短期経済予測について

山　田　　勇

1 は し が き

ここに経済予測とはいっても一般の経済予測の方法と変りはない。ただその対象が経済現象という特殊なものであるという点が，一般的な統計予測に特殊な性格を与えるに過ぎない。経済現象にかぎらず社会現象一般はそれが時々刻々変動し，自然科学とくに天文現象や物理現象に見られるように，母集団のパラメーターを推定することはそれほど容易でない。このことはまた経済現象が，物理実験や化学実験のように，一定の条件のもとで何回も繰り返して実験することができないという事実にも起因する[1]。

このような経済現象の特殊性から法則を見出し，この法則によって将来値を予測することは極めて困難である。過去の観察資料を基礎にして予測方程式を立てたとしても，そのなかに含まれる定数の値はたとえ最小自乗法や最尤法で推定しえても，その値が予測期間中変化しないと断定する保証は存在しないのが，社会現象一般に通ずる特徴である[2]。したがって従来の予測理論のように，パラメーターの推定を行うということと，予測を行うということとを1つにして予測すること，は多くの危険を伴うといわざるをえない。

そこで推定の問題 (problem of estimation) と予測の問題 (problem of prediction) とを峻別し，予測を最終目的とする場合には，予測の効率[3] を最大にするように推定の方法を考えることが重要となってくる[4]。

いま推定式中の変数 y を n 個とし，さらに1時点から T 時点までの推定期間中における残差項 $u_{11}, \cdots, u_{nT}$ の同時確率密度函数 p_1 は

$$p_1(y_{11}, \cdots, y_{nT})dy_{11}\cdots dy_{nT}$$

によってあらわすことができる。さらに $y_{11}, \cdots, y_{nT}$ を与えて，つぎの1つの予測時点 $T+1$ の値を予測するものとすれば，そのときの同時確率密度函数 p_2 は

$$p_2(y_{1,T+1}, \cdots, y_{n,T+1}|y_{11}, \cdots, y_{nT})dy_{1,T+1}\cdots dy_{n,T+1}$$

である。

そこですべての y の同時確率密度函数 p は

$$p(y_{11}, \cdots, y_{nT},\ y_{1,T+1}, \cdots, y_{n,T+1})dy_{11}\cdots dy_{n,T+1}$$
$$=p_1\cdot p_2$$

であらわされる[5]。p_1 については既知であるが，問題になるのは p_2 であって，これについてはある何等かの外部の知識が必要となってくる。

以下の方法は，p_2 に関する問題であって，これをいかに経験的に確定するかの問題である。

2 短期予測の方法

(A)　第1段階

いま第1時点と第2時点とを考える。第1時点においてある変量 $u(1)$ は，一定の基準によって選択した結果 $z_1, \cdots, z_m, z_{m+1}, \cdots, z_n$ の線型方程式によってあらわされるものとする。すなわち

$$u(1)=a_1z_1+\cdots+a_mz_m+a_{m+1}z_{m+1}+\cdots+a_nz_n \qquad (1)$$

同様に，この変量の第2時点における値，$u(2)$ は $z_1, \cdots, z_m, z_{n+1}, \cdots, z_p$ によって線型的にあらわされるものと考える。すなわち

$$u(2)=a_1z_1+\cdots+a_mz_m+a_{n+1}z_{n+1}+\cdots+a_pz_p \qquad (2)$$

---

1)　Trygve Haavelmo, *Probability Approach in Econometrics, Econometrica*, Vol. 12, Supplement, 1944, p. 7. (山田勇訳編『計量経済学の確率的接近法』p. 9.)

2)　パラメーターの安定性についてはつぎの文献を参照のこと。山田勇「経済予測とパラメーターの安定性」『経済研究』第10巻第3号 1959年7月，pp. 266—269.

3)　予測の効率の定義については，たとえばつぎの文献を参照せよ。H. Theil, *Economic Forecasts and Policy*, 1958, pp. 22—31.

4)　推定の問題と予測の問題とを区別するものとしては，Erling Sverdrup, "Weight Functions and Minimax Procedures in the Theory of Statistical Inference", *Cowles Commission Papers*, New Series, No. 63, 1952, pp. 56—74. L. R. Klein, *A. Textbook of Econometrics*, 1953, pp. 249—264. (宮沢光一・中村貢共訳『L. クライン計量経済学』pp. 311—329. などがある。

5)　Haavelmo, *op. cit.*, p. 106. (邦訳, p. 142.) Klein, *op. cit.*, p. 261. (邦訳 p. 311.)

ここに $u(1)$，$u(2)$，z_i はすべて規準化された値である。(1)式と(2)式とを比較すれば，それらの右辺にある説明変数のうち，$z_1, \cdots, z_m$ が両時点において共通であり，$u(1)$ の $z_{m+1}, \cdots, z_n$ が $u(2)$ の $z_{n+1}, \cdots, z_p$ によって置き換えられることがわかる。

(1)式はつぎの形に書くことができる。

$$u(1)=\sum_{i=1}^{m} a_i z_i+\sum_{i=m+1}^{n} a_i z_i \tag{1a}$$

ところでこの式をつぎの形に変換することを考える。

$$u'(1)=\sum_{i=1}^{m} b_i z_i \tag{3}$$

この変換にあたってつぎの条件を考える。すなわち，$u(1)$ と $u'(1)$ との相関関係をある一定の値 R_0 に押え，$u'(1)$ の分散，$\mathrm{var}\, u'(1)$ を極小にすることがこれである。すなわちいま $u(1)$ と $u'(1)$ との相関関係を R であらわせば

$$R=E[u(1)u'(1)]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j r_{ij} \equiv R_0 \tag{4}$$

$$\mathrm{var}\, u'(1)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_i b_j r_{ij}=\min \tag{5}$$

この問題を解くには

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_i b_j r_{ij}+2\mu\left(R_0-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j r_{ij}\right)=\min \tag{6}$$

を求める。ここに μ はラグランジュの定数である。(6)式を計算すれば

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} b_i r_{1i}=\mu\sum_{s=1}^{n} a_s r_{1s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{m} b_i r_{mi}=\mu\sum_{s=1}^{n} a_s r_{ms} \end{array}\right\} \tag{7}$$

上式の各式に順次 b_j をかけてのち，左右両辺を合計するとつぎの式がえられる。

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_i b_j r_{ij}=\mu\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_s b_j r_{js}$$

これから b_i を求めると

$$b_i=\mu\sum_{k=1}^{m} r^{ik} B_k \qquad (i=1, \cdots, m) \tag{8}$$

ただし

$$B_k \equiv \sum_{s=1}^{n} a_s r_{ks}$$

であり，さらに (r^{ik}) は相関係数マトリックスの逆行列である。(8)式は b_i と μ との未知数を含むから，これを求めると

$$\mu=\frac{R_0}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} r^{ik} r^{js} B_k B_s r_{ij}} \tag{9}$$

$$b_i=\frac{R_0\sum_{k=1}^{m} r^{ik} B_k}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} r^{ik} r_{ij} B_k B_s r_{ij}} \qquad (i=1, \cdots, m) \tag{10}$$

以上によってすべての未知数が求められた。ここで注意を要する点は，(3)式の b_i は直接に最小自乗法を適用しても求められる。しかしその場合には(1)，(2)両式の与える条件を満足することができない。このような問題では(1)，(2)両式の条件が特色なのであって，これを満足するような b_i の値が必要なわけである。

(B) 第2段階

この段階では第1段階の結果を利用してつぎのように分析を進める。第1段階の結果は

$$\left.\begin{array}{l} u'(1)=b_1 z_1+\cdots+b_m z_m \\ u'(2)=b_{n+1} z_{n+1}+\cdots+b_p z_p \end{array}\right\} \tag{11}$$

となる。そこで $u'(1)$ と $u'(2)$ の分散を1に押え，$u'(1)$ と $u'(2)$ との相関係数を極大にするように，canonical correlation method を利用する[6)]。すなわち

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} b_i b_j=1 \\ \sum_{i=n+1}^{p}\sum_{j=n+1}^{p} r_{ij} b_i b_j=1 \\ \mathrm{R}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{p} r_{ij} b_i b_j=\max \end{array}\right\} \tag{12}$$

この条件を求めることは

$$F'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{p} r_{ij} b_i b_j-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} b_i b_j -\frac{\mu}{2}\sum_{i=n+1}^{p}\sum_{j=n+1}^{p} r_{ij} b_i b_j$$

の極大を求めることにほかならない。ここに λ，μ はラグランジュの定数である。これを計算した結果はつぎの如くである。

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda\sum_{j=1}^{m} r_{1j} b_j+\sum_{j=n+1}^{p} r_{1j} b_j=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\lambda\sum_{j=1}^{m} r_{mj} b_j+\sum_{j=n+1}^{p} r_{mj} b_j=0 \\ \sum_{j=1}^{m} r_{n+1,j} b_j-\mu\sum_{j=n+1}^{p} r_{n+1,j} b_j=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{m} r_{pj} b_j-\mu\sum_{j=n+1}^{p} r_{pj} b_j=0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

(13)式の上段各式両辺に b_i をかけて加えると

$$-\lambda\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} b_i b_j+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{p} r_{ij} b_i b_j=0 \tag{14}$$

下段各式の両辺に b_i をかけて加えると

---

6) Gerhard Tintner, *Econometrics*, 1952, pp. 114—116. T. W. Anderson, *Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 1958, pp. 288—305. M. G. Kendall, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. II, 1946, pp. 348—359.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{p} r_{ij}b_ib_j-\mu\sum_{i=n+1}^{p}\sum_{j=n+1}^{p} r_{ij}b_ib_j=0 \tag{15}$$

(14)，(15)両式に(12)式の関係を適用すれば，ただちに

$$\mathrm{R}=\mu=\lambda \tag{16}$$

がえられる。

そこでいま

$$A_{11}\equiv\begin{bmatrix} r_{11}\cdots\cdots\cdots r_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{m1}\cdots\cdots r_{mm}\end{bmatrix},\quad A_{12}\equiv\begin{bmatrix} r_{1,n+1}\cdots\cdots r_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{m,n+1}\cdots r_{mp}\end{bmatrix}$$

$$A_{21}\equiv\begin{bmatrix} r_{1,n+1}\cdots\cdots r_{m,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{1p}\cdots\cdots\cdots r_{mp}\end{bmatrix},\quad A_{22}\equiv\begin{bmatrix} r_{n+1,n+1}\cdots r_{n+1,p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n+1,p}\cdots\cdots r_{pp}\end{bmatrix}$$

$$K_1\equiv\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m\end{bmatrix},\quad K_2\equiv\begin{bmatrix} b_{n+1} \\ \vdots \\ b_p\end{bmatrix}$$

とおけば，(13)式は

$$\left.\begin{aligned}\lambda A_{11}K_1=A_{12}K_2 \\ A_{21}K_1=\mu A_{22}K_2\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

となり，これからつぎの式がえられる。

$$\lambda^2 A_{11}K_1=A_{11}{}^{-1}A_{12}A_{22}{}^{-1}A_{22}K_1 \tag{18}$$

ここで

$$A_{11}{}^{-1}A_{12}A_{22}{}^{-1}A_{21}\equiv G$$

とおけば，Gのエレメントは

$$g_{st}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{p}\sum_{k=n+1}^{p} r^{si}r^{kj}r_{ik}r_{tj}\quad\begin{pmatrix}s=1,\cdots,m \\ t=1,\cdots,m\end{pmatrix} \tag{19}$$

となる。ここに r^{si}，r^{kj} はともに相関係数マトリックスの逆行列のエレメントである。(18)式から

$$(G-\lambda^2 I)K_1=0 \tag{20}$$

ただしIは単位マトリックスである。これから

$$|G-\lambda^2 I|=0 \tag{21}$$

この式を解いてλの最大根を求める。λの最大根はRを極大にすることは(16)式から明らかである。そのえた結果を(13)式もしくは(17)式に代入して，bのすべての値を求めることができる。

(C) 第3段階

最後の段階では，以上のようにして求めた$b_{n+1},\cdots,b_p$の推定値を使って，(11)の第2式により，第3時点のuの予測値を求める。つぎにはこの第3時点のuを使い，第2時点と第3時点とについて以上の方法を繰り返し，第4時点のuの予測値を求める。以上の方法を繰り返して，順次つぎつぎの時点の予測を行うのである。

3 むすび

以上の方法は最終的に canonical correlation method を使用する。その理由は，従来この方法が予測に有効な結果をもたらすことが知られているからである。ただしこれがどのような場合の予測にも適用されるような一般的方法であるというのではない。ウォーの適用例にも見られるように[7]，価格と数量の予測には効果があるものと考えられる。すなわち(11)式中の $u'(1)$ を価格について考えれば，$u'(2)$ を数量について考えるのであって，$u'(1)$ を知って，$u'(2)$ を予測したり，またはその逆に $u'(2)$ を知って $u'(1)$ を予測するのである。

またここに述べた方法は，ある時点1に立って，つぎの時点2の予測を行い，時点2に立って時点3の予測を行うというような逐次的方法であり，短期予測の如く，そのときどきの時点において新らしい説明変数が，まえの古い説明変数と交替していく場合の方法である。短期予測の場合の問題点は残差項もしくは攪乱項をいかにコントロールするかということであり，長期予測が残差項もしくは攪乱項をいかに取り除くかという考え方に対立する。このような短期予測は説明変数もしくは predictor がつねに入れ替り，したがってその係数の値もつねに変動するものであって，安定性を持たないのが一般の場合であろう。

本稿で述べたところですでに明らかとなったであろうが，このような短期予測の考え方は Markov chain の思想と相通ずるものがあり，Markov chain とこの方法との関係は本稿とは別に行うこととする。

---

7) F. V. Waugh, "Regression between Sets of Variates", *Econometrica*, Vol, 10, No. 3, 4, July-Oct., 1942, pp. 290—310.