生計費指数と数量指数

磯　野　　修

この論文の目的は，消費者選択の理論によって，生計費指数と数量指数について今までに得られた結果を整理し，両者の関係を明かにすることにある[1]。ここに数量指数と言うのは，Hicks, Allen 及び大川博士によって，理論的基礎づけのなされたものを指す。

簡単に結論を言う。生活水準の変化を判断するためには，2つの指数——と言うよりは，2つの指数論で用いている考え方——を，同時に用いることが必要であって，そのうちの一方だけに頼るのは不適当である。ここに，2つの指数を用いると言うのは，2種類の指数値を別々に計算するというのではなくて，今まで生計費指数論で用いてきた推論の方法と，数量指数で用いている考え方とを，同時に用いるという意味である。

なお，この論文をまとめるに当り，生計費指数については，森田博士の，数量指数については，大川博士の著書・論文に負う所が多い。特に記して，感謝の意を表わしたい。

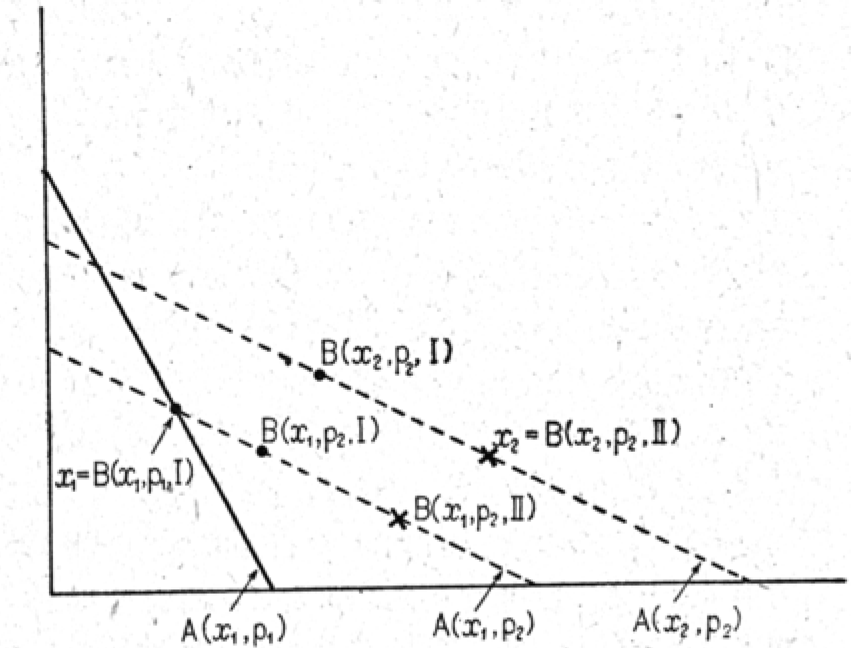
I

記号を次のように決める。

	価　格	数　量	選択尺度
1時　点	p_1	x_1	I
2時　点	p_2	x_2	II

消費者が，2つの時点において購入する財貨の種類には，変化がないものとし，これを n 種類とする。n 次元空間における，価格ベクトル p_i と，数量ベクトル x_i とによって，i 時点 $(i=1,2)$ における，価格と購入数量を示す。選択尺度は，2つの時点で同じである必要はない。

数量を示す空間において，点 x_i を通り，方向余弦が p_k の各成分に比例する超平面を，$A(x_i, p_k)$ と記す。$(i, k=1,2)$ この超平面上の点で，選択尺度が I の時に選択される点を，$B(x_i, p_k, \mathrm{I})$ とし，選択尺度が II の時に選択される点を，$B(x_i, p_k, \mathrm{II})$ とする。この記号によれば，たとえば，1時点の予算面は，$A(x_1, p_1)$，1時点の均衡点，即ち，点 x_1 は，$B(x_1, p_1\ \mathrm{I})$ となる。



第 1 図

特に，$n=2$ の時は，数量を示す空間は平面となり，超平面 A は直線となる。第1図は，この場合を示す。図において，1時点の予算線は実線で，2時点の予算線は点線で描く。又，尺度 I に応じて選択される点は黒丸で，尺度 II に応じて選択される点は黒十字で示す。以下の推論では，超平面 A の上に，尺度 I 又は II に応じて選択される点 B が存在すれば足りる。選択尺度を示すものとして，無差別曲面（曲線）が存在し，且つ，これが購入量について微分可能である必要はない。第1図に，無差別曲線を描かないのは，この理由による。

II

生計費指数の理論は，次のようになる。点 x_1 と，点 $B(x_1, p_2, \mathrm{I})$ とは，同じ予算面の上にあるのに，消費者は，尺度 I に応じて後者を選ぶ。従って，尺度 I において，点 $B(x_1, p_2, \mathrm{I})$ は，点 x_i よりも上位，又は，少くとも同位。次に，ベクトル p_i と，ベクトル x_k との内

1) R. Frisch, "Annual Survey of General Economic Theory: The Problem of Index Numbers," *Econometrica*, vol. IV. 1936. p. 31—38

森田優三『物価変動の測定』甲文堂書店，1940.

同「物価指数の正確さ」『経済研究』第3巻第3号，1952, p. 183—190.

J. R. Hicks, "The Valuation of the Social Income," *Economica*, New Series, vol. VII, 1940. p. 105—124.

R. G. D. Allen, "The Economic Theory of Index Numbers," *Economica*, New Series, vol. XVI, 1949. p. 197—203

大川一司「消費水準測定の一理論」季刊『理論経済学』第2巻第2号，1951. p. 81—87

同『生活水準の測定』一橋大学経済研究叢書 1.岩波書店，1953.

積を，$(p_i\ x_k)$ と記す。$(i,\ k=1,\ 2)$ $(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$ のとき，$A(x_2,\ p_2)$ は，原点に関して，$A(x_1,\ p_2)$ の外側にある。(第1図) このとき，時点2において，$(p_2\ x_2)$ の所得を持つ消費者が，仮に，尺度Iに従って行動すると考えれば，その時に選択される点 $B(x_2,\ p_2,\ \mathrm{I})$ は，尺度Iにおいて，点 $B(x_1,\ p_2\ \mathrm{I})$ よりも上位にある。故に，$(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$ ならば，点 $B(x_2,\ p_2\ \mathrm{I})$ は，尺度Iに関して，点 x_1 よりも上位。即ち，消費者は，時点2において，尺度Iについて初期点 x_1 よりも上位にある点 $B(x_2,\ p_2,\ \mathrm{I})$ を選択することができる。実際には，消費者の選択尺度が，尺度Iから尺度IIに変ったため，時点2において選択される点は，点 $B(x_2,\ p_2,\ \mathrm{I})$ ではなくて，点 $x_2=B(x_2,\ p_2,\ II)$ であり，点 x_2 は，尺度Iについて点 x_1 より上位にあるとは限らない。かえって，尺度Iの上で，点 x_1 より下位にくることもあり得る。しかし，このとき，消費者にとって，尺度Iの上で，点 x_1 よりも上位にある点 $B(x_2,\ p_2,\ \mathrm{I})$ を選択する可能性が開かれているという意味で，$(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$ ならば，尺度Iに照して，時点2における消費者の地位は，可能性において向上した，と言ってよい[2]。

次に，数量指数の理論は，次のようになる。尺度IIに応じて行動するとき，消費者は，予算面 $A(x_1,\ p_2)$ の上で，点 x_1 を捨てて点 $B(x_1,\ p_2\ \mathrm{II})$ を選択するから，点 $B(x_1,\ p_2,\ \mathrm{II})$ は，尺度IIの上で点 x_1 より上位，又は，少くとも同位。$(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$ ならば，点 $x_2=B(x_2,\ p_2,\ \mathrm{II})$ は，尺度IIにおいて，点 $B(x_1,\ p_2,\ \mathrm{II})$ よりも上位。従って，このとき，点 x_2 は点 x_1 よりも，尺度IIの上で上位にある。この場合は，生計費指数論のときと異り，消費者が現実に選ぶ点 x_2 が，尺度IIの上で，確かに点 x_1 よりも上位にあることが言える。た

2) 通常，生計費指数論では，価格が p_2 のとき，尺度Iにおいて点 x_1 と無差別な財貨数量——これを x とする——を考え，$T=(p_2\,x)/(p_1\,x_1)$ を，時点1の無差別水準に基づく真の生計費指数と呼ぶ。時点2において，消費者が $(p_2\ x_1)$ だけの貨幣所得を持てば，尺度Iに従って行動するとき，この尺度に関して点 x_1 より上位の点——第1図の点 $B(x_1,\ p_2,\ \mathrm{I})$ を選ぶ。従って，点 x_1 と同じ無差別水準にある点 x を，価格 p_2 のもとで購入するに要する金額 $(p_2\ x)$ は，$(p_2\ x_1)$ より小さい。故に，T は，ラスパイレス式の値，$L=(p_2\ x_1)/(p_1\ x_1)$ よりも小となるから，L の値が1よりも小ならば，時点1の無差別水準を基準とする生計費 T は，下落したと判定する。

この論法には，2つの点で問題がある。

(1) 価格が p_2 のとき，尺度Iにおいて点 x_1 と無差別な数量 x の存在を予定している。選択尺度が無差別曲面体系として表現され，その曲面が購入数量について偏微分可能ならば，このような x が確かに存在する。しかし，このような前提条件は，選択尺度の性格を制限するものであり，生計費指数論にとって，この制約条件は不要である。与えられた予算面の上で，選択尺度I又はIIに応じて，選択されるべき点が決まれば，それで足りる。初期点 x_1 と無差別な数量 x が存在するか，否かは，問う必要がない。(P. A. Samuelson, "Consumption Theory in Terms of Revealed Preference," *Economica*, New Series, vol. xv, 1948, p. 244)

(2) 生計費が上昇したか，下落したかを考えるのは，実質所得の増減を知るためである。実質所得の増減は，選択尺度の上での位置の向上，又は低下によって判断される。従って，生計費の上昇又は下降と，選択尺度上の位置の変化とを結びつけて考えなければ，生計費の変化について論ずる意味がない。生計費指数を実際に用いるときには，(イ) 時点1の所得 $(p_1\ x_1)$ と，(ロ) 真の生計費指数で修正した時点2の所得 $(p_2x_2)/T>(p_2x_2)/L=(p_2x_2)\ (p_1x_1)/(p_2\ x_1)$ とを比較する。(イ) (ロ) の両者を，$(p_1\ x_1)$ で割ると，1と，$(p_2\ x_2)/T(p_1\ x_1)>(p_2\ x_2)/(p_2\ x_1)$ とを比較して，$(p_2\ x_2)/(p_2\ x_1)>1$，即ち，$(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$ ならば，L で修正した時点2の実質所得 $(p_2\ x_2)/L$ は，時点1の所得よりも大。従って，L より小さな T で修正した時点2の真の実質所得 $(p_2\ x_2)/T$ は，なおさら大，と結論する。修正するに用いた T は，時点1を基準とし，尺度I，数量 x_1 に基づくから，ここで時点2の実質所得上昇というときには，尺度Iを用いての判断である。しかし，注意すべきは，この場合に，尺度Iを用いて判定したとき，時点2の実質所得が増加したと言っても，これは，点 x_2 が尺度Iの上で点 x_1 よりも上位にあるという意味ではない。本文に記したように，消費者は，時点2において，尺度Iについて点 x_1 よりも上位の点を選ぶこともできる，というに過ぎない。先ず生計費の下落を考え，次にこれで修正した実質所得の増加を考える方法では，この場合の，実質所得上昇の意味を，十分明かにすることはできない。

大川博士が，生計費指数に対して，数量指数を計算するための，便宜的手段以上の意味を認めて居られないのは，(大川一司，前掲書，p. 8) おそらく，従来の生計費指数論の，このような不明確さによるのであろう。そのため，大川博士は，生活水準の変化を判定するための手段として，専ら，数量指数を用いて居られるが，従来の生計費指数論も，本文に記したように再構成して，選択尺度の上での上下関係に注目すれば，生活水準の変化を判定する上に，数量指数と並んで有力な手段とすることができる。2つの指数は，そのうちのどちらが優れているかという関係にあるものではなく，生活水準の変化を判定するためには，2つの指数の力を借りなければならない。このことは，以下の本文の叙述から明かになると思う。

だし，さきの生計費指数論の場合には，尺度Iを用いて考えたが，今度は尺度 II による判定である。このようにして，$(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$ ならば，尺度 II に照して，時点2における消費者の地位は，現実において向上している[3]。

生計費指数による判定と，数量指数による判定とを合わせて次の結果を得る。

$(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$ ならば，消費者は，時点2において，尺度Iについて点 x_1 よりも上位の点を選ぶことができる。しかし，現実に選択された点 x_2 が，尺度Iについて点 x_1 より上位にあるか，否かは，断言できない。しかし，尺度IIについては，確かに，点 x_2 は点 x_1 よりも上位にある[4]。

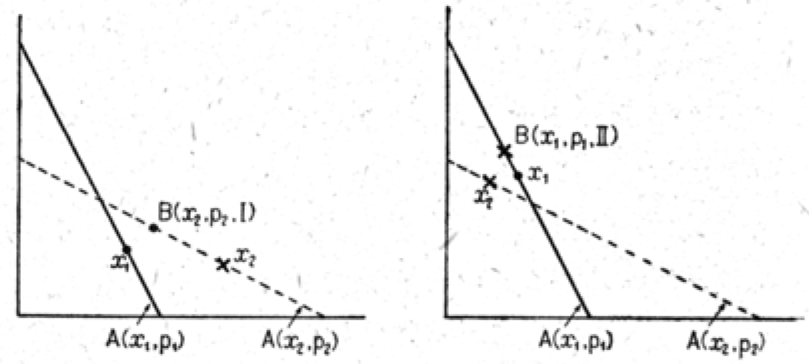
ここで，時点の添字1と2，尺度 I と II とを入れかえると，次の結果を得る。

$(p_1\ x_1)>(p_1\ x_1)$ ならば，消費者は，時点1において，尺度 II の上で点 x_2 よりも上位の点を選ぶこともできた。しかし，実際に選択された点 x_1 が，尺度IIについて点 x_2 よりも上位にあるか，否かは，断言できない。しかし，尺度Iについては，明かに，点 x_1 は点 x_2 よりも上位にある。

III

以上に得た結論を，起り得べき4つの場合に適用すると，次のようになる[5]。

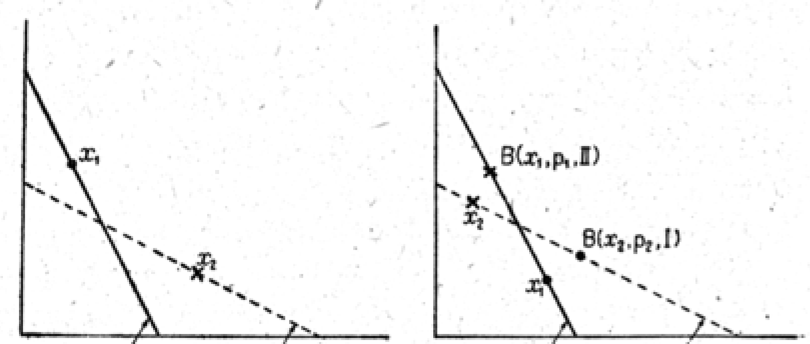
(1) $(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$，$(p_1 x_2)>(p_1\ x_1)$ (第2図) 点 x_1 と点 x_2 の上下関係は，尺度 I については不明。しかし，消費者は，時点2で，尺度Iについて点 x_1 より上位の点を選ぶことができる。尺度 II については，点 x_2 が点 x_1 よりも上位。従って，時点2における生活水準は，尺度 I については，可能性において，尺度 II については，現実に，上昇した。



第 2，3 図

(2) $(p_2\ x_2)<(p_2\ x_1)$，$(p_1\ x_2)<(p_1\ x_1)$ (第3図) 尺度 I については，点 x_1 が上位。尺度 II については不明であるが，時点1において，消費者は，尺度 II に関して点 x_2 よりも上位の点を選ぶことができる。時点2における生活水準は，尺度Iについては，現実において，尺度 II については，可能性において，下降した。

(3) $(p_2\ x_2)<(p_2\ x_1)$，$(p_1\ x_2)>(p_1\ x_1)$ (第4図) いずれの尺度についても，点 x_1, x_2 の上下関係は不明。



第 4，5 図

(4) $(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$，$(p_1\ x_2)<(p_1\ x_1)$ (第5図)[6]

3) 大川博士は，その数量指数の理論において，次のような論法を用いて居られる。(大川一司，前掲書，p. 4) 選択尺度 II が無差別曲面体系として表わされるとき，点 x_1 を通る無差別曲面を考え，この無差別曲面の切平面のうち，方向余弦が p_2 に比例するものの切点を x' とするとき，真の数量指数$=(p_2\ x_2)/(p_2\ x')>(p_2\ x_2)/(p_2\ x_1)$ であるから，$(p_2\ x_2)>(p_2\ x_1)$ のとき，尺度 II を用いて判定した実質所得は，時点2の方が高い。(この説明は，大川博士が上掲書で述べて居られる所と，厳密には一致しないが，時点1,2を入れかえただけで，本質的には違いはない。)

しかし，生計費指数の場合と同じように，数量指数の理論においても，選択尺度が偏微分可能な無差別曲面の体系として表現され，従って，価格 p_2 の下で点 x_1 と無差別な数量 x' が存在する，という前提は不必要である。

4) 選択尺度が両時点で同じならば，点 $B(x_2,\ p_2,\ \mathrm{I})$ と点 $B(x_2, p_2, \mathrm{II})=x_2$ とは一致する。消費者は，時点2で，点 $B(x_2, p_2, \mathrm{I})$ を選択することができるだけでなく，実際に，この点を選択する。従って，生計費指数による判定により，点 x_2 は，尺度 I の上で，点 x_1 よりも上位にある。また，前提により，2つの尺度は同じであるから，このことは，数量指数による判定により，点 x_2 が，尺度 II の上で，点 x_1 よりも上位にあることと一致する。このように，生計費指数による判定と数量指数による判定とが一致するのは，2つの尺度が同じである場合に限られる。選択尺度 I と II とが違う場合には，2つの指数による判定の意味は違う。

5) これら4つの場合は，Hicks, *A Revision of Demand Theory*, 1956, p. 49 における区別と一致する。第2図から第5図までは，Hicks の本の p. 48, Fig. 4 に合わせて描いた。ただ，Hicks では，選択尺度が不変とされている点が違う。

6) 2つの時点で，選択尺度が同じならば，$(p_2 x_2)>(p_2 x_1)$ で，且つ，$(p_1 x_1)>(p_1 x_2)$ ということはあり得ない。何となれば，同一の尺度について，第1の不等式から，点 x_2 が点 x_1 より上位にあることが結

尺度 I については，点 x_1 が上位。尺度 II については，逆に点 x_2 が上位。又，時点1で，消費者は，尺度 II について，点 x_2 よりも上位にある点を選び得る。逆に，時点2では，尺度 I について，点 x_1 よりも上位の点を選び得る[7]。

生活水準は，尺度 I によれば，可能性においては，時点2が高いが，現実には低い。尺度 II によれば，現実には，時点2が高く，可能性においては，低い。現実における動きだけでなく，可能性における変化をも考えると，いずれの尺度を用いても，生活水準の変化を，上昇とも下降とも言うことはできない[8]。

このように，各種の場合について，生計費指数で用いられてきた考え方と，数量指数で使われている方法とを，同時に用いるならば，そのうちの一方だけに頼る場合よりも，生活水準の変化についての判定が，視野の広いものになる。2 つの見方は，互に他を排斥するものではなく，消費者選択の理論に基づいて，互に協力すべきものである[9]。そのとき，上記の 4 つの場合のうち，第4の場合については，第3の場合と同じように，判定不能となる。

論され，第2の不等式から，その逆が結論されるから。従って，これら2つの不等式が成立するときは，選択尺度が変化したことを断言できる。他の場合には，尺度が変ったかも知れないが，それを断定することはできない。(Hicks, 前掲論文, p. 112, Hicks, *A Revision*, p. 50, Allen, 前掲論文, p. 200) ただ，Hicks, Allen は，選択尺度の不変を前提しているから，上記の 2 つの不等式が同時に成立する場合は，前提条件に反するとして，詳しくは論じていない。又，Allen は，生計費指数の場合には，尺度が変化することを許し，数量指数の場合には，尺度を不変としながら，色々の場合を分けて，2 つの指数の動きの関係を論じている。しかし，2 つの指数における前提条件が違うとすれば，両者を並列して，そのような議論をすることは許されない。(Allen, 前掲論文 p. 201)

7) これを詳しく言えば，次のようになる。消費者は，時点2において，尺度 I の上で点 x_1 よりも上位の点 $B(x_2, p_2, \mathrm{I})$ を選ぶことができたのに，尺度が I から II へ変ったために，尺度 I については，かえって点 x_1 よりも下位にある点 x_2 を選んだ。しかし，この点 x_2 は，尺度 II については，点 x_1 よりも上位にある。又，消費者は，時点1において，尺度 II の上で点 x_2 よりも上位にある点 $B(x_1, p_1, \mathrm{II})$ を選ぶこともできたのに，実際の尺度が I であるため，これを捨てて，点 x_1 を選んだ。

これを，日常の言葉で言えば，次のようになる。古い見方 (尺度 I) からすれば，現在 (時点 2) では，昔 (時点 1) の状態 (点 x_1) よりも良い暮し (点 $B(x_2, p_2, \mathrm{I})$) ができるのに，そうせずに，古い見方 (尺度 I) からすれば，かえって悪い状態 (点 x_2) に安住している。しかし，新しい見方 (尺度 II) からすれば，現在の方 (点 x_2) が，昔 (点 x_1) よりも良いと思っている。早くから頭をきりかえていれば (尺度 II によれば)，昔のような生活 (点 x_1) は，とっくに改めて，別の生活 (点$B(x_1, p_1, \mathrm{II})$) をしたであろう。その昔 (時点 1 において)，今の考方 (尺度 II) からすれば，今の状態 (点 x_2) よりも良い生活 (点 $B(x_1, p_1, \mathrm{II})$) をしようと思えばできたのに，そうせずにいた (点 x_1 を選んだ) のは，昔は昔で，その時の考え方 (尺度 I) に従って行動した為である。昔は昔で良く，今は今で，又よろしい。逆に，今の考からすれば，昔は馬鹿なことをしたものだし，昔の考からすれば，今が愚かしく思われることだろう。

8) この場合，数量指数だけを考えれば，現実において，尺度 I については，時点 2 が低く，尺度 II については，逆に時点 2 が高い，と言うだけですむ。(大川一司，前掲論文，p. 87. 同，前掲書 p. 12) しかし，生計費指数による可能性ににおける変化を考えると，いずれの尺度についても，数量指数による判断と反対の結果が出る。両指数を合わせて考えると，判定困難というより外に道がない。

本文の第 4 の場合について，長々と述べたのは，この場合が重要だからではない。ただこのような場合には，生活水準の変化について，判定不能となることを明かにするためである。

9) 実際の計算の手続としては，大川博士の言われるように，一方では，生計費指数のラスパイレス式 $(p_2 x_1)/(p_1 x_1)$ で支出金額指数 $(p_2 x_2)/(p_1 x_1)$ を割って，$(p_2 x_2)/(p_2 x_1)$ を計算し，他方では，生計費指数のパーシェ式 $(p_2 x_2)/(p_1 x_2)$ で，支出金額指数を割って，$(p_1 x_2)/(p_1 x_1)$ を出す。(大川一司，前掲書，p. 8) ここに得た 2 つの値は，数量指数のパーシェ式及びラスパイレス式であり，これらが 1 より大であるか否かによって，さきに挙げた 4 つの場合が区別される。そして，これらの各種の場合について，生計費指数論的な考え方による判定と，数量指数論的な考え方による判定とが下される。それは，生計費指数の指数値による判断，又は，数量指数の指数値による判断とは違う。生活水準の変化を測定するために，生活費指数と数量指数の 2 つの指数を用いる，とは言わずに，2 つの指数論における考え方を用いることが必要であるというのは，この理由による。これら 2 つの考え方は，第 1 の考え方・第 2 の考え方として区別した方が適当かも知れないが，従来の生計費指数論と数量指数論との関係を明かにするために，このような表現を用いた。