産業連関分析と需給函数

——物量投入係数の算定法——

山　田　　勇

1　はしがき

産業連関分析において，現在まで残されている問題のうち主なものは，アグリゲーションの実際的な条件，数量体系と価格体系との総合，物量投入係数の算定法，動学体系などである。このうち，アグリケーションの問題は，数学的にはその条件が求められているが[1]，それは余りにも厳密に過ぎ，実際にそのような条件を要求することはほとんど不可能といってよい。この問題の実際の解決には，数学的条件を緩めて考えなければならないであろう[2]。しかし，本稿で問題にしたのは，物量体系と価格体系との総合と物量投入係数の問題である。数量体系は従来一般的に利用されてきたものであるが，これに対して価格体系は比較的注意が向けられなかったといってよい[3]。そして，このような数量と価格との両体系は相互に独立であることがレオンチェフ体系の1つの特色である。しかし，そもそも経済諸量が相互依存関係にある以上，それらが独立であることは許されない。そこで本稿では，この両者の依存関係を，最終需要函数と供給函数とを導入することによって，実現することをこころみた。その当然の結果として，投入係数は物量的でなければならず，そのような投入係数の求の方を同時に考察した。

1)　Hatanaka, M., "Note on Consolidation within a Leontief System", *Econometrica*, April 1952, pp. 301—303. 荒憲治郎「産業部門の統合と動学的安定条件」『一橋論叢』昭和30年6月，pp. 95—100. Malinvaud, E., "Aggregation Problems in Input-Output Models," *The Structural Interdependence of the Economy*, ed. by T. Barna, 1954, pp. 189—202.

2)　Conference on Research in Income and Wealth, *Input-Output Analysis,*; An Appraisal, 1955, p. 228.

3)　The Netherlands Economic Institute, *Input-Output Relations*, 1953, p. 20.

2　数量波及分析と価格波及分析

それでは第1の問題点である数量波及分析と価格波及分析との関係はどうであろうか。数量波及分析は通常つぎのような知周の形で与えられる。

$$[I-A]^{-1}Y=X \qquad (2\cdot1)$$

ここに I は単位マトリックスであり，A は投入係数マトリックス，すなわち

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2\cdot2)$$

Y は最終需要列ベクトル，すなわち[4]

$$Y=\{Y_1,\ Y_2,\cdots,Y_n\} \qquad (2\cdot3)$$

X は産出量列ベクトル，すなわち

$$X=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\} \qquad (2\cdot4)$$

をあらわす。これに対し，価格波及分析は

$$[I-A^T]^{-1}\pi=P \qquad (2\cdot5)$$

上式において A^T は投入係数マトリックス(2・2)式の転置マトリックス，すなわち

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2\cdot6)$$

であり，π は産出量1単位あたりの附加価値の列ベクトル，すなわち

$$\pi=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n\} \qquad (2\cdot7)$$

さらに，P は価格の列ベクトル，すなわち

$$P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\} \qquad (2\cdot8)$$

をあらわす。

(2・1)式と(2・5)式とを見れば明らかなように，投入係数マトリックス A を与えるかぎり，両者はそれぞれ独立の式であって，相互に結びつかない。言葉を換えていえば，数量波及分析の模型と価格

4)　{　} は以下すべて列ベクトルをあらわす。

波及分析の模型とは相互に独立である。しかし現実の経済体系では，価格と数量とが相互依存関係にあることはいうまでもない。

この事実を以上のレオンチェフ体系について考えてみると，まず数量波及模型(2・1)式では最終需要ベクトル Y は先決変数であって，これに対し，産出量ベクトル X は内生変数である。すなわち(2・1)式をコンシステントな体系とするためには，Y を先決しなければならないことになる。

価格波及模型(2・5)式についても同じことが考えられる。ここでは産出量1単位あたりの附加価値ベクトル π が先決変数であって，価格ベクトルは内生変数でなければならない。

そこでいま，両式の依存関係を決定する1つの方法として，最終需要函数(final demand function)[5]と供給函数(supply function)もしくは産出量函数(output function)とも称すべき2つの函数を体系中に導入することをこころみる。ここに最終需要函数というのは，最終需要が諸価格 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ の函数であることをあらわすものであって，経験的には最終需要を価格の線型函数であらわすことができるものと考える。

最終需要が消費，輸入，資本形成等の支出国民所得の m 個の項目から構成せらるものとすれば，最終需要マトリックスは

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \cdots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} \cdots & Y_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} \cdots & Y_{nm} \end{pmatrix} \qquad (2 \cdot 9)$$

となる。この各横行の合計をそれぞれ $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ であらわせば

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ \vdots \\ Y_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} Y_{1m} \\ Y_{2m} \\ \vdots \\ Y_{nm} \end{pmatrix} \qquad (2 \cdot 10)$$

さて，まえに述べた如く，(2・9)式の最終需要の各要素は，それぞれ諸価格 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ の線型函数であらわされるものと考えるから，つぎの式が成立するであろう。

$$\begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{110} \\ \alpha_{120} \\ \vdots \\ \alpha_{1n0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{111} & \alpha_{112} \cdots & \alpha_{11n} \\ \alpha_{112} & \alpha_{122} \cdots & \alpha_{12n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n1} & \alpha_{1n2} \cdots & \alpha_{1nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ \vdots \\ Y_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{210} \\ \alpha_{220} \\ \vdots \\ \alpha_{2n8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{211} & \alpha_{212} \cdots & \alpha_{21n} \\ \alpha_{212} & \alpha_{222} \cdots & \alpha_{22n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{2n1} & \alpha_{2n2} \cdots & \alpha_{2nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2 \cdot 11)$$

$$\begin{pmatrix} Y_{1m} \\ Y_{2m} \\ \vdots \\ Y_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{m10} \\ \alpha_{m20} \\ \vdots \\ \alpha_{mn0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{m11} & \alpha_{m12} \cdots & \alpha_{m1n} \\ \alpha_{m21} & \alpha_{m22} \cdots & \alpha_{m2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{mn1} & \alpha_{mn2} \cdots & \alpha_{mnn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

(2・11)式の各式を(2・10)式に代入すれば

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 P \qquad (2 \cdot 12)$$

上式において，α_0 は列ベクトル

$$\alpha_0 = \{\sum^m \alpha_{i10}, \sum^m \alpha_{i20}, \cdots, \sum^m \alpha_{in0}\} \qquad (2 \cdot 13)$$

をあらわし，α_1 は

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \sum^m \alpha_{i11} & \sum^m \alpha_{i12} \cdots & \sum^m \alpha_{i1n} \\ \sum^m \alpha_{i21} & \sum^m \alpha_{i22} \cdots & \sum^m \alpha_{i2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum^m \alpha_{in1} & \sum^m \alpha_{in2} \cdots & \sum^m \alpha_{inn} \end{pmatrix} \qquad (2 \cdot 14)$$

をあらわす。$\sum^m$ 記号は $i=1$ から $i=m$ まで合計することを意味する。(2・12)式の示すところは，最終需要ベクトル Y が価格ベクトル P の線型函数であることと，α_0 はその截片のベクトル，α_1 は価格に関する限界最終需要マトリックスであるということである。さらにまたこの式は，価格ベクトルの各要素が与えられれば，内生部門の最終需要 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ が決定せられ，逆に，このような最終需要が与えられれば，価格ベクトルの各要素は

$$P = \alpha_1^{-1}(Y - \alpha_0) \qquad (2 \cdot 15)$$

によって決定せられることを示している。まえの場合，すなわち価格ベクトルの各要素が与えられれば，(2・11)式によって，(2・9)式の最終需要マ

5) 最終需要函数は従来の需要函数のうち一番簡単な形のものである。これは各種の最終需要を通じて統一的に定式化する必要からとった手段である。これらがはたして各内生部門の産出物の価格だけに関係を持つか否かは，実証的研究を待って初めて正当化されるものであろう。それと同時に理論的統一の必要性も充分考慮せらるべきものであり，とくに産業連関分析では，最終需要部門の種類に応じてそれぞれ相異る式を採用することは困難である点を考慮して，これを(2・11)式の如く取り扱った。

トリックスの各要素が決定を見ることとなる。

産出量函数は，つぎの式によって与えられる。

$$X=\beta_0+\beta_1 P \qquad (2\cdot16)$$

ここに，β_0 は列ベクトル

$$\beta_0=\{\beta_{10}, \beta_{20}, \cdots, \beta_{n0}\} \qquad (2\cdot17)$$

をあらわし，また β_1 は

$$\beta_1=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \cdots \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \cdots \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \cdots \beta_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2\cdot18)$$

を示す。β_0 は産出量函数の截片，β_1 は価格に関する限界産生量を意味する。

そこで，われわれの産業連関模型は，(2・1)，(2・5)，(2・12)および(2・16)の4式であり，この場合の内生変数は，X, Y, P, π の4つであるから，これらの内生変数はすべて一義的な解をうることになる。これを解くことは容易であって，まず，(2・12)，(2・16)両式を(2・1)式に代入すれば

$$P=([I-A]^{-1}\alpha_1-\beta_1)^{-1}(\beta_0-[I-A]^{-1}\alpha_0) \qquad (2\cdot19)$$

がえられ，つぎに，この P の値を(2・5)，(2・12)，(2・16)式に代入して，それぞれ π, Y, X をうることができる。そのうち π は

$$\pi=[I-A^T]P \qquad (2\cdot20)$$

によって与えられる[6)7)]。

ここに一言つけ加えておきたい点は，従来の産業連関分析に見られる関係式は，すべて数学的な恒等式であって，たとえば，数量波及分析式(2・1)もしくは価格波及分析式(2・5)はその著例である。これら両式については，波及効果の経済的意味づけがなされてはいるものの，それらはむしろ数学式の経済的意味づけであって，経済的意味の数式化ではないといえよう。すなわち，(2・1)式を例にとって考えてみると，数学的恒等関係を示すこの式における左辺の逆マトリックスを展開して

$$[I-A]^{-1}=I+A+A^2+\cdots$$

とし，これを経済的に意味づけたのが，波及効果の経済的説明である。これに対し(2・12)式もしくは(2・16)式はいわゆる行動方程式である。すなわち，それらはそれぞれ需要ないし供給の経済法則をあらわす数学式であって，前2者とは異った性質のものである点を注意しなければならない。

3　最終需要函数のパラメーターの最小自乗推定値

最終需要函数のなかのパラメーター α は通常の最小自乗法によって，過去の統計資料から推定できる。いま，α の最小自乗推定値を $\hat{\alpha}$ であらわせば，(2・11)式に関する α の推定式はつぎの如くである。ただし $\sum^r$ 記号は資料を1から r まで合計することを示す[8)]。

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{111} & \hat{\alpha}_{121} \cdots \hat{\alpha}_{1n1} \\ \hat{\alpha}_{112} & \hat{\alpha}_{122} \cdots \hat{\alpha}_{1n2} \\ \cdots & \cdots \\ \hat{\alpha}_{11n} & \hat{\alpha}_{12n} \cdots \hat{\alpha}_{1nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum^r p_1^2 & \sum^r p_1p_2 \cdots \sum^r p_1p_n \\ \sum^r p_1p_2 & \sum^r p_2^2 \cdots \sum^r p_2p_n \\ \cdots & \cdots \\ \sum^r p_1p_n & \sum^r p_2p_n \cdots \sum^r p_n^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix} \sum^r y_{11}p_1 & \sum^r y_{21}p_1 \cdots \sum^r y_{n1}p_1 \\ \sum^r y_{11}p_2 & \sum^r y_{21}p_2 \cdots \sum^r y_{n1}p_2 \\ \cdots & \cdots \\ \sum^r y_{11}p_n & \sum^r y_{21}p_n \cdots \sum^r y_{n1}p_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{211} & \hat{\alpha}_{221} \cdots \hat{\alpha}_{2n1} \\ \hat{\alpha}_{212} & \hat{\alpha}_{222} \cdots \hat{\alpha}_{2n2} \\ \cdots & \cdots \\ \hat{\alpha}_{21n} & \hat{\alpha}_{22n} \cdots \hat{\alpha}_{2nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum^r p_1^2 & \sum^r p_1p_2 \cdots \sum^r p_1p_n \\ \sum^r p_1p_2 & \sum^r p_2^2 \cdots \sum^r p_2p_n \\ \cdots & \cdots \\ \sum^r p_1p_n & \sum^r p_2p_n \cdots \sum^r p_n^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix} \sum^r y_{12}p_1 & \sum^r y_{22}p_1 \cdots \sum^r y_{n2}p_1 \\ \sum^r y_{12}p_2 & \sum^r y_{22}p_2 \cdots \sum^r y_{n2}p_2 \\ \cdots & \cdots \\ \sum^r y_{12}p_n & \sum^r y_{22}p_n \cdots \sum^r y_{n2}p_n \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{m11} & \hat{\alpha}_{m21} \cdots \hat{\alpha}_{mn1} \\ \hat{\alpha}_{m12} & \hat{\alpha}_{m22} \cdots \hat{\alpha}_{mn2} \\ \cdots & \cdots \\ \hat{\alpha}_{m1n} & \hat{\alpha}_{m2n} \cdots \hat{\alpha}_{mnn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum^r p_2^1 & \sum^r p_1p_2 \cdots \sum^r p_1p_n \\ \sum^r p_1p_2 & \sum^r p_2^2 \cdots \sum^r p_2p_n \\ \cdots & \cdots \\ \sum^r p_1p_n & \sum^r p_2p_n \cdots \sum^r p_n^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix} \sum^r y_{1m}p_1 & \sum^r y_{2m}p_1 \cdots \sum^r y_{nm}p_1 \\ \sum^r y_{1m}p_2 & \sum^r y_{2m}p_2 \cdots \sum^r y_{nm}p_2 \\ \cdots & \cdots \\ \sum^r y_{1m}p_n & \sum^r y_{2m}p_n \cdots \sum^r y_{nm}p_n \end{pmatrix}$$

6)　(2・9)式の最終需要マトリックスの各要素は，(2・11)式によって P がえられれば，これからただちに求められる。したがって，これらは内生的に解くことができる。

7)　(2・1)，(2・5)，(2・15)，(2・19)式中の逆マトリックスはすべてその存在を仮定する。

8)　これからさきの逆マトリックスについてもその存在を仮定する。

上式において

$$y_{ij}=Y_{ij}-\bar{Y}_{ij} \qquad (i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m)$$
$$P_i=P_i-\bar{P}_i$$

であり，$\bar{Y}_{ij}$ および $\bar{P}_i$ はそれぞれ Y_{ij} および P_i の平均を示す。

つぎに，(2•12)式のなかの α_1 を

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots\alpha_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\cdots\alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 3)$$

とおけば

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{11} & \hat{\alpha}_{12}\cdots\hat{\alpha}^{1}{}_{n} \\ \hat{\alpha}_{21} & \hat{\alpha}_{22}\cdots\hat{\alpha}_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hat{\alpha}_{n1} & \hat{\alpha}_{n2}\cdots\hat{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overset{r}{\Sigma}p_1{}^2 & \overset{r}{\Sigma}p_1p_2\cdots\overset{r}{\Sigma}p_1p_n \\ \overset{r}{\Sigma}p_1p_2 & \overset{r}{\Sigma}p_2{}^2\cdots\overset{r}{\Sigma}p_2p_n \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \overset{r}{\Sigma}p_1p_n & \overset{r}{\Sigma}p_2p_n\cdots\overset{r}{\Sigma}p_n{}^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix} \overset{r}{\Sigma}y_1p_1 & \overset{r}{\Sigma}y_2p_1\cdots\overset{r}{\Sigma}y_np_1 \\ \overset{r}{\Sigma}y_1p_2 & \overset{r}{\Sigma}y_2p_2\cdots\overset{r}{\Sigma}y_np_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \overset{r}{\Sigma}y_1p_n & \overset{r}{\Sigma}y_2p_n\cdots\overset{r}{\Sigma}y_np_n \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 3)$$

となる。この式において $\hat{\alpha}$ は(2•12)式から直接求めた最小自乗推定値であり，Σ 記号は資料を 1 から n まで合計することを示す。さらに

$$y_i=Y_i-\bar{Y}_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

をあらわす。$\bar{Y}_i$ は Y_i の平均である。

(2•10)式から

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} y_{1m} \\ y_{2m} \\ \vdots \\ y_{nm} \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 4)$$

をうるから，この結果を利用し，これを(3・3)式の右辺第 2 項に代入し，さらに(3・1)式を考慮すれば

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{11} & \hat{\alpha}_{12}\cdots\hat{\alpha}_{1n} \\ \hat{\alpha}_{21} & \hat{\alpha}_{22}\cdots\hat{\alpha}_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hat{\alpha}_{n1} & \hat{\alpha}_{n2}\cdots\hat{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overset{m}{\Sigma}\hat{\alpha}_{i11} & \overset{m}{\Sigma}\hat{\alpha}_{i12}\cdots\overset{m}{\Sigma}\hat{\alpha}_{i1n} \\ \overset{m}{\Sigma}\hat{\alpha}_{i21} & \overset{m}{\Sigma}\hat{\alpha}_{i22}\cdots\overset{m}{\Sigma}\hat{\alpha}_{i2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \overset{m}{\Sigma}\hat{\alpha}_{in1} & \overset{m}{\Sigma}\hat{\alpha}_{in2}\cdots\overset{m}{\Sigma}\hat{\alpha}_{inn} \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 5)$$

となり，(2•14)式と同じ結果がえられることが明らかとなる。

(2•11)式について，残りの α の最小自乗推定値を考えてみよう。この式からつぎの推定式をうる。

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{110} \\ \hat{\alpha}_{120} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{1n0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{Y}_{11} \\ \bar{Y}_{21} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{n1} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{111} & \hat{\alpha}_{112}\cdots\hat{\alpha}_{11n} \\ \hat{\alpha}_{121} & \hat{\alpha}_{122}\cdots\hat{\alpha}_{12n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hat{\alpha}_{1n1} & \hat{\alpha}_{1n2}\cdots\hat{\alpha}_{1nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{210} \\ \hat{\alpha}_{220} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{2n0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{22} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{n2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{211} & \hat{\alpha}_{212}\cdots\hat{\alpha}_{21n} \\ \hat{\alpha}_{221} & \hat{\alpha}_{222}\cdots\hat{\alpha}_{22n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hat{\alpha}_{2n1} & \hat{\alpha}_{2n2}\cdots\hat{\alpha}_{2nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3 \cdot 6)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{m10} \\ \hat{\alpha}_{m20} \\ \cdots \\ \hat{\alpha}_{mn0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{Y}_{1m} \\ \bar{Y}_{2m} \\ \cdots \\ \bar{Y}_{nm} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{m11} & \hat{\alpha}_{m12}\cdots\hat{\alpha}_{m1n} \\ \hat{\alpha}_{m21} & \hat{\alpha}_{m22}\cdots\hat{\alpha}_{m2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hat{\alpha}_{mn1} & \hat{\alpha}_{mn2}\cdots\hat{\alpha}_{mnn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{pmatrix}$$

また一方，(2•12)式から α_0 の最小自乗推定値を求めれば

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{10} \\ \hat{\alpha}_{20} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{n0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{11} & \hat{\alpha}_{12}\cdots\hat{\alpha}_{1n} \\ \hat{\alpha}_{21} & \hat{\alpha}_{22}\cdots\hat{\alpha}_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hat{\alpha}_{n1} & \hat{\alpha}_{n2}\cdots\hat{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 7)$$

さらに，(2•10)式から

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{Y}_{11} \\ \bar{Y}_{21} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{n1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{22} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{n2} \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} \bar{Y}_{1m} \\ \bar{Y}_{2m} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{nm} \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 8)$$

(3・5)および(3・8)の両式を利用し，これらを(3・7)の諸式に代入すれば

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{10} \\ \hat{\alpha}_{20} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{n0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{Y}_{11} \\ \bar{Y}_{21} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{n1} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{111} & \hat{\alpha}_{112}\cdots\hat{\alpha}_{11n} \\ \hat{\alpha}_{121} & \hat{\alpha}_{122}\cdots\hat{\alpha}_{12n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hat{\alpha}_{1n1} & \hat{\alpha}_{1n2}\cdots\hat{\alpha}_{1nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{22} \\ \cdots \\ \bar{Y}_{n2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{211} & \hat{\alpha}_{212}\cdots\hat{\alpha}_{21n} \\ \hat{\alpha}_{221} & \hat{\alpha}_{222}\cdots\hat{\alpha}_{22n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hat{\alpha}_{2n1} & \hat{\alpha}_{2n2}\cdots\hat{\alpha}_{2nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{pmatrix}+\cdots \qquad (3 \cdot 9)$$

$$+\begin{pmatrix} \bar{Y}_{1m} \\ \bar{Y}_{2m} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{nm} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{m11} & \hat{\alpha}_{m12}\cdots\hat{\alpha}_{m1n} \\ \hat{\alpha}_{m21} & \hat{\alpha}_{m22}\cdots\hat{\alpha}_{m2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hat{\alpha}_{mn2} & \hat{\alpha}_{mn2}\cdots\hat{\alpha}_{mnn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{pmatrix}$$

(2・6)式の値を(3・9)式に代入すれば

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{10} \\ \hat{\alpha}_{20} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{n0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{110}+\hat{\alpha}_{210}+\cdots+\hat{\alpha}_{m10} \\ \hat{\alpha}_{120}+\hat{\alpha}_{220}+\cdots+\hat{\alpha}_{m20} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\alpha}_{1n0}+\hat{\alpha}_{2n0}+\cdots+\hat{\alpha}_{mn^0} \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 10)$$

が証明される。この結果は(2•13)式に対応する。

これによって，最終需要函数のなかのパラメーターは，個々の函数のパラーターの最小自乗推定を行った結果を統合するが，これを統合した函数のパラメーターの最小自乗推定を行った結果に一致することが証明された。

4　物量投入係数の算出

理論模型を完成したわれわれのつぎの問題は，これに実際の統計を適用することである。しかしそのまえに完結しておかなければならない仕事は，物量投入係数の算出方法についてである。

産業連関表は産出金額と投入金額とによって作成されており，たとえこの金額表示の投入・産出から投入係数を計算しても，主対角要素を除いては，すべて価格変動の影響を受けることはいうまでもない。すなわち投入係数 a_{ij} はつぎの如く表示することができる。

$$a_{ij}=P_ix_{ij}/P_jX_j \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{4・1}$$

もし $i=j$ であれば

$$a_{ij}=x_{ii}/X_i \tag{4・2}$$

となって純粋な物量投入係数となるけれども，$i \neq j$ の場合は，P_i, P_j の変動によって a_{ij} が変化することは明らかである[9)]。これに対する1つの解決策はいわゆる dollar's worth[10)] という考え方であるが，しかし本質的には，やはり価格変動の影響を投入係数から除くことはできない。

そこで，いま産業連関表を修正して純粋な投入係数をうる方法を考えてるみる。このことは，われわれの産業連関模型が物量模型と価格模型とを峻別することから当然必要となる問題なのである。

ところで，いまある年度の産業連関表と他の年度のそれとを考えてみよう。かりにまえの年度を基準年度と考え，そのときの産出量を X_j^0，価格を P_j^0 とすれば，この両者を掛け合わせた相乗積が実際の表においてわれわれが利用しうる数値である。この相乗積を V_j^0 とすれば，これは表利用の視点からは既知数である。またもう1つの他の年度をとり，そのときの産出量を X_j^1 価格を P_j^1 とすれば，その相乗積 V_j^1 もまた既知数と考えることができる。すなわち

$$V_j^0=P_j^0X_j^0, \qquad V_j^1=P_j^1X_j^1 \tag{4・3}$$

さらにまた，基準年度に対する比較年度の価格比が与えられているとすれば

$$P_j^1/P_j^0=R_j \tag{4・4}$$

において R を既知数と考えることができる。(4・3) (4・4)両式において，未知数は P_j^0, P_j^1, X_j^0, X_j^1 の4個であるから，このうちの1個を与えれば，他の3個の未知数は全部決定される。そこで，いま通常の方法にしたがって，$P_j^0=1$ とおけば，P_j^1, X_j^0, X_j^1 はそれぞれ

$$P_j^1=R_j, \qquad X_j^0=V_j^0,$$
$$X_j^1=V_j^1/R_j \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4・5}$$

となる。これらの式の右辺はすべて既知数である。投入，最終需要についてもこれと全く同様に，数量と価格とを分けることができる。投入について考えれば

$$v_{ij}^0=P_i^0x_{ij}^0, \qquad v_{ij}^1=P_i^1x_{ij}^1, \qquad P_i^1/P_i^0=R_i$$
$$P_i^0=1 \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{4・6}$$

v_{ij}^0, v_{ij}^1, R_i は既知数であるから，上式から

$$P_i^1=R_i, \qquad x_{ij}^0=v_{ij}^0, \qquad x_{ij}^1=v_{ij}^1/R_i \tag{4・7}$$

この場合の投入係数は，両年度において

$$a_{ij}^0=x_{ij}^0/X_j^0, \qquad a_{ij}^1=x_{ij}^1/X_j^1 \tag{4・8}$$

によって求められ，純粋に数量的な係数となる。

以上の物量投入係数の算出例として，通商産業省編纂の昭和26年と29年との産業連関表を取ってみよう[11)]。ここでは原理を示すだけであるから，各産業部門を3つに統括し，農林水畜産業部門(I)，鉱工商業部門(II)および附加価値部門(III)とする。

第1表　昭和26年表(金額表)

	I	II	III	計
I	55,290	849,729	442,066	1,347,085
II	345,129	5,648,770	4,453,008	10,446,907
III	946,666	3,948,408	209,037	5,104,111
計	1,347,085	10,446,907	5,104,111	16,898,103

単位：100万円

物量投入係数を求めるには，まず内生部門 I, II の価格比を算定しなければならない。すなわち，

9)　W. W. Leontief, *The Structure of American Economy*, 2 nd., ed., 1951, pp. 37—38, pp. 73—74.

10)　W. W. Leontief, *ibid.*, p. 72, p. 148.

11)　通商産業大臣官房調査統計部編『日本経済の産業連関分析』昭和32年。

昭和26年価格基準の昭和29年の価格比を求めることが必要となる。

第2表 昭和29年表(金額表)

	I	II	III	計
I	55,507	1,019,902	371,938	1,447,347
II	273,362	9,712,017	6,075,520	16,060,899
III	1,118,478	5,328,980	230,800	6,678,258
計	1,447,347	16,060,899	6,678,258	24,186,504

単位：100万円

ところで，農林水畜産物の価格比を算定することから初める。昭和26年と29年との農林産物価格は，昭和25—27年基準で，それぞれ99.8および105.0であり，水産物価格はそれぞれ102.1および119.8である[12]。また，昭和26年における農林産物と水産物との生産国民所得[13]は，第1表の第I部門について縦列の附加価値の計数から求められる。その値は1,347,085であるが，そのうち農林産物の所得は1,229,914であり，水産物のそれは117,171である。また昭和29年においては，第2表の第I部門について縦列の附加価値のうち，農林産物の所得が1,329,209，水産物の所得が118,138である。ただし，ここに昭和26年，29年というのは暦年についていっているのである。以上の資料から，昭和26年における第I部門の農林産物と水産物との加重総合平均は

$$\frac{99.8\times1,229,914+102.1\times117,171}{1,229,914+117,171}=100.0$$

また，昭和29年における第II部門の農林産物と水産物との加重総合平均は

$$\frac{105.0\times1,329,209+119.8\times118,138}{1,329,209+118,138}=106.2$$

これから第I部門の価格比 R_1 を求めると

$$R_1=106.2/100.0=1.062$$

つぎに，鉱工商業産物の価格を計算してみよう。昭和26年と29年との消費財価格は，昭和9—11年を1として，それぞれ，264.9および304.3であり，生産財実効価格はそれぞれ340.5および342.3である。また，昭和26年における鉱工商業産物の附加価値は，第1表の第II部門について，縦列の附加価値3,948,408によって示されているが，同年の家計消費支出と政府消費との合計は，同表の原表から3,790,290であることがわかるから，生産財の附加価値は 3,948,408−(3,790,290−751,804)=909,922となる。ここに751,804は家計と政府との消費支出のうち第I部門に振り向けられた消費分である。昭和29年についても，これと全く同様に計算する。すなわち，第2表の第II部門について，縦列の附加価値5,328,980のうちから，第II部門に向けられた家計と政府との消費支出5,359,008−795,150=4,563,858を差し引いた残り，765,122が第II部門の附加価値となる。ここに5,359,008は家計消費4,701,846と政府消費657,162との合計であり，795,150はそのうち第I部門に振り向けられた家計と政府との消費支出である。以上の資料から，第II部門の価格比 R_2 を求める。まず，昭和26年の加重総合指数は

$$\frac{264.9\times3,790,290+340.5\times909,922}{3,790,290+909,922}=279.5$$

であり，また昭和29年については

$$\frac{304.3\times5,359,008+342.3\times765,122}{5,359,008+765,122}=309.0$$

であるから，第II部門の価格比 R_2 は

$$R_2=309.0/279.5=1.106$$

となる。

以上で価格比が求められたから，これから産業連関表の数量表がえられる。すなわち，いまえられた R_1, R_2 をもってそれぞれ第2表の第I，II部門の横行の計数を割ったものが，数量表とも見らるべきものであって，いい換えれば，これは昭和26年価格であらわした29年の金額表である。その理由は説明するまでもないが，いま産出について考えて見れば，その昭和29年の金額は $P_i{}^1X_i{}^1$ であって，これを価格比 R_i で割ったものは

$$P_i{}^1X_i{}^1/R_i=P_i{}^1X_i{}^1\Big/\frac{P_i{}^1}{P_i{}^0}=P_i{}^0X_i{}^1\ (i=1,2,\cdots,n)$$

となるからである。投入についても同様である。いまその結果を示せば第3表の如くである。

第1表と第3表とから，昭和26年および29年の投入係数を求めたものは，第4表の示す如くである。これが純粋な物量投入係数にほかならない。

12) 農林省統計調査部編『農林省統計表』昭和32年。

13) 経済企画庁編『昭和29年度の国民所得』昭和30年。

第3表　昭和26年価格29年表

	R	I	II	III	計
I	1.062	52,266	960,360	360,224	1,362,850
II	1.106	247,163	8,781,209	5,493,237	14,521,608

第4表　物量投入係数表

	昭和 26 年		昭和 29 年	
	I	II	I	II
I	$a_{11}=0.041$	$a_{12}=0.081$	$a_{11}=0.038$	$a_{12}=0.066$
II	$a_{21}=0.256$	$a_{22}=0.541$	$a_{21}=0.181$	$a_{22}=0.605$

この投入係数は物量的なものであるから，物価の変動による影響は原則として無視することができ，その変動は純粋な技術変化の結果であると考えることができよう。

5　実証分析

最後に，第2節で展開した模型に統計資料をあてはめて，この模型から誘導せられる，投入量，産出量，価格を求めてみよう。統計資料としては，主として第4表の物量投入係数を用いることとする。産業部門は，第4節の例にならって，第I部門，第II部門，第III部門の3部門とする。このうち第I，II両部門を内生部門とし，第III部門を附加価値部門にとり，これを外生部門と考える。

まず最初に，(2•12)式の最終需要函数について特殊な一番簡単なものとして

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (5 \cdot 1)$$

として，このなかのパラメーターの最小自乗推定値を求める[14]。この資料は第1表と第3表のなかの第III部門縦列の計数とさきの R を求めたときの資料とである。ここに注意すべき点は，第2表は金額表で，第3表のような実質額表ではないということであり，さらに α の推定値は実質額表から求めるということである。計算結果を示せば

$$\hat{\alpha}_{10}=1,762,000, \quad \hat{\alpha}_{11}=-13,200$$
$$\hat{\alpha}_{20}=-5,403,000 \quad \hat{\alpha}_{22}=35,262 \quad (5 \cdot 2)$$

また産出量函数についても，(2•16)式の特殊なしかも一番簡単なものとして

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 \\ 0 & \beta_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (5 \cdot 3)$$

を採用し[15]，資料としては第1表と第3表の表頭の計の計数を利用して，β の最小自乗推定値を求めた結果は

$$\hat{\beta}_{10}=1,093,000, \quad \hat{\beta}_{11}=2,543$$
$$\hat{\beta}_{20}=-28,123,000, \quad \hat{\beta}_{22}=138,000 \quad (5 \cdot 4)$$

となる。これらのパラメーターの値を使って，(2•19)式を求めてみよう。まず投入係数に関する逆マトリックスは

$$[I-A]^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.038 & 0.066 \\ 0.181 & 0.605 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.073 & 0.179 \\ 0.492 & 2.614 \end{bmatrix}$$

となる。この投入係数は昭和29年のものである。これから P を求めると

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix} 1.073 & 0.179 \\ 0.492 & 2.614 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -13,200 & 0 \\ 0 & 35.262 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2,543 & 0 \\ 0 & 138,000 \end{bmatrix}\right)^{-1}\times\left(\begin{bmatrix} 1,093,000 \\ -28,123,000 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1.073 & 0.179 \\ 0.492 & 2.614 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,762,000 \\ -5,403,000 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 106.7 \\ 309.3 \end{bmatrix}$$

すなわち，$P_1=106.7$，$P_2=309.3$ となる。産出物1単位あたりの附加価値 π は，(2•20)式から

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.038 & 0.181 \\ 0.066 & 0.105 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 106.7 \\ 309.3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 267.665 \\ 999.403 \end{bmatrix}$$

となる。また，最終需要 Y は (2•12)式から

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1,762,000 \\ -5,403,000 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -13,200 & 0 \\ 0 & 35,262 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 106.7 \\ 309.3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 353,560 \\ 5,503,537 \end{bmatrix}$$

産出量 X は，(2•16)式から

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1,093,000 \\ -28,123,000 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2,543 & 0 \\ 0 & 138,000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 106.7 \\ 309.3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1,364,338 \\ 14,560,400 \end{bmatrix}$$

となる。

---

14) 15)　もし資料が3組以上あれば，この場合 $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ として，α，β の値を推定できるが，本例題の如く，2組の資料よりない場合は，(5・1)式もしくは(5・3)式の如くすることが必要である。