レオンチエフ行列におけるデータ誤差の影響について

林　知己夫

1 序　論

投入・産出分析におけるレオンチエフの考え方については今更喋々する迄もないが統計をつくる觀點，これを實際に應用すると言う觀點からみるときに相當に問題になる點があると思われる。

レオンチエフの考え方には，方法論的には操作的な面が多くよみとれ，統計にたずさわるものからみるとき，多くの經濟分析の手法のうち，とくにこれに興味をひかれるところが多いのである。理論構成の概念と實際に統計をとるときの分類基準とが卽物的に客觀的に對應がついて始めて役に立つ理論と統計とが出來てゆくものと考えられるからである。現實的には任意な解釋の餘地をのこすような構成概念は統計と言う點からみると面白くないのである。

投入産出分析においても，よくセクターの分類の仕方（アグレゲーションの問題を含む），その個數，各セクターの中に入れるべき卽物的基準等々の作業があるがこれらはいずれも實態論的に考えるべきではなく，「何のためにこの分析を用いるのであるか」を明らかにして，それに最も適合した所のものを實際的に考えてゆくべきであって，操作的なものとして考えるべきものと思われる。つまり以上のことは相對的意味をもつものであって，目的を變えるならば當然變えられるべきものであり常に妥當な意味を與え得るような彈力性あるものと解すべきであろう。「我々が考え行爲したそのプロセスの枠の限りにおいて解釋して用いてゆく」ことが大切になるのである[1]。

それではこれは何の目的に用いらるべきものであろうか。これに關する議論はいろいろあり今ここに論ずる餘裕はないが，少くとも大局的にみた構造分析と言う觀點は無視さるべきではなく，相互關聯性のあり方を把握して，これを手掛りに經濟行動の分析，經濟豫測の問題を考えるべきであろうと思う。大きく網をうつと同時に經濟行動間の關聯性を大局的に把握すると言う點が大切であろうと考えられる。しかしこれは何と言っても大づかみなものであるので，分析の第一次近以として考えるべきであって，何を目的にするにしてもこれのみですべて解決されるものではなく，これをもとにして，さらに突込んだ經濟活動單位の行動分析，動向分析が必要となろう[2]。

さて投入産出分析のためマトリックスをつくり，これにいろいろ計算をほどこすことになるわけであるが，この計算はなかなか容易なものではない。場合によっては莫大な計算量を必要とすることにもなるのである。したがって直に計算を實施する前に，この計算は實際意味があるか否かまたどんな意味をもつのであるかが十分檢討されることが肝要なことになってくるのである。計算の努力と效果が釣合はなければ事は始められないのである。その時まず第一に問題となるのはデータに誤差はないかと言うことである。あのように分類されるデータを正確に得るためには別建の精密な調査を必要とするのであるが，そうでないかぎり（既存のデータを用いこれから數字を編みだそうとする限り），かなりな腰だめ的な數字になる恐れがある。「腰だめ」ではなく推理がある，それにしたがって數字を算出したのであると言う言もあるかもしれないが，これはなかなか困難な所であり，客觀性に乏しく，ある立場から辻褄を合せると言うことになり，正確な數字とは言い難いものとなっていることであろう。これが現實に投入産出のマトリックスをつくった時の狀況であろう。それではデータにどの位の不正確さがあればそれ以後の分析にどの位の誤差を及ぼすものであろうかが考えられてこなくてはならない。もとのデータのわずかな誤差も計算や分析を加えてゆくうちに積ってきて，最後には非常に大きな誤差となってくると言うのであってはレオンチエフによる分析方式は現實的な意味を減じて了うであろう。こうであるならば，もとのデータにもし誤差があればもうそれ以上分析することも無駄なことになって了うであろう。したがってこの問題は十分とりあげられ，檢討を加えられねばならぬ問題であると言え

1) 當然の事ながらこれを忘れた議論も多いのである。

2) 最終需要を與えて總産出額を求める等の問題ではあまり實際的に有效なモデルではない場合が多いのではないかと思われる（附錄參照）

る。従ってここではこの問題をとりあげ，ある一面から検討を加えてみることにしよう。

その前にこのマトリックスにほどこすべき計算の問題について少しく述べておこう。これもデータの誤差の問題と關連しているからである。我々が究極の精度を問題にするときには，當然次の二つのもの，即ちもとのデータの誤差の影響，計算誤差の問題，を考えてこなくてはならないのである。後者は通常の簡單なものにあっては殆ど不問に附し得る問題なのであるが，大きなレオンチエフ・マトリックスをあつかうにあっては非常に大事なことになってくるのである。

2　レオンチエフ・マトリックスの計算について，特に逆行列を求めることについて

レオンチエフ・マトリックスにおいて特に大切で基本的なのはその行列の逆轉である。いまこれについて述べてみよう。この逆行列を求めることはその元の數が大きくなるとき[3]は容易なものでなく，元が 30 を超えるときは一般の電動・手動計算機を以てしてはまず不可能に近いのである。これは計算のプロセスが大になるのと，計算中途において計算の桁數を大にしないと結果で所要の精度を得ることが出來なくなる點においてである。

逆行列の求め方にはいろいろなものがあるが，どれが優ると言うことは一概には言えない。しかし用いる計算機械の種類（手動電動，リレー式，*I·B·M*（*R·R*）式，電子式等々）に應じて各適合した方法を用いるのがよいのである。

以下によく用いられる計算法について書いてみよう。計算には通常消去法が用いられるがこれには桁數をかなりよけいにとる必要がおこる。この消去法には通常次の形のものがとられる。

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 1 \cdots & \\ O & & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & \\ & -1 & O \\ & & \ddots \\ O & & -1 \end{matrix} & O \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} * & ** \\ \hline O & A^{-1} \end{array}\right)$$

左下の行列を O にする樣に上段の最初から順次に一つづつ要素を消去してゆくと右下に A^{-1} が得られると言う方法である。

なほマトリックスの元數と結果の所要桁數と途中計算に必要な桁數との關係を示すノイマンの式があるので參考のため示しておこう。

3）手數は元の數の三乘の order のものと考えてよい。

計算途中に用いられる數 x は

$x=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\beta^{-i}$，：$\varepsilon=\pm1$，$x$ を β 進法であらわすことを示す，s は桁數；

とあらわされるとする。なお計算の途中では $2^{\pm q}$ なる scale factor を乘じ小數點の移動を行うものとする。有效數字 s 桁の意味である。このとき最初に與えられるマトリックスには誤差はないものとしておく。

この場合行列が正値のときもとの行列と有效數字 s 桁とって計算し，これによって求めた逆行列との積と單位行列との差のノルム[4]は $1500n^4\beta^{-s}$ より小となる。行列が正値でないときは $3600n^4\beta^{-s}$ より小となる。ここに n は行列の元の數（rank）をあらわすものとする。ノルムの意味に實際的意味をつけ難いので，明確な結論とは言えないが一つの目安を與えることにはなろう。勿論これは非常に一般的な條件の下での結論なので，さらにマトリックスの特殊條件を加えるならば精密化し得ることであろう。

これによると元の數が多いと大變な桁數を必要とするのであるがレオンチエフ・マトリックスの場合その特殊構造——詳しくは他の論文參照—によるものか實際に計算を實行してみると，途中の計算にそれほど桁數を必要としないようである。9 元の場合[5]について（この行列を A とする）みると少數點以下 11 桁をとり 10 桁にまるめて計算を實行して——もとのデータは少數點以下10桁までとる——結果をもとめ，これを $\bar{A}^{-1}$ として，$A\bar{A}^{-1}$ をもとめると，少數點以下 10 桁目において次頁上欄の樣な誤差を生じたに過ぎなかった。

これによってみるとレオンチエフ・マトリックスの逆行列の計算では途中の計算に用いた桁數からそう精度桁數は飛ばぬのではないかと思われる。[6] しかしこれは證明せられたわけではないので今後その行列の特殊性を用い證明しなければならぬ問題であろう。

上述の消去法の代りに次のような方法を用いることもある。もとのマトリックスを

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array}\right)$$ と考え

4）このときノルムは $\max|A\xi|$，$|\xi|=1$，A はマトリックス，ξ はベクトル，$|\xi|$ はベクトルのノルム，によってあらわされる。

5）經濟企畫廳のデータ。

6）通產省の 20 元の逆行列（602 *A* 使用）を求めた場合また外國の計算例でもそう桁數の飛ばぬことが報告せられている。

$$\begin{pmatrix}
1.0\cdots0 & 0.0\cdots2 & 0.0\cdots4 & -0.0\cdots2 & -0.0\cdots1 & -0.\ \cdots4 & -0.\ \cdots1 & -0.0\cdots2 & 0.0\cdots0 \\
-0.\ \cdots4 & 0.9\cdots6 & -0.0\cdots2 & 0.0\cdots3 & 0.\ \cdots0 & -0.\ \cdots1 & 0.\ \cdots1 & -0.0\cdots2 & 0.0\cdots4 \\
0.0\cdots2 & -0.0\cdots4 & 1.0\cdots5 & 0.0\cdots3 & -0.\ \cdots1 & 0.\ \cdots3 & -0.\ \cdots2 & 0.0\cdots1 & -0.\ \cdots3 \\
-0.0\cdots1 & -0.0\cdots3 & 0.\ \cdots0 & 1.0\cdots4 & 0.\ \cdots0 & 0.0\cdots3 & 0.\ \cdots0 & 0.0\cdots0 & 0.\ \cdots7 \\
0.0\cdots5 & 0.0\cdots0 & -0.0\cdots2 & -0.0\cdots4 & 1.0\cdots0 & 0.0\cdots4 & 0.\ \cdots3 & 0.0\cdots0 & 0.\ \cdots5 \\
-0.0\cdots1 & 0.0\cdots1 & 0.\ \cdots2 & 0.\ \cdots2 & -0.\ \cdots1 & 0.99\cdots98 & 0.\ \cdots3 & 0.0\cdots0 & -0.\ \cdots1 \\
0.0\cdots6 & -0.0\cdots2 & 0.\ \cdots0 & 0.\ \cdots2 & -0.\ \cdots1 & 0.\ \cdots0 & 1.\ \cdots7 & 0.0\cdots1 & 0.\ \cdots1 \\
-0.0\cdots1 & 0.0\cdots5 & 0.0\cdots2 & -0.\ \cdots4 & -0.\ \cdots1 & 0.\ \cdots3 & -0.0\cdots4 & 0.99\cdots95 & 0.\ \cdots3 \\
0.0\cdots5 & -0.0\cdots5 & 0.0\cdots0 & 0.\ \cdots2 & 0.\ \cdots0 & -0.\ \cdots1 & -0.\ \cdots2 & 0.0\cdots4 & 1.0\cdots1
\end{pmatrix}$$

逆マトリックス $\left(\begin{array}{c|c} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \hline \beta_{21} & \beta_{22} \end{array}\right)$ を乗じ

結果を $\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{matrix} & O \\ \hline O & \begin{matrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$ となるように考えて

β を求めるのである。

$$\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}=(O)$$

$$\alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}=(O)$$

$$\alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

から，α_{11}^{-1}，$(\alpha_{22}-\alpha_{21}\,\alpha_{11}^{-1}\,\alpha_{12})^{-1}$ を求めることにより容易に β を求めうる。よいところは小さな元をもつマトリックスの逆（上述のもの）を求めてあとは乗算のみですむ事，計算操作が分割でき，多人數で同時に計算できることである。上述のものだけでなく (α), (β) のわけ分（行列の配列變え，わける仕方，わける個數等）もいろいろ工夫してゆくと興味あるものがみちびかれる。

次によく用いられる反復法がある。今更かくまでもないが次の形になる。

$I-B=A$（I は單位行列）と考え A^{-1} を求めるのに，$I-A=Do$ と考え

第一次近似として $C_1=I+Do$ 次に $I-AC_1=D_1$ を求め $C_2=C_1+C_1D_1$ と第二近以を出す，これを繰返してゆくのであるがこれは $C_1=I+A$, $C_2=(I+A)(I+A^2)$, $C_3=(I+A)(I+A^2)(I+A^4)$, ………… を求めることになる。實際にこの近以 C のステップでゆくと9元の場合の逆轉を求めると[7]第5近似で前に示した消去法と同じ程度の精度を得ることが出來た[8]。

その他特殊連立方程式解法機を用いての方法がある。これは統計數理研究所長佐々木達治郎氏の考案・作成になるもので，釣合いを利用して一擧にすべての答を求めようとするもので甚だ興味の深いものである。これを用いるとき4回の近似操作で極めて滿足すべき結果を得た。つまり四回機械を操作することによって結果を得たのである（一回の操作によって一つの近似を得ることが出來る，この操作は極めて容易である）。

以上のべた事をまとめてみると，マトリックスの元の數が多いときは計算は極めて大變なもので正攻法によれば元の數が200ともなれば大掛りな電子計算機を巧妙に運用しなければ不可能であること，從って，計算の現實を考えなければ抽象的にモデルを考えても意味のないこと，計算の桁數はそう必要としなそうなこと（ノイマンの計算よりずっと少くてすみそうなこと），である。このとき所要桁數を形式的にのみ考えず，データの誤差とにらみ合せ，出來るだけ少くすることも忘れてはならない。以上は逆行列の計算丈であるがこの他いろいろな計算が考えられるであろう。例えば解を求めるについて，巧妙な考えを用い，輕易に（卓上計算機程度を用いる程度）近以的に計算することが香川大學の木村等氏によって發表せられている[9]。

さて計算にこれだけの手間をかける效用があるか否かを考えてみる必要がある。レオンチエフの投入産出分析でセクターの數をどうするかはその使い方に應じてことなるのであるが，セクターが多いと計算が極めて大變なことになるのでこの點も考えなくてはならない。操作的に考えて，必要のないセクターはどしどしアグレゲート

7) 經濟企畫廳のデータ

8) この時の計算操作の回數は連續加算裝置のついているものを用いると乘算 $(2k-2)\}n(n+1)^2\}$，加減算 $(2k-2)\{2(n+1)\}+k(n+1)^2$ となる。但し n は次元の數 k は反復の回數である。

9) H. Kimura, "An Approximation Method in Numerical Computation of the Leontief's Open Input-Output Model", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, vol. VII, 1956.

して計算を容易にしなくてはならない。またレォンチエフ・モデルの利用（效用）限界と計算の面倒さとも勘案しなくてはならない。

次にデータの誤差の問題も考えなくてはならない。もとのデータの誤差が計算結果に大きい影響を與えるようであっては，面倒な計算を行っても意味がなくなる。セクターの數をませば，それに應じてデータの誤差が多くなることも考えられてくる。そこでデータの誤差と計算の手間とも勘案しなければならなくなる。以上の點を考え，ここではデータの誤差の問題のみをとりあげて檢討を加えてみることにしよう。

3　データ誤差の影響について，（その 1）

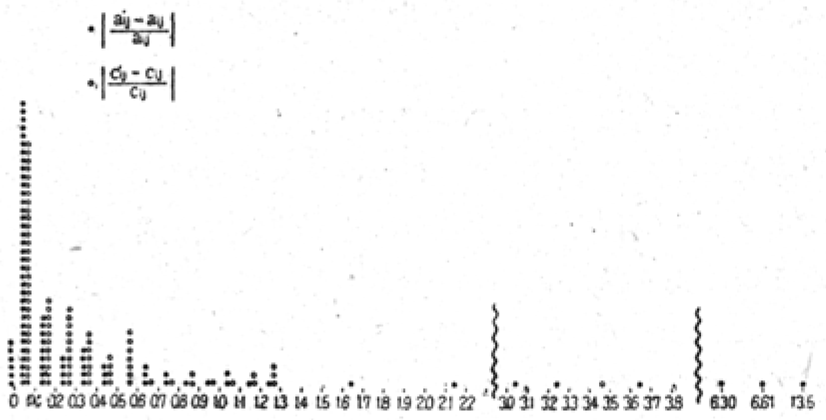
まづ9元のデータについて實際に計算した結果からしらべてみよう。この時非常に幸なことがあった。經濟企畫廳が第一次の試算で一つのマトリックスをつくり，また第二次の試算でそれとはことなったマトリックスをつくつたのである。この二つはかなりくいちがいがあったので興味ある結果が得られた。二つの異ったマトリックスの逆行列を求めてみて，さいしよの行列の差と求め得た二つの逆行列の間の差の關係をしらべることが出來た。二つの行列を

$I-B=A,$

$I-B'=A',$

としよう。A は第一次，A' は第二次としておこう。この要素を夫々 a_{ij}, a_{ij}' とする。逆行列 A^{-1}, A'^{-1} の要素を夫々 c_{ij}, c_{ij}' とする。こうして

$m_{ij}=\dfrac{a_{ij}'-a_{ij}}{a_{ij}}$，$n_{ij}=\dfrac{c_{ij}'-c_{ij}}{c_{ij}}$　をつくりその絶對値をグラフに目もってみると次の様になった。



つまりもとのデータのちがいと逆行列のちがいとをみるとむしろ後者の方が少な目に出ていることが見られた。

$|m_{ij}|$ の平均は0.70，$|n_{ij}|$ の平均は0.35

$$\frac{\Sigma|n_{ij}|}{\Sigma|m_{ij}|}=0.50$$

となり，この意味ではくいちがいは減少しているかに見えた。

この示すところはもとのもとのマトリックスに誤差があったときに，逆マトリックスをつくった場合當然誤差が現れるが，この誤差の程度はもとのマトリックスの誤差にくらべてそう擴大されてあらはれてこないのではないかとの豫測である。むしろ相對誤差の意味では減じてくるのではないかとさえ思はせるものがあるのである。この豫測には意を强くするものがあった。

意圖的に，もとのマトリックスに誤差を與えて逆マトリックスの誤差の關係をいろいろこころみたが上記の結果と大差のないものが得られた。

次にこれに理論的檢討を加えてみることにした。

4　データの誤差の影響について（その 2）

ここではもとのマトリックスにおける誤差が逆マトリックスにどう表れてくるかを理論的に考えてみよう。これがマトリックスの元の數とどう關係づけられてくるかに興味が持たれる。

(i)　まず行列のノルムを用いて行う評價をみよう。行列をAとすると A のノルム $|A|$ は次の性質を滿足するものを言う。ベクトルのノルムの擴張である。

$|A|\geqq 0$，$|0|=0$，$|A|=0$ ならば必ず $A=0$

$|aA|=|a|\cdot|A|$　a は常數，$|a|$ は a の絶對値

$|A+B|\leqq|A|+|B|$

$|AB|\leqq|A|\cdot|B|$

$|I|=1$　I は單位行列

この一つとして次のようなものを考えておこう。A は n 次の正方行列としておく。

$$|A|=Max\frac{|AX|}{|X|},\quad |AX|,\quad |X| \text{ は } n \text{ 次元}$$

ベクトル空間中のノルムであり，$|X|$ としては次のものをとるとしておく，$|X|=Max\{|X_1|,\ |X_2|,\ \cdots\cdots\cdots|X_n|\}$，$X_i$ はベクトル X の要素で $|X_i|$ はその絶對値をあらわす。

さて A が眞のマトリックスとし誤差を E とすると $A+E=A'$ が誤差をもつマトリックスとなる。$A'^{-1}=A^{-1}+E'$

E' が逆マトリックスの誤差となる。

$(A+E)(A^{-1}+E')=I$ から second order を無視すれば $E'=-A^{-1}EA^{-1}$ となり

$|E'|\leqq|A^{-1}|^2|E|$ となる。

また　$|E'|\geqq\dfrac{|E|}{|A|\,|A+E|}\sim\dfrac{|E|}{|A|^2}$

を得る。また $E=cA$ c は常數，$c<1$ とすれば，

$$|E'|\leqq|A^{-1}|\left(1+\frac{1}{1-c}\right)$$

となる。これに實際のデータを投入してみるにその評價は甘く實際につかいものにならぬ程度のものである。以上の様なノルムによる評價は大體の傾向をみるものであって評價にはつかっても効果がうすいであろう[10]。

このノルムの別の形として Y. K. Wrong が "Quasi-inverse associated with Minkowski-Leontieff Matrices", *Econometrica*, 1954, vol 22, 33 にのべているがいまは觸れないことにしよう。

(ii)　數量的評價

Evans がその評價を行っているが一つの行に誤差のある場合をとりあつかっているのでここでは少しく形を變えて論じてみよう。前の記號を用いて考えをすすめる。

$$E'=-A^{-1}EA^{-1}$$

をもとにして考える。E の要素を da_{ij} と示し E' のそれを dc_{ij} としておこう。なほ A, A^{-1} の要素を夫々 a_{ij}, c_{ij} としておく。　da_{ij}, dc_{ij} はその變化と言う意味である。

こうすると ($d_{ij}=dc_{ij}$ とおく)

$$d_{ij}=dc_{ij}=-\sum_k\sum_l C_{ik}C_{lj}\,da_{kl}$$

となる。なほ一つの a_{js} を變化させたとき a_{rs} の他の要素に影響を及ぼすときには一般的に

$$dc_{ij}=-\sum_k\sum_l C_{ik}C_{lj}\left(\sum_r\sum_s\frac{\partial a_{kl}}{\partial a_{rs}}da_{rs}\right)$$

とかく事が出來る。

もしも $da_{kl}=\varepsilon_{kl}\,a_{kl}$ とするならば

$$d_{ij}=-\sum_k\sum_l(C_{ik}\,C_{lj}\,a_{kl})\varepsilon_{kl}$$

ここで ε_{kl} は確率變數であると假定し $E(\varepsilon_{kl})=0$, $E(\varepsilon_{kl}^2)=(C.V.)^2$, ($k, l$ に無關係) 且つ ε_{kl} はすべて統計的に獨立[11], として近似的に話をすすめてみよう。なほ $E(X)$ は確率變數 X の期待値をあらわすものとしよう。

このような假定の下に話をすすめることの當否は當然考えられねばならぬところのものではあるが，この確率變數的な考えは目安を與える上に大きな見透しを與えることであろう。

ここで C_{ij} は與えられているものとし，新しい最終需要 Y_j を與えて新しい總產出額を求める場合について考えてみよう。勿論このモデルの妥當性は得られているものとし，ただ C_{ij} の誤差だけを問題にしてみよう。新しい i 部門の總產出額を X_i とする。

$$X_i=\sum_j C_{ij}\,Y_j$$

によってもとめられる。C_{ij} が dc_{ij} だけ變化したとき總產出額の誤差を dX_i とおくと

$$dX_i=\sum_j d_{ij}\,Y_j{}^{12)}$$

となる。ここで $(dX_i)^2$ の期待値をとると，c_{ij} の變化による X_i の分散 σ_{xi}^2 が求められる。なほ $E(dX_i)=0$ で偏りがないのは明らかである。

$$\sigma_{xi}^2=E(dX_i)^2=E(\sum_j d_{ij}\,Y_j)^2$$

ここで近似的に $Y_j=\bar{Y}$, $c_{ij}=\bar{C}$, $a_{kl}=\bar{a}$ とおくと[13],
(X_i の代りに平均的のものとして),

$$\sigma_x^2=\bar{Y}^2\,\bar{C}^4\bar{a}^2n^2E(\sum_k\sum_l\varepsilon_{kl})^2$$

$$=\bar{Y}^2\,\bar{C}^4\,\bar{a}^2\,n^4(C.V.)^2,\quad \text{ここに } n \text{ は元數}$$

$$\sigma_x=\bar{Y}\,\bar{C}^2\,\bar{a}\,n^2(C.V.)$$

X_i の相對的な誤差は

$$X_i=\sum_j C_{ij}\,Y_j\fallingdotseq\bar{Y}\,\bar{C}\,n=X,$$

となるから

$$\frac{\sigma_x}{X}=\frac{\bar{Y}\,\bar{C}^2\,\bar{a}\,n^2}{\bar{Y}\,\bar{C}\,n}(C.V.)=\bar{C}\,\bar{a}\,n(C.V.)$$

となる。なほ一般に $\bar{C}<1$ であり $\bar{a}$ は $\frac{1}{n}$ の order のものと考えてよいのであるから ($\bar{C}$ も $\frac{1}{n}$ の order と考えてよい) 相對誤差は (C. V.) の order より小になると考えてよい。つまり $\frac{\sigma_x}{X}\sim\bar{C}\cdot(C.V.)$ となる。また n と共に増大しないと考えてよいであろう。もとのマトリックスの元の數が増大しても相對誤差が n に應じて増してこないことに興味深いものがあるのである。さいしょのマトリックスの誤差 (C. V.) の order がそのまま出てきているのはないのである。また逆行列の要素 (d_{ij}) の分散を求めてみると

$$E(d_{ij})^2=\bar{C}^4\,\bar{a}^2\,n^2(C.\ V.)^2,$$

となり，相對誤差として

$$\frac{\sqrt{E(d_{ij})^2}}{\bar{C}}=\bar{C}\,\bar{a}\,n\ (C.\ V.)$$

---

10)　數學における測度（ノルム等）は現實的メトリックとしてよりもむしろ收斂等を證明する道具として用いるものであってこの點よく考えねばならない。

11)　ε_{kl} 間では負の相關をもつと考えられるものもあるし，正の相關をもつと考えられるものもあるので平均化して考え第一次近似的には獨立と考えて話をすすめてみる。

12)　$$dX_i=\sum_j d_{ij}\,Y_j=\sum_k\sum_l\sum_j C_{ik}\,C_{lj}\,da_{kl}\,Y_j$$
$$=\sum_k\sum_l C_{ik}\,da_{kl}\cdot X_l$$

前の a_{kl} をつくったときの (k,l) 分割のデータを x_{kl}, 誤差を x'_{kl} $\sum_l x_{kl}=x_k$ とおくと

$$dX_i=\sum_k C_{ik}\left(\sum_l\frac{X_l}{x_l}x'_{kl}\right)$$

となる。これを dX_i の評價に用うることもできる。

13)　Y, a, c 間の關係を求めてみると互に關連性はなく（因に X と a との相關係數を前述の例で求めてみると $\rho=-0.07$ である）次の近似はそう無理ではない。

が得られる。これに對しても前と同樣に結論づけることが出來る14)。

以上は全く平均的に論じたのであるが，元の數と共に上述の樣な計算ではもとのマトリックスの誤差が累加せられてこないと言う所が面白いのである。$\bar{a}$ の order が $\frac{1}{n}$ と言う所に要點があるのである。

したがって最初のマトリックスの誤差，上述の $(C. V.)$ が小さくなるように心がけておけば結果は元の數 n に問題なくしかるべき精度を得るであろうと言う大局的な見透しが得られたものと考えてよいのである。したがってセクターの分割にあたっては $(C. V.)$ がある程度小さくなるようにしておけば全體的にはしかるべき結果が得られてくるものと考えてよかろう。

なほ以上の考え方，方針はさらに他の問題への應用がきく。つまり a_{ij} を變化させたとき，いかに結果が變るであろうか，この問題についての檢討を與えることが出來るであろう。これは問題に應じ一々 da_{ij} の order, Y_j の order を考えて精密に檢討しなければならない。これについては今後の硏究にまとう。

またある一つの a_{rs} の變化が他に影響を及ぼしてゆく場合，a_{rs} の變化と他の變化とが確率的であり相關をもつと言う場合，それのみでなく函數的な關係をもつ場合にあっても前述の式を用い同樣に議論を進めることができる。確率變數的な取扱いをせずとも da_{ij}, dc_{ij} をそのまゝにして，大小關係等を細目にわたって檢討することが可能となる。これについても別稿にゆずろう。

ここではただ大局的な見透しを示したまでである。

なほもとのデータの影響について考えるときは逆マトリックスを求める問題だけではないが，一應基本的なものであるからこれについて考えを進めたのであるが，他の問題もこれを基にして計算を遂行すればよい。

この論文を草するにあたって多くの人々に御世話になった。經濟企畫廳の吉植統計課長，藤澤大仁氏，統計數理研究所の僚友赤池弘次氏，田熊雅子，高倉節子，草野美惠子，菱山美知子，三枝八重子，中島綾子の諸嬢，しるして感謝の意を表するものである。

(附　錄)

最終需要を與えて，總產出額を出すことを考えよう。セクターは q に分けた場合を考えよう。昭和26年度にもとづいて a_{ij} がつくられそれをもとにして c_{ij} がつくられた。そこで昭和27年度の最終需要 Y_j を與えて總產出額 X_i を求めてみた。なほ昭和27年については總產出額の實績はわかっているのでこれと比較し相對誤差を求めることが出來る。これはこのモデルを他の年次へ適用できるか否かを示すものであり，デモルを用いての經濟の一つの豫測の可能性を示すことになる。次に比較のため單純に26年度の最終需要と27年度の最終需要の比を求め，これを26年度の總產出額に乘じて27年度の總產出額を豫測すると言う事（比例式と言う）を行ってみてこれと實績との相對差を求めてみた。この結果は次の通りになった。

	比例式	レォンチエフ式
農林水	6.0	8.2
鑛	−30.1	−4.8
建設	0.8	1.2
製造	7.9	7.1
商	3.2	4.9
運輸通信	−0.5	3.1
公益	1.2	4.1
サービス	9.4	13.3

數字は%を示す

鑛業においてはレォンチエフ式が著しくまさっているがあとは似たり寄ったりである。したがってこの程度の分類において，しかもこのような目的に對してはあまり有效な道具とは考えられないのである。努力と釣合はないと言う意味においてである。比例式の手なほし（問題のおこりそうなところを個別に檢討する）で十分かと思われるのである。

他の分類のものについてもこのような檢討は必要であろう。

このようなことは式の上で容易に豫想がつくのである。

レォンチエフ式：$\sum_j C_{ij}\, Y_j = X_i$

比例式：$\frac{Y_j}{Y_j'} = k_j$, Y_j' X_j' は前年度の値

$$k_i X_i' = \widetilde{X}_i \text{ による推定}$$

$$X_i - X_i' = \sum_j C_{ij}\, Y_j'(k_j - k_i)$$

となる。すべて $k_i = k_j$ ならば $X_i = X_i'$ となり誤差はない。また C_{ij} は一般には $i \neq j$ では十分小である。したがって k_i の一般的樣子で差 $X_i - X_i'$ が小となることも屢々考えられるのではなかろうか。k_i と k_j がはなはだしく異るときにはレォンチエフモデルをこのようなものに適用すること自身問題になることも忘れてはならぬ問題である。

レォンチエフの效用は他に求めらるべき問題であろう。

---

14) $\frac{\sigma_x}{X}$, $\frac{\sqrt{\Sigma(d_{ij})^2}}{\bar{C}}$ を大き目に見積っても $\bar{C}\,\bar{a}\,n^2\,(C. V.)$ を超えることはない。つまり $\sim \bar{C}\,n(C.V)$ の order を超えることはない。これは E_{kl} の相關が總分散が大になるように見積ったときのものである。