化はないが，インプット，アウトプットともに減少しているということである。

第3表　A地域，全国がバランスを保つ場合

	A地域				B地域				全国			
	Ⅰ	Ⅱ	Y	X	Ⅰ	Ⅱ	Y	X	Ⅰ	Ⅱ	Y	X
Ⅰ	10.6	2.6	8	21.2	2.4	1.6	22	26	13.0	4.2	30	47.2
Ⅱ	8.5	6.5	11	26	6.8	9.3	21	37.1	15.3	15.8	32	63.4

それでは第1表の状態から，B地域だけについて，その第Ⅰ部門の最終需要が5だけ増加した場合にはどうなるか。その結果を第4表に示す。この場合A地域は何等の変化をうけないものとして，この表のA地域の分は第1表そのままの計数である。全国表は，このようなA, B両地域の計数の合計である。この場合でもまた，全国表ではバランスが崩れている。そこで第3表の場合同様に，全国でもバランスを保つように，まえのRを使って，インプット，アウトプットを求めたものが第5表の全国表に示してある。(その結果は第3表の全国表と同じであることはいうまでもない。)ここでB地域表は第4表のものと同様である。A地域表は全国表の計数からB地域表の計数を差し引いた結果である。もはや明らかなように，A地域表のバランスは保たれていない。しかもこの場合は，第3表のB地域の場合とは逆であって，第1表のA地域表と比較して，最終需要は同じであっても，インプット，アウトプットが増加している。

第4表　B地域のYが5増加した表

	A地域				B地域				全国			
	Ⅰ	Ⅱ	Y	X	Ⅰ	Ⅱ	Y	X	Ⅰ	Ⅱ	Y	X
Ⅰ	5	2	3	10	7.3	2.1	27	36.4	12.3	4.1	30	46.4
Ⅱ	4	5	11	20	10.9	10.7	21	42.6	14.9	15.7	32	62.6

第5表　B地域，全国がバランスを保つ場合

	A地域				B地域				全国			
	Ⅰ	Ⅱ	Y	X	Ⅰ	Ⅱ	Y	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Y	X
Ⅰ	5.7	2.1	3	10.8	7.3	2.1	27	36.4	13	4.2	30	47.2
Ⅱ	4.4	5.1	11	20.5	10.9	10.7	21	42.6	15.3	15.8	32	63.1

これを要約すれば，地域分析に産業連関分析を適用する場合，この地域分析に何等特別な工夫をしないで，通常の分析方法にしたがって，地域表，全国表を作成するとすれば，そのうちの1つの表は原則としてバランスを失することが明らかとなった。これは当然のことであって，証明するまでもなく，常識的な結論ともいえるであろう。しか

もこの種の問題は，地域分析というよりは，むしろ一般的なアグリゲーションの問題に属するものといってよい。

ただ注意すべき点は，第3表の場合，すなわち，A地域と全国がバランスをとり，B地域がその結果としてバランスを失する場合，B地域では第1表の場合よりもインプット，アウトプットが減少し，また第5表の場合，すなわち，A地域と全国がバランスをとり，B地域がその当然の結果としてバランスを失する場合，A地域では第1表の場合よりもそのインプット，アウトプットが増大するということである。その増減の原因は，容易にわかるように，それらの投入係数に問題がある。すなわち第1表において，全国表の投入係数は，A地域とB地域との投入係数の，アウトプットをウェイトにした加重算術平均となっていることに原因がある。したがって，全国を2地域に分割した場合には，全国の投入係数は各地域の大きい方の投入係数よりも小となり，小さい方の投入係数よりも大となる。これが，インプットアウトプットの増減の原因となっている。

以上は技術的な考察であるが，これを経済的に見ることにすれば，地域開発のためにある地域に最終需要を投下した場合，その地域のインプットアウトプットを増大して，その地域経済をうるおすことはいうまでもないが，この地域と競争的な立場にある他の地域には悪影響を及ぼすことになり，その地域と相補的な立場にある他地域には好影響を与えることになるであろう。第3表のB地域をA地域と競争的な立場にあると見，第5表のA地域をB地域と相補的な地域と見れば，以上の計算結果を受け入れることができるが，同じ両A, B地域が，ある場合には競争的，ある場合には相補的となることは論理的ではない。したがって，地域分析に通常の産業連関表をそのままの形で適用することは経済的に矛盾があるように思われる。そこで，つぎに，地域分析に特別な考慮を払ったチェネリー方式について考えてみよう。

3. チェネリー方式の定式化

チェネリー方式の定式化についてはすでに他の機会にこれをこころみたのであるが，ここでもういちどその結果を要約しておこう。

いま地域をA, Bの2地域とし，部門をⅠ，Ⅱ，Ⅲの3部門とする。この場合の基本表として，地域別投入係数表と地域別供給係数表を掲げる。地域別投入係数についてはとくに注意すべき点はない。地域別供給係数は，チェネリー方式の特徴ともいえるものであって，第7表において，pをA地域，qをB地域の供給係数とする。すなわち，p_aはA地域の需要1単位を満たすためにA地域それ自体からどれだけ供給せられるかという割合を示し，p_bは同じくA地域の需要1単位を満たすためにB地域からどれだけ供給せられるかという割合を示す。またq_aはB地域の需要1単位に対するA地域からの供給比率，q_bはB地域からの供給比率をあらわす。チェネリーの場合には

第6表　地域別投入係数表

	A 地 域			B 地 域		
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
Ⅰ	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_{11}	b_{12}	b_{13}
Ⅱ	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_{21}	b_{22}	b_{23}
Ⅲ	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_{31}	b_{32}	b_{33}

第7表　地域別供給係数表

	A地域の需要		B地域の需要	
	A地域	B地域	A地域	B地域
Ⅰ	p_{a1}	p_{b1}	q_{a1}	q_{b1}
Ⅱ	p_{a2}	p_{b2}	q_{a2}	q_{b2}
Ⅲ	p_{a3}	p_{b3}	q_{a3}	q_{b3}

$$\begin{aligned} p_{a1}+p_{b1}&=1, \quad q_{a1}+q_{b1}=1 \\ p_{a2}+p_{b2}&=1, \quad q_{a2}+q_{b1}=1 \\ p_{a3}+p_{b3}&=1, \quad q_{a3}+q_{b3}=1 \end{aligned} \tag{1}$$

という関係が考えられている。

そこでいま，最終需要をA, B両地域に対して第8表の左側のように与えるものとする。これに対する最終需要の記号を右側のように定める。この最終需要と最終供給との間にはつぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned} p_a Y_a^0 + q_a Y_b^0 &= S_a^0 \\ p_b Y_a^0 + q_b Y_b^0 &= S_b^0 \end{aligned} \tag{2}$$

ここに

$$p_a=\begin{bmatrix} p_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{a3} \end{bmatrix},\quad p_b=\begin{bmatrix} p_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{b3} \end{bmatrix}$$

$$q_a=\begin{bmatrix} q_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{a3} \end{bmatrix},\quad q_b=\begin{bmatrix} q_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{b3} \end{bmatrix}$$

$$Y_a{}^0=\begin{bmatrix}Y_{a1}{}^0\\Y_{a2}{}^0\\Y_{a3}{}^0\end{bmatrix},\quad Y_b{}^0=\begin{bmatrix}Y_{b1}{}^0\\Y_{b1}{}^0\\Y_{b3}{}^0\end{bmatrix},\quad S_a{}^0=\begin{bmatrix}S_{a1}{}^0\\S_{a2}{}^0\\S_{a3}{}^0\end{bmatrix},\quad S_b{}^0=\begin{bmatrix}S_{b1}{}^0\\S_{b2}{}^0\\S_{b3}{}^0\end{bmatrix}$$

である。さらにつぎのように，a, b を定義する。

第8表　最終需要・最終供給表

	最終需要		最終供給	
	A地域	B地域	A地域	B地域
I	$Y_{a1}{}^0$	$Y_{b1}{}^0$	$S_{a1}{}^0$	$S_{b1}{}^0$
II	$Y_{a2}{}^0$	$Y_{b2}{}^0$	$S_{a2}{}^0$	$S_{b2}{}^0$
III	$Y_{a3}{}^0$	$Y_{b3}{}^0$	$S_{a3}{}^0$	$S_{b3}{}^0$

$$a=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

A, B 両地域の第1次間接効果は

$$[ap_a\quad aq_a]\begin{bmatrix}Y_a{}^0\\Y_b{}^0\end{bmatrix}=Y_a' \qquad (3)$$

$$[bp_b\quad bq_b]\begin{bmatrix}Y_a{}^0\\Y_b{}^0\end{bmatrix}=Y_b'$$

で与えられる。ここに

$$Y_a'=\begin{bmatrix}Y_{a1}'\\Y_{a2}'\\Y_{a3}'\end{bmatrix},\quad Y_b'=\begin{bmatrix}Y_{b1}'\\Y_{b2}'\\Y_{b3}'\end{bmatrix}$$

は第1次間接効果の結果えられる需要をあらわす。第2次間接効果以下も，第1次間接効果と同様の手続きによって求められる。いまA地域についての効果の総計を Y_a, B地域についてのそれを Y_b とすれば

$$Y_a=Y_a{}^0+[ap_a\quad aq_a][I-Q]^{-1}\begin{bmatrix}Y_a{}^0\\Y_b{}^0\end{bmatrix}$$

$$Y_b=Y_b{}^0+[bp_b\quad bq_b][I-Q]^{-1}\begin{bmatrix}Y_a{}^0\\Y_b{}^0\end{bmatrix}$$

となる。ただし $Q=\begin{bmatrix}ap_a&aq_a\\bp_b&bq_b\end{bmatrix}$ である。以上は，筆者がまえの機会にえた，チェネリー方式の定式化であってこ，れによって，繰り返し法による近似計算ではなく，正確な結果を求めることができる。

4.　チェネリー方式の一般化とその性質

前節では地域を A, B の2つ，部門を I, II, III の3つに限定して定式化を行ったものであるが，地域を A, B, C, …, M の m 個，部門を，I, II, III …, N の n 個に拡張しても同様の式がえられる。すなわち

$$Y_a=Y_a{}^0+[ap_a\quad aq_a\cdots ar_a][I-Q]^{-1}\begin{bmatrix}Y_a{}^0\\\vdots\\Y_m{}^0\end{bmatrix}$$

$$Y_b=Y_b{}^0+[bp_b\quad bq_b\cdots br_b][I-Q]^{-1}\begin{bmatrix}Y_a{}^0\\\vdots\\Y_m{}^0\end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_m=Y_m{}^0+[mp_m\quad mq_m\cdots mr_m][I-Q]^{-1}\begin{bmatrix}Y_a{}^0\\\vdots\\Y_m{}^0\end{bmatrix}$$

ここに

$$Y_a=\begin{bmatrix}Y_{a1}\\Y_{a2}\\\vdots\\Y_{an}\end{bmatrix},\quad Y_b=\begin{bmatrix}Y_{b1}\\Y_{b2}\\\vdots\\Y_{bn}\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad Y_m=\begin{bmatrix}Y_{m1}\\Y_{m2}\\\vdots\\Y_{mn}\end{bmatrix}$$

$$Y_a{}^0=\begin{bmatrix}Y_{a1}{}^0\\Y_{a2}{}^0\\\vdots\\Y_{an}{}^0\end{bmatrix},\quad Y_b{}^0=\begin{bmatrix}Y_{b1}{}^0\\Y_{b2}{}^0\\\vdots\\Y_{bn}{}^0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad Y_m{}^0=\begin{bmatrix}Y_{m1}{}^0\\Y_{m2}{}^0\\\vdots\\Y_{mn}{}^0\end{bmatrix}$$

$$a=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots a_{nn}\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\cdots b_{1n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\b_{n1}&b_{n2}\cdots b_{nn}\end{bmatrix},\quad\cdots,$$

$$m=\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}\cdots m_{1n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\m_{n1}&m_{n2}\cdots m_{nn}\end{bmatrix}$$

$$p_a=\begin{bmatrix}p_{a1}&&0\\&p_{a2}&\\0&&\ddots\ p_{an}\end{bmatrix},\quad p_b=\begin{bmatrix}p_{b1}&&0\\&p_{b2}&\\0&&\ddots\ p_{bn}\end{bmatrix},\quad\cdots,$$

$$p_m=\begin{bmatrix}p_{m1}&&0\\&p_{m2}&\\0&&\ddots\ p_{mn}\end{bmatrix}$$

$$q_a=\begin{bmatrix}q_{a1}&&0\\&q_{a2}&\\0&&\ddots\ q_{an}\end{bmatrix},\quad q_b=\begin{bmatrix}q_{b1}&&0\\&q_{b2}&\\0&&\ddots\ q_{bn}\end{bmatrix},\quad\cdots,$$

$$q_m=\begin{bmatrix}q_{m1}&&0\\&q_{m2}&\\0&&\ddots\ q_{mn}\end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_a=\begin{bmatrix}r_{a1}&&0\\&r_{a2}&\\0&&\ddots\ r_{an}\end{bmatrix},\quad r_b=\begin{bmatrix}r_{b1}&&0\\&r_{b2}&\\0&&\ddots\ r_{mn}\end{bmatrix},\quad\cdots,$$

$$r_m=\begin{bmatrix}r_{m1}&&0\\&r_{m2}&\\0&&\ddots\ r_{mn}\end{bmatrix}$$

あらわす。また Q はこの場合は

$$Q=\begin{bmatrix} ap_a & aq_a\cdots ar_a \\ bp_b & bq_b\cdots br_b \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ mp_m & mq_m\cdots mr_m \end{bmatrix} \qquad (6)$$

であって，これは mn 行 mn 列の正方マトリックスである。

ここで吟味を要する問題は，$I-Q$ の逆行列が存在するかどうかについてである。この逆行列が存在するための必要かつ充分条件はいうまでもなく，$|I-Q|\neq 0$ である。この条件に関して興味ある問題は，(6)式の Q について考慮することであり，このマトリックスの各列和が1になるかどうかということである。そのために各列和をそれらの要素について表示するとつぎの結果がえられる。

$$\begin{aligned}&(a_{11}p_{a1}+\cdots+a_{n1}p_{a1})+\cdots+(m_{11}p_{m1}+\cdots+m_{n1}p_{m1})\\&=(a_{11}+\cdots+a_{n1})p_{a1}+\cdots+(m_{11}+\cdots+m_{n1})p_{m1}\\&\leqq p_{a1}+\cdots+p_{m1}=1\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}&(a_{1n}p_{an}+\cdots+a_{nn}p_{an})+\cdots+(m_{1n}p_{mn}+\cdots+m_{nn}p_{mn})\\&\leqq p_{an}+\cdots+p_{mn}=1\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}&(a_{11}r_{a1}+\cdots\cdots p_{n1}r_{a1})+\cdots+(m_{11}r_{m1}+\cdots+m_{n1}r_{m1})\\&\leqq r_{a1}+\cdots+r_{m1}=1\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}&(a_{1n}r_{an}+\cdots+a_{nn}r_{an})+\cdots+(m_{11}r_{mn}+\cdots+m_{nn}rm_n)\\&\leqq r_{an}+\cdots+r_{mn}=1\end{aligned}$$

したがって Q の各列和は1に等しいか，1よりも小である。かつまた通常の産業連関表に見られるように，投入係数の列和がことごとく1に等しいことはありえない。以上の結果を総合すれば，$|I-Q|\neq 0$ が証明できる。したがって極めて特殊の場合を除き，普通の連関表では，$I-Q$ の逆行列は存在することがわかる。

5. 線型計画法によるチェネリー方式の解釈

ここでは2部門，2地域について考えてみよう。この場合には部門をⅠ，Ⅱ部門とすることによって，(4)式がそのまま利用できる。ただし(1)式をつぎのように変更する。

$$\begin{aligned}&p_{a1}+p_{b1}\geqq 1,\ q_{a1}+q_{b1}\geqq 1 &&(1a)\\&p_{a2}+p_{b2}\geqq 1,\ q_{a2}+q_{b2}\geqq 1\end{aligned}$$

これは需要が供給を超えることができないという条件にほかならない。つぎに(2)式から

$$\begin{aligned}&p_{a1}Y_{a1}{}^0+q_{a1}Y_{b1}{}^0=S_{a1}{}^0\\&p_{a2}Y_{a2}{}^0+q_{a2}Y_{b2}{}^0=S_{a2}{}^0\\&p_{b1}Y_{a1}{}^0+q_{a1}Y_{b1}{}^0=S_{b1}{}^0 &&(2a)\\&p_{b2}Y_{a2}{}^0+q_{a2}Y_{b2}{}^0=S_{b2}{}^0\end{aligned}$$

(以下直接効果を示す右肩のを0とって Y, S とあらわすことにしよう。) 上式の第1式と第3式とから，(1a)式を考慮してつぎの式を導びくことができる。

$$S_{a1}+S_{b1}=(p_{a1}+p_{b1})Y_{a1}+(q_{a1}+q_{b1})Y_{b1}\geqq Y_{a1}+Y_{b1} \qquad (7)$$

さらに(1a)式から

$$(p_{a1}+p_{b1})+(q_{a1}+q_{b1})\geqq 2 \qquad (8)$$

をうる。ここで目的函数を労働量の式

$$\begin{aligned}&l_{a0}S_{a1}=l_{a0}(p_{a1}Y_{a1}+q_{a1}Y_{b1})\\&l_{b0}S_{b1}=l_{b0}(p_{b1}Y_{a1}+q_{b1}Y_{b1})\end{aligned}$$

とし，その合計を最小にする問題を考える。ここに l_{a0} は S_{a1} を1単位作るに要する労働量，l_{b0} は S_{b1} を1単位作るに要する労働量とする。そこでこの労働量の合計は

$$\begin{aligned}&l_{a0}Y_{a1}(p_{a1}+p_{b1})+l_{b0}Y_{b1}(q_{a1}+q_{b1})\\&-(p_{b1}Y_{a1}-q_{a1}Y_{b1})(l_{a0}-l_{b0})\end{aligned}$$

となる。ここで $(p_{b1}Y_{a1}-q_{a1}Y_{b1})(l_{a0}-l_{b0})$ は無視しうるほど小さいものと仮定すれば，目的函数は

$$l_{a0}Y_{a1}(p_{a1}+p_{b1})+l_{b0}Y_{b1}(q_{a1}+q_{b1})=\min. \qquad (9)$$

となる。したがって，ここに線型計画法を適用し，Y_{a1} および Y_{b1} は与えられたものと考え，$p_{a1}+p_{b1}$ および $q_{a1}+q_{b1}$ を未知数とし，(7)，(8)式の条件のもとに，(9)式を最小ならしめる非負の値を求めることとする。

もしも $Y_{a1}>Y_{b1}$ ならば

$$\frac{Y_{b1}}{Y_{a1}}<\frac{l_{a0}}{l_{b0}}<1 \qquad (10)$$

の条件を満足するかぎり，(7)，(8)両式を等号で解いて

$$p_{a1}+p_{b1}=1,\ q_{a1}+q_{b2}=1 \qquad (11)$$

をうる。(2a)式の第2式と第4式とからも同様の結論がえられ

$$p_{a2}+p_{b2}=1,\ q_{a2}+q_{b2}=1 \qquad (12)$$

が導びかれる。したがって，(1a)式を仮定しても，労働量を最小にするかぎり，(1a)式は等号だけをとることとなり，需要と供給は一致する場合だけが問題となる。チェネリー方式はこのような条件

のもとにおいて，その正当性を保証できよう。

6. 地域分析モデルと国民経済モデルとの関係

いま

$$Y=\begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix},\quad Y^0=\begin{bmatrix} Y_a{}^0 \\ Y_b{}^0 \\ \vdots \\ Y_m{}^0 \end{bmatrix}$$

とすれば，(5)式を両辺加えることによって，つぎのような簡単な式をうる。

$$Y=[I-Q]^{-1}Y^0 \tag{13}$$

あるいは

$$[I-Q]Y=Y^0 \tag{14}$$

以上の式から明らかなように，チェネリー方式では，Y^0 を通常の産業連関表における最終需要，Y をそのアウトプット，Q を通常の投入係数と考えたものに形式上相等しい。チェネリー方式においても，もし最初に最終需要 Y^0 が与えられているものと見れば，(13)式から，この場合のアウトプットを求めることができる。通常の産業連関モデル

$$[I-A]X=Y \tag{15}$$

における X は中間生産物のみならず，最終需要 Y をも含めたアウトプットの総量であることは周知のとおりである。したがって，(15)式の左辺は最終需要に対する供給能力を示しているから，一般的にいえば

$$[I-A]X\geqq Y \tag{16}$$

が成立する。しかしこのような関係とチェネリー方式とを対比させるためには，つぎの準備を必要とする。

まず，(14)式において，各地域はその投入係数を等しくし，かつ各地域の需要はおのおのその地域内で完全に自給できるものと考える。そうすれば

$$a=b=\cdots=m$$

$$p_a=\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix},\quad p_b=0,\ \cdots,\ p_m=0$$

$$q_a=0,\quad q_a=\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix},\ \cdots,\ q_m=0$$

………………………………………………

$$r_a=0,\quad r_b=0,\ \cdots,\ r_m=\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

となり，したがって

$$Q=\begin{bmatrix} a & 0\cdots 0 \\ 0 & b\cdots 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0\cdots m \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} I_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_n \end{bmatrix}$$

$$I_{mn}-Q=I_{mn}-a\begin{bmatrix} I_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_n \end{bmatrix}$$

がえられる。ここに I_{mn} は mn 次の単位マトリックスをあらわし，I_n は n 次の単位マトリックスをあらわす。そこで(14)式の左右両辺の左から m 次の加法行ベクトルをかければ

$$[I_n-a]-[Y_b+Y_b+\cdots+Y_m]=[Y_a{}^0+Y_b{}^0+\cdots+Y_m{}^0]$$

がえられる。$Y_a+Y_b+\cdots Y_m=Y^*$，$Y_a{}^0+Y_b{}^0+\cdots+Y_m{}^0=Y^{0*}$ とすれば，上式は

$$[I_n-a]Y^*=Y^{0*} \tag{17}$$

となる。これは全国を1本に考えた場合の通常の産業連関モデルにほかならない。以上の結果を要約すれば，チェネリー・モデルは一般式であって，その際．各地域の投入係数が等しく，各地域はそのおのおのの需要を完全に自給できるものと考え，そのうえで各地域のインプット，アウトプット，最終需要を合計すれば，通常の産業連関モデルを導くことができる，ということになる。

最後に，仮設例により，(13)ないし(14)式を説明しよう。いま，地域別投入係数と地域別供給係数を第9表，第10表で与えられるものとしよう。ただし，この例では地域を A，B の2つとし，部門を I，II の2部門とする。

第9表　地域別投入係数

	A 地 域		B 地 域	
	I	II	I	II
I	0.4	0.2	0.3	0.5
II	0.6	0.3	0.5	0.3

第10表　地域別供給係数

	A地域最終需要		B地域最終需要	
	A地域	B地域	A地域	B地域
I	0.7	0.3	0.4	0.6
II	0.2	0.8	0.5	0.5

まず $-Q$ の逆行列を求めるためにつぎの計算を行う。

$$ap_a=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.28 & 0.04 \\ 0.42 & 0.06 \end{bmatrix}$$

$$aq_a=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.24 & 0.15 \end{bmatrix}$$

$$bp_b=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.09 & 0.40 \\ 0.15 & 0.24 \end{bmatrix}$$

$$bq_b=\begin{bmatrix}0.3 & 0.5\\0.5 & 0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.18 & 0.25\\0.30 & 0.15\end{bmatrix}$$

そこで

$$[I-Q]^{-1}=\begin{bmatrix}1.887 & 0.516 & 0.710 & 0.522\\1.331 & 1.774 & 1.065 & 0.783\\1.202 & 1.235 & 2.182 & 1.001\\1.133 & 1.028 & 1.196 & 1.843\end{bmatrix}$$

がえられる。

ところで，A地域の最終需要をⅠ，Ⅱ両部門についてそれぞれ10, 20, B地域についてはそれぞれ30, 40とすれば，(13)式によって

$$Y=[I-Q]^{-1}\begin{bmatrix}10\\20\\30\\40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}71.38\\112.06\\142.22\\141.49\end{bmatrix}$$

これからつぎの産業連関表が作成できる。この際

第11表　地域別産業連関表

	Ⅰ		Ⅱ		Y^0		Y	
	A	B	A	B	A	B	A	B
Ⅰ	24.47	51.25	36.90	60.97	10	30	71.38	142.22
Ⅱ	36.70	37.60	55.35	63.89	20	40	112.06	141.49

ⅠのAの計数は $ap_a Y_a^0$，ⅠのBは $bp_b Y_a^0$，ⅡのAは $aq_a Y_b^0$，ⅡのBは $bq Y_b^0$ の値であることを注意しておく。