動学的レオンチェフ体系における双対安定の非両立性について

福　岡　正　夫*

はしがき　さいきんの『エコノメトリカ』に載せられた論文の一部[1]において，ソローは，動学的レオンチェフ体系の産出量の安定が，それに双対的な価格の安定と背反する旨の興味ある主張を提唱した。これはすでに数年前，彼がハーバードのプロジェクトのために書いたペーパー[2]でも，その末尾に簡単に言及されたところであるが，とりわけ今回の提唱をめぐっては，内外に若干の議論が誘発されているようである。もとよりソローの命題は，係数について固定性を想定し，しかも産出量と価格とのあいだに連結関係を欠いた体系について得られたものにすぎないから，これをもって一般的な双対安定の二律背反と断ずるのは早計であるけれども，しかし一応理論の基礎的側面にかかわる finding としては筆者もまた少なからぬ興味を唆られた。以下に記すところは，そのような関心からむしろ筆者自身のこんごの研究のために記された覚書であり，まず自分なりに納得のいく定式化と思われたものを最初に記したのちに，併せてソローの推論に対するコメントをも記しておくことにした。とりわけ，よく注意されるべきポイントと目されたところは，入念に叙述するように努めたつもりである。なお本稿では，微分方程式体系で推論を運ぶが，それがソローの定差方程式系による議論にも，まったく mutatis mutandis に妥当するものであることは，あらためて断っておくまでもないであろう。

1　投入係数の行列を A, 資本係数の行列を B, 産出量の列ベクトルを x, 価格の列ベクトルを p, 最終需要の列ベクトルを y, 賃銀費用の列ベクトルを w, 利子率を r とする。すると動学的なレオンチェフ体系は，産出量および価格のそれぞれについて

(1)　$B\dot{x}=(I-A)x-y$

(2)　$B'\dot{p}=[rB'-(I-A')]p+w$,

または y, w を落して

(1)′　$B\dot{x}=(I-A)x$

(2)′　$B'\dot{p}=[rB'-(I-A')]p$

のように書きあらわされる。ここで(1)(2)はいわゆる「開いた体系」であり，これに対して(1)′(2)′は「閉じた体系」であるが，これらが経済的にどういう関係を意味しているかについては，今日もはやよく知られたところであるから，ここでは紙数の都合上立入らない。その点の理解にあたって何がしかの困難を感ぜられる読者は，さきに言及したソローの論文をよく参照されてから，本稿に目を通されることをあらかじめ希望しておきたい。

さて，$B^{-1}(I-A)$ の固有根 λ_i を対角要素とする対角行列を λ, $e^{\lambda_i t}$ を対角要素とする対角行列を $e^{\lambda t}$, λ_i に応ずる固有ベクトルを第 i 列にもつ行列を X とし，同様に $rI-(B')^{-1}(I-A')$ の固有根 μ_j を対角要素とする対角行列を μ, $e^{\mu_j t}$ を対角要素とする対角行列を $e^{\mu t}$, μ_j に応ずる固有ベクトルを第 j 列にもつ行列を P とすると[3]，(1)および(2)の解は形式的に

(3)　$x(t)=Xe^{\lambda t}X^{-1}(x(0)-\bar{x})+\bar{x}$

(4)　$p(t)=Pe^{\mu t}P^{-1}(p(0)-\bar{p})+\bar{p}$

のようにあらわされ，また(1)′(2)′の解はヨリ簡単に

(3)′　$x(t)=Xe^{\lambda t}X^{-1}x(0)$

(4)′　$p(t)=Pe^{\mu t}P^{-1}p(0)$

のようにあらわされる。ただし(3)(4)の $\bar{x}, \bar{p}$ が，それぞれ所与の y, w に応じて定まる定常解

(5)　$\bar{x}=(I-A)^{-1}y$

(6)　$\bar{p}=(I-A'-rB')^{-1}w$

であることはいうまでもない。

さてここで，産出量体系の固有根 λ と価格体系の固有根 μ とのあいだには，また前者の固有ベクトル X と後者の固有ベクトル P とのあいだには，どういう関係が成

＊　本稿の執筆にあたっては，私は東京経済研究センター・理論プロジェクトの研究会をつうじて，岡本哲治，村上泰亮，新飯田宏などの諸氏から，またそれとは別個に，東北大学の芳賀半次郎，慶応大学の神谷伝造の両氏から与えられた刺戟を忘れることができない。とりわけ村上，新飯田，芳賀の三氏からはいくつかの点で興味を唆る質問事項を提出され，それらに私自身の解答をしたためてみようと思ったことが，執筆の少なからぬ動機を説明しているのである。以上の方々のすべてに対して，ここで心から感謝の意をあらわしておきたいと思う。

1)　ソロー〔1〕, pp. 34—38.

2)　ソロー〔2〕, p. 21.

3)　仮定(イ) B は非特異であり，(ロ) λ_i や μ_j はすべて別根であるとする。

立しているのであろうか。まずその点を明らかにすることが当面の分析の第一歩である。

はじめに定義によって

(7)　$B^{-1}(I-A)X=X\lambda$

であるから，それを転置して $X'(I-A')(B')^{-1}=\lambda X'$ とした上，左右から適当な行列をかけることによって，

(8)　$(B')^{-1}(I-A')[X'(I-A')]^{-1}=[X'(I-A')]^{-1}\lambda$

であることが容易に導ける。したがって $(B')^{-1}(I-A')$ という行列は $B^{-1}(I-A)$ と同じ固有根をもち，かつその固有ベクトルの行列は $[X'(I-A')]^{-1}$ であることがまず判明するのである。

つぎに $(B')^{-1}(I-A')$ と $rI-(B')^{-1}(I-A')$ との関係については，前者の固有根が λ ならば後者の固有根が $r-\lambda$ であること，また両者が同じ固有ベクトルをもつこと，は明白である。

依って以上を綜合して，μ と P とは，λ, X と，つぎのような関係で結ばれねばならないことが明らかとなる。

(9)　$\mu=r-\lambda$

(10)　$P=[X'(I-A')]^{-1}$

そして(9)(10)から，(4)(4)′ がそれぞれ

(11)　$p(t)=[X'(I-A')]^{-1}e^{(r-\lambda)t}[X'(I-A')](p(0)-\bar{p})+\bar{p}$

(11)′　$p(t)=[X'(I-A')]^{-1}e^{(r-\lambda)t}[X'(I-A')]p(0)$

のように書きあらためられることが明らかとなる。

2　解 $x(t), p(t)$ の性質を分析するには，あらかじめそれらが含む固有根および固有ベクトルの性質をしらべておくことが必要である。

しかし産出量の側つまり λ, X の側については，これまたその推論は今日よく知られているから，立入って詳論する必要はあるまいと思われる。すなわち $B^{-1}(I-A)$ の逆行列 $(I-A)^{-1}B$ はホーキンス＝サイモンの条件からいうまでもなく非負であるから，それがまた分解不可能であると考えられるかぎり，フロベニュッスの定理の適用によって，λ の成分の中には必ずプラスの実根が存在し，それに対応する X の列はすべてプラスの成分からなっていて，しかもそのようなプラスのものとしてはそれが唯一つのものであることが主張される。以下の議論では，一般性を失うことなくそのような実根は λ_1 であり，したがってプラスの列は X の第1列であると考えて進むことにしよう。

吟味を要するのは，価格の側である。いま λ, X についていいえたのと同様な主張が，μ, P すなわち $r-\lambda, [X'(I-A')]^{-1}$ についてもいいうるかどうか。まずはじめに固有根の方については，産出量の側のプラスの実根 λ_1 に応じて $r-\lambda_1$ という実根のあることは確かである。しかし，そのプラス，マイナスの符号については，r の大きさとの比較に俟たねばならず，いまの段階ではまだどちらとも決められない。この点は次節で採りあげるから，一応そのときまでおあずけにしておいて，つぎは固有ベクトルの行列 $[X'(I-A')]^{-1}$ についてである。この行列については，X のようにプラスの成分の列が唯一つあると主張できるかどうか。この点をつぎにはっきりしておきたいが，第1節の後半の議論からして，そうした主張が成立つことは見易い道理である。なぜかというと，$[X'(I-A')]^{-1}$ は $rI-(B')^{-1}(I-A')$ の固有ベクトルの行列であると同じく $(B')^{-1}(I-A')$ の固有ベクトルの行列でもあり，その $(B')^{-1}(I-A')$ については産出量の場合に $B^{-1}(I-A)$ について適用したのとまったく同様な推論が適用できるからである。依ってわれわれは

$[X'(I-A')]^{-1}$ もまた唯一個のプラスの列をもつ

と主張することができる。しかも問題の実根が最小の単根であることを考慮すれば，$[X'(I-A')]^{-1}$ の第1列が問題の列であることもまったく明らかである。

3　つぎにもう1つの予備的考察として，定常解 $\bar{x}, \bar{p}$ の符号を確立しておこう。ここでも $\bar{x}$ の側については，$(I-A)$ の性質としてホーキンス＝サイモンの条件が満たされているかぎり，$(I-A)^{-1}\geqq 0$（A が分解不可能なら >0）で，(5)から $y\geqq 0$ に対しては $\bar{x}\geqq 0$（A が分解不可能なら >0）が成立つことが明らかである。

ところが他方 $\bar{p}$ の側については，外から与えられる r の大きさに対して上からの制約が課せられねばならない[4]。なぜなら，r があまりに大きければ，$(I-A'-rB')$ についてはホーキンス＝サイモンの条件が満たされず，したがって(6)から $w\geqq 0$ に対しても必ずしも $\bar{p}\geqq 0$（または >0）となるとは限らないからである。そのような r の上界は，

(12)　$r<\lambda_1$

で与えられることが知られている。というのは，$r<\lambda_1$ は $[\frac{1}{r}I-(I-A')^{-1}B']^{-1}\geqq 0$（$(I-A')^{-1}B'$ が分解不可能なら >0）が成立つための必要かつ充分条件であり[5]，したがってまたそれは $[(I-A')-rB']^{-1}\geqq 0$（$(I-A')^{-1}B'$ および A' が分解不可能なら >0）が成立つための必充条件でもあるからである。

この推論から，「開いた体系」を考察するにあたっては，(20)を満たすように r の値が与えられねばならないことが分ったのである。すなわち，前節の後半でふれた $r-\lambda_1$ という根はマイナスでなくてはならないのであ

4)　ソロー〔1〕, p. 33, p. 37。

5)　ドブリュー＝ハーシュタイン〔3〕, pp. 601—602, 定理Ⅲ＊およびⅢ参照。

る[6]。

4　以上を予備考察として，いよいよ安定性の検討にとりかかることにしよう。この問題を考えるには，一応後の議論のために2つの観点を区別しておくことが便利である。その1つは，いわば**絶対的安定**の観点ともいうべきものであって，所与の最終需要や賃銀費用に応ずる産出量または価格の定常的均衡水準を中心とし，解の運動がそのような定常水準へ近づいていくかどうかをみるものである。閉じた体系では，これはゼロ水準への接近を意味するから，結局この見方が意味をもつのは，開いた体系においてであろう。

これに対して，もう1つは，**相対的安定**の観点ともいうべきものである。さきに第2節でみたように，Xおよび$[X'(I-A')]^{-1}$はそれぞれプラスの成分のみからなる固有ベクトルの列を1つづつ含んでおり，それらに対してはそれぞれ実数の固有根が応じている。したがって，解の中のその部分は，問題の実根がプラスであるかマイナスであるかに応じて，問題のベクトルの成分比を不変に維持したまま指数的に拡大するか縮小するかであるが，そのようなパターンを一種の均衡径路とみなして，解全体がそのような径路に近づいていくかどうかを吟味する見方を設定してみることができるのである。この第2の見方は，むしろ閉じた体系の方においてヨリはっきりした意味をもつのではないかと思われる。

開いた体系でこの見方を採ろうとするならば[7]，モデルの経済的解釈と初期条件の選び方とに何らかの特別な考慮が必要となるであろう。というのは，かりに産出量のモデルにおいて，最終需要を文字どおり純生産(あるいは消費)と解するならば，成長は社会全体の付加価値率(あるいは消費性向)の逓減を意味せざるをえないし，またともかく各産出量がこの内生成長のパターンに沿って拡大していくには，定常均衡水準を下回る初期条件の選択は許されないからである。一般に開いた体系で成長を考察するにあたっては，上述のようなアプローチのほかにも，オートノマス・ターム自体に趨勢をもたせる方針を選ぶことができ，それらの得失についてはなお問題がのこるところと思われる。

この点はいずれにしても，以下においてはまず開いた体系の方について絶対的安定の観点を採り，ついで閉じた体系の方には相対的安定の観点を採ってみて，そのそれぞれの場合に何事が推論できるかを検討することから始めてみたいと思う。

5　はじめに開いた体系における絶対的安定を考えてみるが，産出量が絶対的に安定であるための，つまり$x(t)$が$\bar{x}$に収斂するための必要かつ充分条件は，(3)から明らかなように，λ_iの実部がすべてマイナスということ，すなわち

(13)　$R(\lambda_i)<0$　for all i

ということである。また価格が絶対的に安定であるための，つまり$p(t)$が$\bar{p}$に収斂するための必充条件は，(11)から明らかなように$r-\lambda_j$の実部がすべてマイナスということ，すなわち

(14)　$r-R(\lambda_j)<0$　for all j

ということである。ところでrはプラスの定数なのであるから，(14)は当然

(15)　$R(\lambda_j)>0$　for all j

を意味するのでなくてはならない。したがって(13)と(15)は明らかに両立せず，われわれはつぎの二律背反命題を確立しえたかのようである。

産出量が絶対的に安定であるならば，価格は絶対的に不安定たらざるをえず，また価格が絶対的に安定であるならば，産出量は絶対的に不安定たらざるをえない。

ところがここで注意すべきは，さきにみたように，λ_1はプラスという一事である。つまり，当面のモデルでは(13)が満たされることは決してなく，産出量の定常水準は必然的に不安定たらざるをえないのである。依って上述の命題は，論理的には誤謬でないにしても，内容的にはまったく空虚であり，そのような命題を導きだすことには何らの意味も伴わないといわざるをえない。

6　そこで進路を転じて，つぎには閉じた体系での相対的安定を考えてみることにする。産出量が相対的に安定であるための必充条件は，明らかに

(16)　$R(\lambda_i)<\lambda_1$　for all $i\neq 1$

であり，価格が相対的に安定であるための必充条件は，明らかに

(17)　$r-R(\lambda_j)<r-\lambda_1$　for all $j\neq 1$

である。(17)から

(18)　$R(\lambda_i)>\lambda_1$　for all $j\neq 1$

であることはいうまでもないから，前節の推論とアナロガスに，つぎの命題が導かれることになる。

産出量が相対的に安定であるならば，価格は相対的に不安定たらざるをえず，また価格が相対的に安定であるならば，産出量は相対的に不安定たらざるをえない。

すなわち，ここで産出量の均衡構成比の径路と価格のそれとは，安定であるか不安定であるかは決められない

6)　他方「閉じた体系」でのrの大きさについては，第6節の終りで言及する。

7)　後にも述べるように，産出量体系については，ソロー〔1〕はこの観点をとっている。また森嶋〔4〕もそうである。

が，ともかくその双方の安定が両立しないことだけははっきりしたのである。

産出量については，$\lambda_1>0$ であるから，その均衡径路は必ず拡大型である。これに対して価格については，$r>\lambda_1$ か $r<\lambda_1$ かのいずれかによって，その均衡径路は上昇型にもなれば下降型にもなり，たまたま $r=\lambda_1$ であれば定常型にもなる[8]。このように実物的な財の増殖率が利子率との大小関係をつうじて価格の上昇下降を律しているのは，ヴィクセルの周知の議論を想起せしめて興味深いが，ここではヴィクセルのと結論の向きが逆になっていることに注目すべきである。

7 さてこれらの推論にもとづいて，ひるがえってソローの業績を眺めてみよう。それについては，つぎのような2つのコメントを述べておくことにしたい。

(1)彼は産出量，価格ともに開いた体系を分析対象にしているが，それらのうち産出体系の側については，均衡成長径路(ただし彼の場合は定常水準からの乖離部分についての)をめぐる相対的安定の観点を採用し，そのような産出量の相対的安定を価格の絶対的安定と対比するという一見**非対称的な**手続を選んでいる。ここで彼が価格については絶対的安定を考えている理由は，つぎのようなものであると推察される。すなわち，価格の相対的安定の条件は，前節にも記したように

(17) $\quad r-R(\lambda_j)<r-\lambda_1 \qquad \text{for all } j\neq 1$

であるが，ここで**開いた体系では $r<\lambda_1$ たらざるをえないから**，結局(17)は

(14) $\quad r-R(\lambda_j)<0 \qquad \text{for all } j$

に還元され，絶対的安定の条件が満たされざるをえないのである。

(2)そこで一応彼にしたがって，そうした手続で進むとすると，どのような双対安定定理が導けるのであろうか。

(イ)まず産出量の体系が相対的に安定であるならば，前節でみたように，

(16) $\quad R(\lambda_i)<\lambda_1 \qquad \text{for all } i\neq 1$

であるから，

(19) $\quad r-R(\lambda_i)>r-\lambda_1$

が成立するが，ここで，**もし r が λ_1 に充分近ければ，**

(20) $\quad r-R(\lambda_i)>0$

となる公算が大きく，(14)と矛盾するという。すなわち《産出量が相対的に安定であるならば，r が λ_1 に充分近いという条件の下で，価格は絶対的に不安定となる蓋然性が大きい。》これがソローの導いている主張の1つである[9]。

(ロ)ところでつぎには，「一方の体系の**安定→**他方の体系の**不安定**」という方向においてではなく，逆に「一方の体系の**不安定→**他方の体系の**安定**」という方向において，何事かがいえるであろうか。この方向の演繹は一般には確定的な主張を生むのが困難と思われるが，ここでもソローは「確然と不安定」("definitely unstable")という前例に乏しい概念を定義して，1つの主張を導こうとしている。いま

$$R(\lambda_i)<\lambda_1 \qquad \text{for all } i\neq 1$$

が安定条件であるとすると，ふつうに不安定というのは

$$R(\lambda_i)>\lambda_1 \qquad \text{for } \textit{at least one } i\neq 1$$

ということであるが，これに対してソローは

$$R(\lambda_1)>\lambda_1 \qquad \text{for all } i\neq 1$$

という事態を「確然と不安定」と称するのである。そこで，この定義にしたがって，産出量の体系が相対的に確然と不安定であったとしよう。するとその条件から

(17) $\quad r-R(\lambda_i)<r-\lambda_1 \qquad \text{for all } i\neq 1$

が導き出され，しかもここで開いた体系においては r は(12)を満たすように与えられているのであるから

(21) $\quad r-R(\lambda_i)<0 \qquad \text{for all } i\neq 1$

ということになる。故に(12)と(21)から(14)が導かれる。すなわち《産出量が相対的に「確然と不安定」であるならば，価格は絶対的に安定である》と主張できるというわけである[10]。

これら(イ)，(ロ)の命題が，双対安定の問題についてソローが主張しているすべてであるが，それらについては少くとも筆者は，同義語反復という感想を払拭しさることができない。というのは，(イ)における「r が λ_1 に充分近いならば」という条件も，(ロ)における「確然と不安定ならば」という条件も，いずれながら何らかの主張を導き出さんがための deus ex machina としての性格が強く，それら自体，要請されるべき何らの実質的理由にも乏しいからである。

依って以上を概括して，一応満足すべき双対安定の定理としては，第6節に導いたもののみが残存するのではないかと思われる。

8 もう1つだけ注意すべきだと思われる論点を補足して，分析を終えることにしよう。それはつぎのような点である。いま閉じた体系について考えると，その解はさ

8) ただしこの場合の価格の定常均衡と開いた体系での価格の定常均衡とは一応別のものである。ここでの定常均衡の場合には $r=\lambda_1$ とならざるをえないのだが，後者の場合は $r<\lambda_1$ の範囲に r が外から与えられるのである。

9) ソロー〔1〕, p. 38。

10) ソロー〔1〕, p. 38。

きに(3)′および(4)′あるいは(11)′として記されたごとくであるが，これはもともと

(22)　$x(t)=Xe^{\lambda t}C$

(23)　$p(t)=Pe^{\mu t}K$

$$=[X'(I-A')]^{-1}e^{(r-\lambda)t}K$$

において，ベクトルC, Kが初期条件$x(0), p(0)$から

(24)　$C=X^{-1}x(0)$

(25)　$K=X'(I-A')p(0)$

をつうじて決められるという仕組みである。念のため(22)，(23)をさらに丁寧に書けば，

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}e^{\lambda_1 t}+c_2\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}e^{\lambda_2 t}+\cdots\cdots+c_n\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}e^{\lambda_n t}$$

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}e^{\mu_1 t}+k_2\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix}e^{\mu_2 t}+\cdots\cdots+k_n\begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}e^{\mu_n t}$$

のようである。さてここで，すでにフロベニッスの定理からλ_1, μ_1は実根で，それらに応ずる$\{x_{11}, x_{21},\cdots\cdots, x_{n1}\}$，$\{p_{11}, p_{21},\cdots\cdots, p_{n1}\}$はプラスのベクトルであることが確立している。つまり言いかえれば，$X, [X'(I-A')]^{-1}$はそれぞれ第1列にプラスの成分ばかりをもっていることが分っているのである。しかし，それならさらに進んで，c_1やk_1もまた，任意の初期条件$x(0)\geq 0, p(0)\geq 0$に対して，必ずプラスになるということは保証されているであろうか。この点が明らかにされていないうちは，議論はまだ画竜点睛を欠く憾みを残すというべきである。

そこでこの問題をつぎのようにして解決しておこう。まず(24)，(25)から明らかなように，$x(0)\geq 0, p(0)\geq 0$に対して$c_1>0, k_1>0$となるためには，$X^{-1}, X'(I-A')$がそれぞれ第1行にプラスの成分をもっていればいいわけである。あるいは同じことだが，$(X')^{-1}, (I-A)X$が第1列にプラスの成分をもっていればいいわけである。

$(X')^{-1}$の第1列がプラスであることは，つぎのようにして証明される。第1節の(8)から

(26)　$(B')^{-1}(X')^{-1}=(I-A')^{-1}(X)^{-1}\lambda$

であることが容易に分るから，その両辺に左から$(I-A')$をかけることによって

(27)　$(I-A')(B')^{-1}(X')^{-1}=(X')^{-1}\lambda$

故に$(I-A')(B')^{-1}$は$B^{-1}(I-A)$と同じ$\lambda_1, \lambda_2,\cdots\cdots, \lambda_n$を固有根とし，$(X')^{-1}$はその固有ベクトルである。そして$(I-A')(B')^{-1}$の逆$B'(I-A')^{-1}$はフロベニッスの非負行列であるから，前にしたのと同様な推論で，λ_1に応ずる$(X')^{-1}$の列は必ずプラスであることが明らかである。

つぎに$(I-A)X$の第1列がプラスであることも，同様にして第1節の(7)の両辺に左から$(I-A)$をかけ

(28)　$(I-A)B^{-1}(I-A)X=(I-A)X\lambda$

を得ることから直ちに証明される。

このようにして**どんな初期条件**$x(0)\geq 0, p(0)\geq 0$**に対しても，**c_1, k_1**は必ずプラスになる**ことが確認できたのである。

9　以上の推論をつうじて，少くとも閉じた体系においては，産出量の相対的安定と価格の相対的安定とが，互いに背反することが明らかになったと信ずる。

ただこの種の結論は，つぎのような諸点に対しては，あくまで限定つきのものであることに留意しなくてはならないであろう。(1)まずここで考察された体系はレオンチェフに忠実な体系であるから，産出量の側と価格の側とをそれぞれ別個に取扱っており，それらのあいだの連結関係は考慮していない。もしそうした分離性が取除かれ，両体系がヨリ緊密に結ばれるにいたるならば，安定背反の結論もおそらくは大幅に変更されねばならないであろうと予想されるのである。(2)また基本式が等式で規定されているという意味においては，ここでの体系の解の運動は，狭義の均衡状態を逸脱している場合でもあくまで均衡運動としての性格をもっており，不均衡(基本式の両辺の乖離)に対する各変数の反応を含むものではない。この点を一層一般化し，体系を「不均衡化」する途としては，サムエルソン＝ソローなどのプログラミング・アプローチにしたがう以外にも，例えば，グッドウィンやアロー＝フルウィッツなどの手法にならって，超過需要や超過利潤に対する価格，産出量の反応式を構成するアプローチが開かれており，そうした上で安定性を追及していく研究が強く望まれるのである。

参考文献

〔1〕 Solow, R. M., "Competitive Valuation in a Dynamic Input-Output System", *Econometrica*, January 1959, pp. 30—53.

〔2〕 Solow, R. M., "Interest and Prices in Dynamical Input-Output Models", *Harvard Economic Research Project Paper* (Unpublishd). pp. 1—22.

〔3〕 Debreu, G. and Herstein, I. N., "Nonnegative Square Matrices", *Econometrica*, October 1953, pp. 597—607.

〔4〕 Morishima, M, "Prices, Interest and Profits in a Dynamic Leontief System", *Econometrica*, July 1958, pp. 358—380.