基数的効用の諸概念

藤　井　栄　一

「無差別曲線の分析が成立しうる諸条件のもとでは，それからさらに numerical utility に達するためには very little extra effort しか必要とされない」[1] として，財（の prospects）を確率で結びつけて，数値的な効用函数が確定できるとノイマン・モルゲンシュテルンは考えた。ところが，効用函数が（unique up to linear transformation に）確定できる，ということは，効用の差の比較ができるということを意味することになり，事実ノイマン・モルゲンシュテルンの効用理論では，$[U(A)-U(B)]/[U(C)-U(D)]$ は invariant である。ここから，彼等の理論は数学的な論理を，巧妙に使って古典的な基数的効用の復活を目指すものにすぎない，という解釈が一時擡頭したように見える。そして，また，彼等自身も，そういう解釈の仕方が妥当であるというように考える余地を充分に残したような議論の進め方をしている。

しかしながら，エルスバーグ[2] によって最初に注意深い検討が行われ，また，ボーモル[3] が，しばらく前に，自分自身の解釈を修正し伝統的な基数的効用との差が注目されるに至った。

そこで，伝統的な基数的効用について再吟味して，ノイマン・モルゲンシュテルンの理論と比較し吟味することを，この小論で試みたい。

I

ルーズな意味での効用 utility の概念が分析の tool としてあらわれたのは，ベンタムからであるということができよう[4]。スミスは「交換価値」と「使用価値」とを区別し，両者の大きさを対比しているが，それらは，測定のディメンションが全く異るものであるから，何らかの変換のプロセスを設定しなければ，両者を比較することは全く無意味であり[5]，しかも，実はそのプロセスの追求が，それ以後の「価格理論」を構成することになっていると考えることができる。ところが，スミスもリカルドをへて「労働価値論」へと進展し，結局のところ，「限界革命」*marginal revolution* 以前における「主観価値論」は，価格現象——あるいは，その一方の因子である需要の分析——の基礎理論としての価値論の役割を全く果たしておらず，需要については，純粋に直観的または経験的な法則が別個に考えられていた。

ゴッセンをへて，ジェボンズ・メンガー・ワルラスに至ると，「使用価値」に代る概念としての効用は，とにかく，需要理論と密着し，その本来の役割をはたすようになってきた。しかし，消費者行動理論を，選択理論から出発させるパレートに至るまで，あるいは，それを完全に consistent に展開するスルツキーに至るまでは，効用は心理的な大きさとして，とらえられている。そしてしかも，この大きさは，論理的に「自然な」条件としては，もともと，大小関係の比較——効用の差の大小関係の比較でなく，効用それ自体の比較——だけが要請されるはずであったが，実際上は，たとえば所得1円の時の満足の程度（効用）$U(1)$ と2円の時の $U(2)$ と 1000 円の時の $U(1000)$ とでは，おそらく，$U(2)-U(1)<U(1000)-U(2)$ と考えることが「自然」であろうから，多くの場合に，効用の差の比較の可能性を通じて，効用それ自体の大小関係の比較可能性よりもさらに制限的な条件が加えられる結果になっている。

II

効用理論から選択理論への転向の基礎をあたえたパレート理論の論理的な吟味は，安井教授によって行われている[6]。そこでも示されているように，パレートは，結

1) John von Neumann and Oscar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1947, p.17.

2) D. Ellsberg, "Classic and Current Notions of《Measurable Utility》", *Economic Journal*, vol. LXIV, no. 255, Sept. 1954, pp. 557—609.

3) W. J. Baumol, "The Cardinal Utility which is Ordinal," *Economic Journal*, vol. LXVIII, no. 272, Dec. 1958, pp. 665—672.

4) この点の指摘は，J. Viner, "Bentham and J. S. Mill", *American Economic Review*, vol. XXXIX, 1949, pp. 360—82, および G. J. Stigler, "The Development of Utility Theory I", *Journal of Political Economy*, vol. LVIII, 1950, p. 309 *ff*.

5) Stigler, *op. cit.*, p. 308. したがってまた，両者の関係を，すぐに「全部効用」と「限界効用」の関係として考える仕方には同意できない。(cf. 久武・巽『価格理論』pp. 41—42)

6) 安井琢磨「経済理論の基本問題」『経済学講座』第1巻〔第1部門〕pp. 1—30。

果的には余分な第2公準を置くことによって，不必要に制限的な選択指標函数(ひいては「効用」函数)を仮定してしまっている。

しかし，第1公準それ自体にも問題がないわけではない。というのは，第1公準。消費者選択が，commodity bundles の空間に完全順序を与える。とした場合に，この順序を示すような数字的指標が数学的に構成できる，と考える経済学における通常の見方に対しては反例が提示できる7)。そして，厳密には，(有限ユークリッド空間に対しては)次のような命題が成立する(G. Debreu8))。

X を有限ユークリッド空間の完全に順序付けられた部分集合とするとき，任意の $x' \epsilon X$ に対して，集合 $\{x \epsilon X | x \leqq x'\}$，$\{x \epsilon X | x' \leqq x\}$ が閉じている時には，X について選択指標函数が成立する。

換言すれば，消費者が直面する任意の 2 つの commodity bundles A と B について，その消費者が，A の方を選択するか，B の方を選択するか，あるいは両者が無差別であるかを指摘し，さらに，その選択が移行的($x^1 \geqq x^2$，$x^2 \geqq x^3$ なら $x^1 \geqq x^3$)である，という意味での合理性のうえに，さらに，任意の commodity bundle x^0 をとってきた時に，x^0 に収束する任意の数列 (x^k) の x^k が全て $x^k \geqq x'$ であれば $x^0 \geqq x'$，という条件が加わって，通常の消費者行動理論の分析に用いることができるような，選択指標函数が成立することになる。

しかし，もちろん，このようにして定まる選択指標函数は unique ではない。単に，order-preserving であるにすぎないのであるから，unique up to a monotone transformation にしか確定しない。伝統的な術語に即して云えば，この場合には「効用」は indeterminant であり，さらに，測定のモデルから見れば，単なる nominal9) よりは強いが，interval10) (cardinal) scale よりは遙に弱く，一般に ordinal scale11) とよばれる測定モデルの条件を満足するからこのような「選択指標」函数を「順序的効用」函数とよぶことにする。

他方，第2公準。x^1 から x^2 への移行と x^3 から x^4 への移行についても完全順序が成立する。とすると，x^1 から x^2 への移行 $x^1 \rightarrow x^2$ の選択指標 $V(x^1 \rightarrow x^2)$，x^3 から x^4 への移行の選択指標 $V(x^3 \rightarrow x^4)$ をそれぞれ，各各の「順序的効用」函数の差 $U(x^2)-U(x^1)$，$U(x^4)-U(x^3)$ で示すと，結局のところ，U は単に unique up to a monotone transformation だけではなくて，さらにずっときつい条件，すなわち unique up to a linear transformation でなければならなくなる。すると，U，W をそれぞれ選択指標函数とすると，

$$W=\alpha U+\beta,\ a>0 \qquad (1)$$

の関係で結ばれるから，

$$\frac{W(A)-W(B)}{W(C)-W(D)}=\frac{U(A)-U(B)}{U(C)-U(D)} \qquad (2)$$

が成立し，いかなる選択指標函数をもってきても，差の比率は invariant であり，効用の差に関しての乗除が可能になる。この場合の選択指標を可測的な「効用」とよび，さらに，選択指標函数を「基数的効用」函数とよぶ。

こうして，パレートは結果的には，「基数的効用」函数を仮定してしまっていることになる。

III

選択理論に至るまでは出発点から pleasure intensity の度合としてとらえられてきた効用が，パレートによって，一応 pleasure intensity とか degree of satisfaction から離れた点から出発させられてはいるが，結果的には，「効用」の差の比較が可能であると仮定することによって(1)の関係で結ばれるような型の効用(選択)指標函数の族だけが，とり出されることになる。

さらに，効用理論は，一般に，不確実性を含まないのが通常であったが，常にそうであったわけではなく，ジェボンズ，マーシャルでは，不確実性についても考えられていた12)。すなわち，そこでは，確率 p と効用 U との積 $p \cdot U$ が不確実な situation の下での効用と考えられていた。したがって，A と B とが，それぞれ p および $1-p$ で期待される prospect の効用は

$$pU(A)+(1-p)U(B)$$

とされている。(ここからまた，数学的に fair な賭は経済学的に unfair であるという結論が導かれるし，また，mathematical expectation に対して，moral expectation が考えられることになる13)。)

一方，ノイマン・モルゲンシュテルンは，不確実性を

7) G. Debreu, "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function", *Decision Process* (ed. by R. M. Thrall et al.), p. 164.

8) Debreu. *op. cit.*, pp. 159—165.

9) C. H. Coombs, H. Raiffa and R. M. Thrall, "Some Views on Mathematical Models and Measurement Theory". *Decision Process*, pp. 19—37, esp. p. 28.

10) *ibid.*, p. 27.

11) *ibid.*, pp. 26—27.

12) cf. Ellsberg, *op. cit.*, pp. 535—36.

13) これらと Bernoulli hypothesis および St. Petersburg の paradox との関係は cf. Stigler, *op. cit.*, pp. 373—77.

最初から導入して，効用理論を構成し，そこで導かれる効用が基数的であることを証明した。

したがって，U', W', … をノイマン・モルゲンシュテルンの効用函数(以下 M-N 効用函数とかく)とすると，U', W', …の間には

$$W'=\alpha' U'+\beta' \qquad \alpha'>0 \tag{3}$$

の関係が成立することになる。

以上から，われわれは，結局，大別すれば基数的効用として

1) 限界革命よりマーシャルに至るまでのもの (U'', W'', …)

2) 選択理論から出発するもの(ただし，効用の差の比較可能性を前提とする(U, V, …)

3) M-N 効用函数(U', W', …)

の3つをあげることができると考えられる。

そして，これらはいずれも，より一般的な効用理論としての順序的効用函数のなかから特定のものだけを抜き出すものである。すなわち，各財の数量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ から構成される commodity bundle $x^i=(\xi_1{}^i, \xi_2{}^i, \cdots, \xi_n{}^i)$ の集合を $X=\{x^1, x^2, \cdots\}$ とし，また，種々の(不確実な) prospects[14] $r_j=\langle p_j{}^1, p_j{}^2, \cdots ; x_j{}^1, x_j{}^2, \cdots\rangle$, (ただし $p_j{}^i\geqq 0$, $\sum_i p_j{}^i=1$), の集合を $R=\{r_1, r_2, \cdots\}$ とする($X\subset R$) と，一般的な順序的効用函数は，R を定義域(sure prospects だけが問題の対象であれば X を定義域)とする一値の実函数 $\boldsymbol{F}$ の集合 $\boldsymbol{F}$ であって，$\boldsymbol{F}$ には

$$G=f(F), \qquad \frac{dG}{dF}>0$$

の関係にある全ての G が含まれている。(ただし，もちろん F は選択順序に対応するものでなければならない。) すなわち，ある F が効用函数として役立つならば，それの monotone transformation はすべて効用函数になる。

ところが，基数的効用は，F の linear transformation しか効用函数になりえないとする。したがって，上記の 1), 2), 3) のそれぞれの効用理論は，それぞれ，$\boldsymbol{F}$ の部分集合 $\boldsymbol{U}''$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}'$ の要素しか効用函数として役立たないと規定することになる。

さらに，$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{U}''$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}'$ の間では，あきらかに，$\boldsymbol{U}''\subset\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{U}\subset\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{U}'\subset\boldsymbol{F}$ ではあるけれども，基数的効用函数は，unique up to a linear transformation なのであるから，測定の原点と1単位をきめると一意的にきまる。これは，その代りに，任意の2つの x^1, x^2 ($x^1 \neq x^2$) の効用の数値をきめても同様である。したがって，1), 2), 3) のどれもが，それらの名前が示すように，すべて同一の対象「効用」を測定しようとするものであるならば，

$$U(x^1)=U'(x^1)=U''(x^1)=a \tag{4}$$

$$U(x^2)=U'(x^2)=U''(x^2)=b \tag{5}$$

とおけば

$$U=U'=U'' \tag{6}$$

にならねばならないはずである。さらに，$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}'$, $\boldsymbol{U}''$ はそれぞれ，U, U', U'' のそれぞれの全ての linear transformation の集合であるから，

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{U}'' \tag{7}$$

になり，ここから，パレート的な基数的効用函数も，M-N 基数的効用函数も，限界革命からマーシャルに至るまでの新古典派の効用函数となんら変らないということになる。

そして，ノイマン・モルゲンシュテルンの効用理論に対して批判的であった議論[15]のほとんどは，まさに，そのような解釈の上に立って行われていた。

IV

しかしながら，たとえ，どれもが「効用」函数とよばれていようとも，内容的に同一の対象を測定しようとしているということはなんら保証されていない。そして，もしそうであるならば，(4)，(5) が成立するように数値を定めたとしても，(6) したがってまた，(7) が成立することはなんら保証されないことになる。あるいは，たとえ同一のものを「効用」として定義していても，それが，具体的には，操作的に違った型で定義されていると，操作的な結果が異ってくることは全く当然である。

この点で，1) の新古典派では，あきらかに，pleasure intensity[16] を効用と考えていた。(ただし，ワルラスでは，経済分析にとって本質的なのは，この効用それ自体，あるいは，限界効用それ自体でなくて，限界効用の比率——限界代替率——であるということが指摘されてはいるが。) そして，その pleasure intensity は，原則的には，個々の消費者が表明する，と考えられていたように見える。また，そこでは，限界効用についての加減乗除が通常の実数体に対するものと同じように規定されるということが，消費者の効用の合理性を支える1つの条件と考えられていたようである。

これに対して 2) では，$V(x^1\to x^3)$ と $V(x^3\to x^2)$ の比較

14) r^j は commodity bundles $x^1, x^2, \cdots$ がそれぞれ確率 $p^1, p^2, \cdots$ でえられる prospect をあらわす。

15) それらについては，cf. 福岡正夫「消費者均衡理論の基礎をめぐって」『季刊理論経済学』第II巻 (1951) pp. 214—15.

16) cf. Stigler, *op. cit.*

が可能とされていた。そして，もしも，一般に解釈されていたように，

$$V(x^1 \rightarrow x^3) = U(x^3) - U(x^1) \qquad (8)$$

$$V(x^3 \rightarrow x^2) = U(x^2) - U(x^3) \qquad (9)$$

とおくことができる，と考えると，「基数的**選択**指標函数」が定まることになる。しかしながら，選択が何を基準に行われるかを考えてみると，おそらくは，「効用」が背後にあるのであろう。ただ，ここでは，この「効用」の測定の仕方が 1) と比較すると，ずっと詳細に規定されている。すなわち，1)のなかで，とくにその測定の方法に関する議論をとり上げるとしても，わずかに Weber-Fechner 法則を一時，基礎にしたことがあっただけで[17]，pleasure intensity, degree of satisfaction あるいは，marginal joy をどのようにして，測定すべきかの規定がみられない。これに対して，2) では，まず，$U(x^1)=a$ と $U(x^2)=b$ とをあたえておいて，そこから，つぎに，

$$U(x^3) - U(x^1) = U(x^2) - U(x^3)$$

になるような x^3 を消費者に指摘させて，

$$U(x^3) = [a+b]/2 \qquad (10)$$

とし，さらに，$U(x^1)$ と $U(x^3)$ を補間（および同様な方法で補外）する，というプロセスによって，$U(x)$ が求められる，ということを規定していると考えられる。このかぎりでは心理的な大きさそれ自体は，入ってこない。

すなわち，$U(x^1)=a$，および，$U(x^2)=b$ は，なんら，心理的な大きさそのものを表示する，と考えなければならない必要はない。というのは，任意の1財，たとえば，貨幣 ξ_n をとってきて，

$$U(x^1) = U(0, \cdots, 0, \xi^1{}_n)$$

$$U(x^2) = U(0, \cdots, 0, \xi^2{}_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

になるように $\xi_n{}^1$, $\xi_n{}^2$, …, を定めると，$U(x)$ は，その任意の1財 ξ_n（たとえば貨幣）の特定の量と同一の「効用」がえられるということを示すだけであって，それが，どのくらいの「心理的な大きさ」それ自体であるか，ということは直接には問題にならない。心理的に，単に種々の commodity bundles と特定の財の数量との**等価関係だけ**が問題にされており，このかぎりでは，$U(0, \cdots, 0, \xi_n)$ が ξ_n のどんな函数であるかは分析の範囲外におかれている。そして，実は，この ξ_n と $U(0, \cdots, 0, \xi_n)$ との関係の分析こそ，1) の効用理論の問題であった。

ところが，さらに，3)のノイマン・モルゲンシュテルンの効用理論では，2) と同じような「選択指標函数」が，また，別の操作的な定義であたえられている。すなわち，(8)，(9)，(10)のかわりにさらに behavioristic に，はじめから確率 p を導入して，prospect $p = \langle p^1, 1-d^1, 0, \cdots;\ x^1, x^2, \cdots \rangle$ の「効用」を，

$$U'(\gamma) = p^1 U'(x^1) + (1-p^1) U(x^2) \qquad (11)$$

と定義し，この r と選択上無差別になる commodity bundle x^3 の「効用」を(11)で規定する。したがって，

$$1 \cdot U'(x^3) = p \cdot U'(x^1) + (1-p) U'(x^2) \qquad (12)$$

になる p を指摘させて，$U'(x^3)$ をあたえる。そこで，$p=0.5$ とすれば，

$$p \cdot [U'(x^1) - U'(x^3)] = (1-p) \cdot [U'(x^3) - U'(x^2)] \qquad (13)$$

から，

$$U'(x^1) - U'(x^3) = U'(x^3) - U'(x^2) \qquad (14)$$

によって，

$$U'(x^3) = \frac{1}{2}[U'(x^1) + U'(x^2)] = \frac{a+b}{2}$$

になり，これは，(10)の結果とかわらず，したがって，$p=0.5$ に固定しておけば，一見したところ 2) の場合と同じ結果がえられるように考えられるかもしれない。しかし，そうすることは，また，別な，もう1つの操作的な定義をあたえることであり，しかも，ノイマン・モルゲンシュテルンでは，$U'(x^3)$ と $U'(x^1)$ あるいは $U'(x^2)$ の間を，つぎに補間（補外）することは考えられていない[18]。測定の基準になる x^1 と x^2 とは固定しておいて，p だけが動かされるだけである。したがって，そこから導かれる U' と上述の U' とは x^3 で同一の値をとることを保証する先験的な理由は存在しない[19]。

以上から，1)，2)，3) における「効用」はそれぞれ互に相異るものであり，単に互に，monotone transformation の関係で結ばれているにすぎない。

17) Stigler, *op. cit.*, pp. 374—77.

18) von Neumann and Morgenstern, *op. cit.*, pp. 26—27 および Baumol, *op. cit.*, p. 670.

19) なお，

$$p[qU'(x^1) + (1-q)U'(x^2)] + (1-p)U'(x^2)$$
$$= pqU'(x^1) + (1-pq)U'(x^2)$$

の公準によって，gambling それ自体の効用は排除されているから，$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{U'}$ との差異は，確率の導入によって生ずる gambling の効用によるものではない。また，

$$dU'(r)/dp = U'(x^1) - (x^2)$$

であるから，prospect r の限界効用が一定であると考えられるかもしれないが，$U'(x^1)$, $U'(x^2)$ は，すでに 2) について議論したときと同じく，新古典派の意味での「効用」である必要はなく，単に，任意の1財をもってくれば，それとの限界代替率を示すものにすぎない。cf. Baumol, *op. cit.*, p. 669.