資本蓄積徑路の有效條件

——一つのダイナミック・プログラミング——

古　谷　　弘

はしがき
I　モデル——財ストックの轉形函數
II　インターテンポラルな有效點集合
III　資本ストックの有效蓄積徑路
IV　有效蓄積徑路の特質
V　レオンチエフ體系への應用についてのノート

は　し　が　き

ここで取扱われた問題はいくつかの關連領域をもっている。第一にそれはリニア・プログラミングないしアクティヴィティ・アナリシスの一つの意味における動學的延長である。「最適條件」や「有效性」の探求に大きなウエイトのおかれるこれらの方法が，生產におけるインターテンポラルな財の關連を意識的に取上げる時，何らかの形においてここでの問題との交渉は不可避的となるであろう。インターテンポラルな有效條件を取上げた本稿は，かくして一つのダイナミック・プログラミングの試みであるといえる。そしてこの有效性がパレート・マキシマムをもって規定される時，それはまた厚生經濟學の動學理論とかかわることともなろう。

次の連關は經濟成長の問題とである。マクロダイナミックス的モデル構成の下においてこの問題は內外の學問的興味の對象となったが，なおマクロスコープの制約に對する多くの不滿は，たとえばこれを產業連關モデルの中に組入れようとさせる。しかしここでは成果は決して意圖の如くにはならない。有意義な動學理論を投入產出分析において構成することは極めて困難であるからである。それでも仕事は進められなければならない。ここで筆者は一般化された投入產出モデルにおける資本蓄積の有效徑路の特質を探求した。そしてこの特質が經濟成長と深いかかわりをもっていることが明らかとなる。しかし「有效」徑路の成長であるところから見てこの動學的世界は，ポジティヴ（positive）であるよりノーマティヴ（normative）なものであろう。しかしとにかく資本蓄積徑路についての一つの理論であり，投入產出分析の一つの動學的展開である。

筆者がここにしきりに用いた「一つの」という限定詞は，いうまでもなく本稿の試論的性格を物語っている。

I.　モデル—財ストックの轉形函數

經濟全體についての生產期間を齊一のものと假定し，一生產期間を單位とする時間を t であらわす。第 t 期とは（$t-1$）と t との間の間隔をいう。$X(t-1)=\{x_1(t-1), x_2(t-1), \cdots\cdots, x_n(t-1)\}$ を第 t 期の期首に存在する社會の各財のストックとすると，これが投入量として生產過程において機能し，第 t 期の期末には，$Z(t)=X(t)+Y(t)=\{x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots, x_n(t)\}+\{y_1(t), y_2(t), \cdots\cdots, y_n(t)\}$ が產出量としてうみだされる。これもここではストック概念として把握されている[1)]。$Y(t)$

---

1)　投入產出モデルはレオンチエフにおいては周知のように財のストックではなくフローのダイメンションにおいて構成されている。$\{x_{ij}\}$ という投入量も $\{Xi\}$ という產出量も共にフローである。產業の activity を示す列ベクトル $\{1\ -a_{21}\ -a_{31} \cdots\cdots -a_{n1}\}$ 等もこの事實を背景とする。クープマンズが activity analysis においてこの概念を一般化した場合も activity $\{a_{1k}, a_{2k}, \cdots\cdots, a_{nk}\}$ は同樣にフロー概念である〔5〕。activity をストックで構成したのはノイマン〔10〕であり，ジョージスキュー・レーゲン〔3〕ダンチッヒ〔1〕などが繼承した。ストックとしての投入量を $\{a, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$，產出量を $\{b, b_2, \cdots\cdots, b_n\}$ とする時いわゆる線型生產過程は $\begin{pmatrix} a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \\ b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n \end{pmatrix}$ で示される。この時クープマンズ的フローの activity は $\{b_i-a_i\}$ に對應する。以下の本文ではストックの方を採用する

は最終消費を形成し，$X(t)$ は第 $(t+1)$ 期の投入量として働くために生産過程に再び回歸する。

ストック $X(t-1)$ が經濟體系に利用可能な技術を媒介として $Z(t)$ に結實する過程は「有效に」行われているとする。「有效に」行われるということは，ここでは $Z(t)$ がヴェクトルとしての極大，あるいはいわゆるパレート・マキシマムを滿たしていることを意味する。すなわち體系に利用可能な技術の下において $Z'\geq Z$ となるようないかなる Z' も存在していない時 Z は「有效」である。したがって $X(t-1)$ から $Z(t)$ への有效な技術的轉形の下においては，$Z=(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n)$ とは違った財の組合せを求めるとすると，そこにおいてはすべての z_i が增大することは不可能で，どれかの增大は，かならず他の少くとも一つの減少を犧牲としてともなうのである[2]。有效な技術的轉形は古典的モデルにおいてはいわゆる轉形函數 (transformation function) を規定し，activity analysis においては有效點集合 (efficient point set) を規定する。ここでは $X(t-1)\rightarrow Z(t)$ の有效な轉形を $T[X(t-1), Z(t)]\equiv T[X(t-1), X(t)+Y(t)]=0$ という陰函數の形に置く。これが目下のモデルの基礎としての轉形函數である。すでに有效點の集合であるから，この簡單な表示の背景には前以ていくつかの技術的最適條件がみたされていることは容易に理解できるであろう[3]。しかし一生產期間內部において，$Z\geq\bar{Z}$ となるような Z が可能な時に，あえて $\bar{Z}$ を選ぶというような行爲を除外することはいまのわれわれの問題意識から極めて當然と思われるから，期間內の最適條件はすべて實現されているとして上述の如き函數 T から出發する。T は微分可能な凸函數で零次同次函數であると想定する。零次同次函數であることによって生產規模についての收穫不變性が前提される。すなわち投入量をすべて同一比率で變動すると產出量も同じ方向に同一比率で變動することとなる。生產規模の變化の影響を無視するこの想定は，それが完全競爭と最もコンシステンシィーをもって兩立するためである。完全競爭とコンシステンシィーをもたせようとするのは，いくつかの物理的技術的條件に價格體系を導入する解釋を與える余地を殘すためである[4]。しかし收穫遞減の生產規模效果を含むことを T の形に許しても，後述の幾つかの結論が妥當することはやがて見られる通りである。次に T の形を滑らかに考えることは投入量產出量の代用關係を一般的に承認する意味において activity analysis の生產モデルに比較して寧ろ古典的であり，activity の數が無限個となった極限狀態に對應する。凸函數は上述の代用關係が遞減的であることを意味する。(限界生產力遞減，要素間の限界代用率遞減（原點に凸)，生產物間の限界轉形率遞減(原點に凹))。

それが直ちに生產された生產手段という意味での實物資本ストックに飜譯できる興味があるからである。

2) 有効點集合は最終消費財のパレート・マキシマムによって規定する方が正統的である。したがって $Y'(t)\geq Y(t)$ のような $Y'(t)$ の非存在をもってすべきであろう。クープマンズ〔5〕マランヴォー〔8〕參照。しかしここでは $Y(t)$ については，レオンチエフの「開いた」モデルにおける open-end としての最終需要の精神を延長して，t の各點についてあらかじめ特定されたベクトルとして考えようとしているので有効點集合を本文のように規定しておく。

3) 函數 T の背景に產業間の財の配分・生產のからみあいをたちいって見るならば，一生產期間內において，いくつかの限界條件がなりたっている。たとえばサムエルソン〔12〕が代替原理を展開した手法を想起しよう。それは靜學的な一般的レオンチエフ・モデルにおいて最終消費需要のパレート・マキシマムを求めたのである。その時たとえば，任意の二つの要素の物理的限界生產力の比は，その二つの要素が用いられるすべての產業において同一となっていなくてはならないという限界條件が要求されている。〔12〕の式 (5) 參照。

また activity として示されるいくつかの可能な技術過程の中から，どれをいかなる activity level で選擇するかが activity analysis のエレメンタルな問題である以上，「技術的最適」の解明ということは，それ自身重要にしてしかもモダーンな問題であるということは充分に諒解されるであろう。

4) 紙數の都合で後述の有效條件と完全競爭價格體系との關連は省略せざるを得なかったが，注目すべき點は，以下の考察がインターテンポラルなものであることの當然の歸結として通常の價格のみならず「利子率」の介入が解釋上要求されるということである。そして完全競爭がパレート・マキシマムを實現するという厚生經濟學のよく知られた命題は，相異なった自己利子率間の arbitration の結果として，インターテンポラルに擴張される。〔8〕〔13〕。

II. インターテンポラルな有效點集合 ——サムエルソンの包絡面原則[5)]

1° 定 義

さて第 t 期内部における生産の有效條件は滿されているものとして，次におのおのの生産期間の間のインターテンポラルな有效條件を検討しよう。いま第 t 期の轉形函數 $T[X(t-1), Z(t)]=0$ と次の第 $(t+1)$ 期の轉形函數 $T[X(t), Z(t+1)]=0$ とを一般性を失うことなしに便宜上 $T_0=0$, $T_1=0$ と記すこととする。T の一般的形は各期間を通じて不變と假定する。この時インターテンポラルな有效條件は次の如く定義される。

定義。一定の $X(t-1)$ および $T_0=0, T_1=0$ の條件の下における $Z(t+1)$ のパレート・マキシマムをインターテンポラルな有效點集合とする。

定義の意味は次の如くである。いま第 t 期の始まりにおける經濟體系を考える。その時體系は $X(t-1)$ という實物資本ストックの集合を歴史的遺產として與えられている。これを投入量として用い $T_0=0$ という技術過程を經て $Z(t)$ がうみだされる。いま $Y(t)$ が最終消費として體系外から決定されるとすると，これを $Z(t)$ から控除し，體系は第 $(t+1)$ 期の始まりにおいて $X(t)$ という資本ストックの集合と共に殘されるはずである。しかしその $X(t)$ という集合がいかなる具體的內容をもつかは，目下體系が置かれている第 t 期の期首という時點においては，ただそれが $T_0=0$ を滿足する有效點集合であるという以外，何も特定することはできない。したがって $T_0=0$ を滿足する有效點集合 $X(t)$ のどのエレメント（ベクトル）も等しく第 $(t+1)$ 期のストック投入量となる資格をもっている。そこでそのような $X(t)$ の中から任意に X_1 を取上げ $T_1=0$ の過程に投じたとする。それは $Z(t+1)$ として，X_1 に對應する有效點集合 Z_1（ベクトルの集合）を決定するであろう。また別に $X(t)$ から X_2 を選べばそれに應ずる有效點集合 Z_2 が得られる。このようなプロセスを $X(t)$ のすべてのエレメント（ベクトル）についてほどこせば，有效點集合 Zi の集合 $\{Z_i\}=\{Z_1, Z_2, \cdots\cdots,\}$ が得られるはずである。特定された消費ベクトル $Y(t+1)$ を滿足した後，將來の產出量に貢献する資本ストックとして“できるだけ大きな”ベクトル $Z^{\circ}(t+1)$ が望ましいとすれば，それは $\{Zi\}$ のパレート・マキシマムを求めることとなる。すなわちベクトル不等式 $Z'(t+1) \geq Z^{\circ}(t+1)$ を滿足するような $Z'(t+1)$ が $\{Zi\}$ の中に存在しない時，$Z^{\circ}(t+1)$ こそ第 t 期の始めにおいて第 $(t+1)$ 期の終りに望

5) 生產のインターテンポラルな有效條件という問題をたて，それを包絡面原則として示す試みはサムエルソンのものである。それについて書かれた資料としての〔13〕はわが國ではまだ一般に利用不可能であるが，筆者の包絡面原則についての敍述は基本的精神においては全く〔13〕に從っているが，形式的にはかなりの變更がある。この種の文献を取上げる時にはより忠實な解說が望ましいかも知れないが，幸に福岡正夫助教授が本號でその企てをなされたと聞いたので，それで補っていただけば大變幸である。筆者は後段の議論に必要である限りにおいてこの原則を取上げた。筆者のモデルは專ら定差系で進行するが〔13〕自身は定差方程式系および微分方程式系それぞれについての包絡面原則の說明と自己利子率による解釋とを含んでいる。微分方程式系については，サムエルソンは，一階微分方程式が一階定差方程式の時間單位を極限においてゼロに近ずけることによって導かれるという一般原則に則って，微分方程式系の有效條件を定差方程式系のそれから導く一方，直接變分法を用いて同一の歸結を導いている。この變分は初期と終期を特定した境界條件について，自由度を殘された變數の極大を微分方程式の制約下に行う問題となりラグランジュ—マイヤーの方法によってインテグランドにわれわれによく知られた未定乘數と類似のラグランジュ「函」數を用い，極値の必要條件として古典的なオイラーの微分方程式を導出する。この方程式はその經濟學的意味において後述のわれわれの體系 (A) (B) (C) と同一である。經濟文献におけるエレメンタルな變分法の登場の一例として興味があろう。〔13〕はひき續き消費の種々の時間的パターンを導入することとなっているが，その成果は筆者滯在中には部分的にしかうかがうことができなかった。ところで筆者は本稿においては有效な資本蓄積徑路が，とりわけ成長率との關係で，いかなる動學的性質をもっているかの解明に力點を置くが，この極めて興味深い問題には上述の文献はまだ全くふれていない。しかしサムエルソンがソローと共にこの種の問題に異常な關心をいだいていることは〔14〕のような論稿の存在によっても明瞭である。そして筆者のここでの研究の方向もサムエルソン教授の口頭の示唆に出發しているが，上述の理由でこの部分の行論の誤謬は，いうまでもなく筆者のものであって，サ教授は關係ない。多くの試験的結論を提示して置いたので，この點を特に記す。

みうる有效點集合である。$Z^{\circ}(t+1)$ はかくして有效點集合中の更に高次の有效點集合である[6)]。

2° 必要條件

インターテンポラルな有效點集合の必要條件は古典的な契約曲線や初等的な轉形曲線の場合と全く同樣の手法で求められる。すなわち $T_1=0$ が變數にもつ $Z(t+1)=\{z_1(t+1),\ z_2(t+1),\cdots\cdots,\ z_n(t+1)\}$ の n 個の $z_i(t+1)$ のうち任意の一つをえらび出し他をすべて一定と置き，それを $T_0=0, T_1=0$ の條件下で極大とするのである。この時すべての $X(t-1)=\{x_1(t-1), x_2(t-1),\cdots\cdots, x_n(t+1)\}$ および $Y(t)=\{y_1(t), y_2(t),\cdots\cdots, y_n(t)\}$ と $Y(t+1)=\{y_1(t+1), y_2(t+1),\cdots\cdots, y_n(t+1)\}$ の大きさもあらかじめ指定される。

今 $z_1(t+1)$ が極大の對象に選ばれたとしてこの條件附極大は次のラグランジュ函數の $z_1(t+1)$；$x_1(t), x_2(t),\cdots\cdots x_n(t)$ についての無條件極大問題となる。

$$\begin{aligned}L\equiv L&[z_1(t+1), x_1(t), x_2(t),\cdots\cdots, x_n(t)]\\ =&z_1(t+1)+\lambda_1 T_0[x_1(t-1),\cdots\cdots, x_n(t-1);\\ &x_1(t),\cdots\cdots, x_n(t)\,;\, y_1(t),\cdots\cdots, y_n(t)]\\ &+\lambda_2 T_1[x_1(t),\cdots\cdots, x_n(t)\,;\, z_1(t+1),\cdots\cdots,\\ &z_n(t+1)]\end{aligned}$$

L の極値の必要條件[7)]を導出し，かつ $\dfrac{\partial T_1}{\partial z_1(t+1)}\neq 0$（これは T_1 における $z_1(t+1)$ についての陰函數の存在條件である）を前提し，λ_1, λ_2 を消去すると獨立な關係は $(n-1)$ 箇あって次のように整頓される。

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_i(t)}:\frac{\partial T_1}{\partial x_j(t)}=\frac{\partial T_0}{\partial x_i(t)}:\frac{\partial T_0}{\partial x_j(t)}\qquad (i, j=1, 2,\cdots\cdots, n,)$$

あるいは略記して

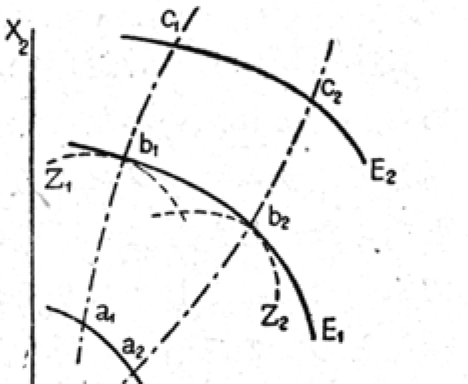
$$T_{1i}:T_{1j}=T_{0i}:T_{0j}$$

もしくは，$T_{1i}:T_{0i}=T_{1j}:T_{0j}\quad (i, j=1, 2,\cdots\cdots n)\ (i\neq j)$

とする。この經濟的意味は極めて明確である。最初の形の式の左邊は $T_1=0$ における二財の「投入量としての限界代用率」であり，右邊は $T_0=0$ における同じ二財の「産出量としての限界代用率」である。いいかえれば他をパラメーターとした任意の二つの投入量相互の轉形曲線 T_1 は同じような産出量相互の轉形曲線 T_0 と相切する。厚生經濟學における極大原理を想いおこす時，この歸結はむしろ當然のことであろう。今かりに $T_0=0$ と $T_1=0$ をインターテンポラルと考えずに同時に併存する二つの産業の生産函數と考えて見よう。周知の厚生最適條件は，同じ二財の限界代用率が異った用途においてすべて均等となることを要求する。上述の必要條件はこの事實を時間的先後の順序をつけて眺めたものであることが容易に理解されよう

さてインターテンポラルな有效點集合は以上の分析によって

6) 問題の視覺的理解のために，二次元のごくラフなグラフで考え方を註記して置こう。output の象限で左下隅に $T_0=0$ の曲線がえがかれる。その上の任意の一點 a_1 に對應する $T_1=0$ を考慮すると Z_1 という點線がえられる。同樣に a_2 に應じては Z_2 がえられる。こういう Z_i が a_i に對して無數にえられその集まりの中から「最も東北方」にある點を選びだすとそれが曲線 E_1 となる。E_1 がまさに本文の「有效點集合中の有効點集合」としての $Z^{\circ}(t+1)$ である。なお少し先廻るが特定した a_1, a_2 等に應ずる $Z^{\circ}(t+1)$ のエレメントは，Z_1 と E_1 との切點，Z_2 と E_1 との切點等々であり，T_0 と E_1 との間にこのような一對一の對應關係が直觀されることに注意しよう。放射線狀の點線はこれをつらねたものである。また E_1 を出發點として次の期間のインターテンポラルな有効點集合を考えると E_2 の如き曲線が豫想されよう。



第 1 圖

7) 以下は必要條件にのみかかわっている。しかし充分條件は函數 T が微分可能な凸函數という前提によって滿されていることが期待できよう。またここの極値問題はいわゆる interior maxima (minima) を考えており corner maxima (minima) を除外している。したがって必要條件はラグランジュ函數の偏微分係數がストリクトにゼロに等しく置かれることによって示され，この偏微分係數についての不等號關係を考慮していない。

$$
\text{(A)}\quad
\begin{array}{l}
T_1=0 \qquad\qquad T_0=0 \\[4pt]
\dfrac{T_{11}}{T_{01}}=\dfrac{T_{12}}{T_{02}}=\cdots\cdots=\dfrac{T_{1n}}{T_{0n}}
\end{array}
$$

という體系によって示される。獨立な式の數は $(n+1)$ 箇である。ここで T_{1i} および T_{0i} は T_1 ないし T_0 の $x_i(t)$ についての偏微分を示している。それが時點 t における財についての偏微分であることに注意するのが肝要である。特異點を考慮しない時にこの體系は n 次元空間において $(n-1)$ 箇のパラメーターを含む曲面群の包絡面を規定している[8)]。

今まで，われわれは第 t 期の始まりに立って第 $(t+1)$ 期の終りの有效點集合を考察した。時間の水平線が更に將來にのびた時に，例えば第 $(t+h)$ 期の終りの有效點集合はどうなるであろうか。いかなる將來においても財のストックはそのまた先の將來の產出量のために“望ましい”ことであると前提すれば[9)]，任意の h の長さについて前と同樣に有效點集合を定義することができ，したがって同樣にその必要條件を條件附極大の問題の形で導くことができる。すなわち「問題。$z_1(t+h)$ を，與えられた $z_i(t+h)$ $(i=2,\cdots\cdots,n)$ に對して $T_0=0, T_1=0,\cdots\cdots, T_h=0$ の條件下で極大にせよ。しかし初期のストック $x_i(t)$ と各期の消費 $y_i(t+k)$ $(k=1,\cdots,h,)$ はすべて旣知とする。」しかし讀者はこの問題の若干の檢討の後，すべての $T_k=0$ $(k=0,1,\cdots\cdots,h)$ が一階の定差方程式であることから，結果は體系 (A) の最後の連比の關係が任意の隣接する二期間について成立つという條件に歸着することを容易に讀み取られるであろう。

$$
\frac{\partial T_{s+1}}{\partial x_i(t+s)}:\frac{\partial T_s}{\partial x_i(t+s)}
=\frac{\partial T_{s+1}}{\partial x_j(t+s)}:\frac{\partial T_s}{\partial x_j(t+s)}
$$

$$
(i,j=1,2,\cdots\cdots,n\,;\ s=0,\cdots\cdots,h-1)
$$

したがって任意の h についての上述の有效點集合の定義が採用される限り，必要條件は生產期間の經過にともなう包絡面の發展的繼起である。そのアイディアは註 6) のグラフの E_1, E_2 等々の系列によって具體的に把握することができよう。資本蓄積の有效な計畫がそなえるべき條件は，かくして一應明確である。

III. 資本ストックの有效蓄積徑路

資本蓄積の有效計畫がいかに規定されるべきであるか，それがいかなる條件を必要とするかを檢討して，サムエルソンに負う包絡面原則が明らかとなった。しかしこの原則の意味するところは何であったか。さしあたりそれは「今日」の生產の結果としての二財の限界代用率が，「明日」の生產の要素としての同じ二財の限界代用率に等しいということを要求するものにほかならなかった。したがってこれだけでは包絡面原則も深い經濟的認識を加えるものではない。問題はこのような原則で展開する過程は一體いかなる動學的性質を備えているか，有效な資本蓄積經路とは更に具體的に

---

8) たとえば二つのパラメータ α_1, α_2 を含む函數 $f(x_1, x_2, x_3,;\alpha_1,\alpha_2)=0$（$f$ および $f\alpha_1, f\alpha_2$ は問題の領域で全微分可能）に對する包絡面は $f=0, f\alpha_1=0, f\alpha_2=0$ の決定する曲面 $E(x_1, x_2, x_3)=0$ によって表わされる。($f=0$ の特異點の軌跡もこれに含まれる。) さてわれわれの體系では $T_1[x_1(t),\cdots\cdots,x_n(t)\,;\,z_1(t+1),\cdots\cdots,z_n(t+1)]=0$ の $x_i(t)$ がパラメーターと考えられる。しかし $T_0[x_1(t),\cdots\cdots,x_n(t)\,;\,c]=0$ (c は常數とあつかわれたものを一括する) という制約があるから，獨立のパラメーターは $(n-1)$ であり，この制約條件を考慮して上述の $f\alpha_1=0, f\alpha_2=0$ に相當する式を計算すると，體系 (A) は $(n+1)$ 箇の方程式からなり，したがって n 箇の $x_i(t)$ を消去して $E[z_1(t+1), z_2(t+1),\cdots\cdots, z_n(t+1)]=0$ が得られる。これがわれわれの包絡面である。その視覺的アイディアは註 6) のグラフの E 曲線が示している。

9) 消費の時間的パターンを一定として有效點集合を考えて行く立場の問題點は先に註 2) において注意されたが，目下の問題においてそれは極めてシアリアスとなる。本文ではいかなる將來においても資本蓄積は“望ましい”として，この點を押しきってしまったがこれは筆者の知る限りでのサムエルソンの取扱い方でもあった。しかし生產計畫が分權的に決定される社會においてこの前提は適切であろうか。厚生理論にその主權を唱われた消費者は何時その主權を恢復しようとするのか。あるいはまた世界の終末においてひとはなお蓄積を欲するのか等々。ところで時間の水平線を考慮して有效點集合を考えながらもマランヴォー〔8〕の行き方は，これらについて遙かに愼重である。しかし本文の行論ではさしあたり蓄積が望ましいということを「前提」して，これらの「厚生哲學」には立ちいらない。

どのような特徴を示すものであろうか，などという點についての解明にある。

かくして包絡面の時間的系列の動學的リズムを可能な限り確定するために，從來のモデルを更に限定して「閉じた」體系に切換える。ここで體系についての「開」と「閉」との區別はレオチエフ・モデルにおけるそれと全く同様である。今まで消費 $Y(t)$ は各時點においてあらかじめ特定されたものと考えられて來たが，今度は消費行爲も經濟體系全體の繼起的再生產過程の一環に包攝され消費財の消費が「勞働」の生產となる。「今日」の產出量としてのすべての財のストックは，「明日」の生產のために投入量として技術的轉形過程にはいりこむ。このようなモデルは財の數を適當に調整すれば，端的に $Y(t)=0$ と置いて從來のモデルをそのまま利用し續けることができる。この「閉じた」體系にあってはもはや $X(t), Y(t), Z(t)$ の區別は不必要となりすべて $X(t)$ の動きに一元化できる。そこで（A）を書き直して任意の期間について

$$
\text{(B)}\quad
\begin{aligned}
&T_1\equiv T[x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots, x_n(t)\,;\ x_1(t+1),\\
&\qquad x_2(t+1), \cdots\cdots, x_n(t+1)]=0\\
&T_0\equiv T[x_1(t-1), x_2(t-1), \cdots\cdots, x_n(t-1)\,;\\
&\qquad x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots, x_n(t)]=0\\
&\frac{T_{11}}{T_{01}}=\frac{T_{12}}{T_{02}}=\cdots\cdots=\frac{T_{1n}}{T_{0n}}
\end{aligned}
$$

と置く時，これが「閉じた」體系における有效なストック生產＝資本蓄積徑路を規定する包絡面の時間的系列を示す體系である。T が各期間について零次同次函數であることは既に前提せられた。今體系を閉じることによって零次同次性はインターテンポラルにも擴張される。さて體系（B）において $X(t-1)=X^\circ$ を初期にえらべば $X(t)$ の有效點集合を出發點とする包絡面 $E_1, E_2, \cdots\cdots$ の展開がおこることは前述の如くである。X° の成分の比を一定にしてそのスケールを任意に動かせば，Xの空間は連續的に包絡面で蔽われ，任意の點がインターテンポラルな有效點集合に屬することとなる。いま X° に應じて $T_0=0$ のきめる有效點集合の中からベクトル $X_r(t)$ という任意の一點を選んだとしよう。その時（B）は $X_0, X_r(t)$ に對しては方程式と未知數とが共に n 箇の體系となる。$T_1=0$ に加えて最後の比例性を示す條件式の考慮が點集合 $X(t+1)$ の中から選ばれるべき一點 $X_r(t+1)$ を確定するのである。微分可能な凸函數と想定された T の形は，一般的に，この確定を一義的に行わしめることが推定される。かくして體系（B）は $X_r(t)$ に對して一義的なベクトル $X_r(t+1)$ を決定すると考えられる。それ故に「閉じた」體系における有效點集合の條件は，$X(t-1)=cX^\circ$（c は任意の正數），$T_0=0$ を滿足する n 次元の財ストック空間の一點 $X(t)$ を同空間の他の點 $X(t+1)$ に連續的に寫像する體系であるということができよう。したがって（B）を書き直して

$$
\text{(C)}\quad
\begin{aligned}
&X(t+1)=F[X(t)]\\
&T[X(t-1), X(t)]=0\\
&X(t-1)=cX^\circ
\end{aligned}
$$

とすることができる。決定的に重要な最初の式は

$$
\text{(C}')\quad x_i(t+1)=F_i[x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots, x_n(t)]\qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)
$$

の意味である。かくして次のように定義することは極めて自然である。

定義。資本蓄積の有效徑路は（C）の解としての $X(t)$ である[10]。

この有效徑路はいうまでもなく $X(t)$ の特定をまつて始めて一本に特定されるので，$X(t)$ が無限の自由度をち，第 t 期の始めにおいてあまたの有效徑路のうちいずれを選ぶべきかについての何らかの基準を持たない以上，資本蓄積についてのダイナミック・プログラミングはその經濟的有用性において，なお，不充分である[11]。

---

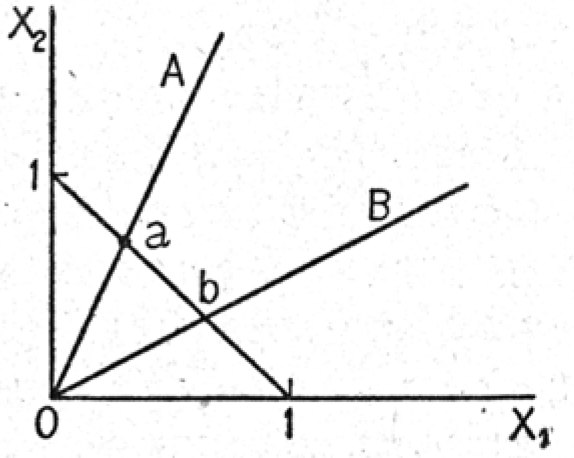
10)　この定義によって，われわれは問題をサムエルソン，ソロウが balanced growth を分析した時のモデルに類似させることができる。〔14〕。しかしそこの基礎の方程式（1）はレオンチエフ流の一產業一生產函數という思想を一般化したものでありながら，財の配分關係を implicit に包含しているために misleading であった。ナイサーの反論參照〔9〕

有効蓄積徑路の二次元のグラフは第1圖における $a_1b_1c_1\cdots\cdots$；$a_2b_2c_2\cdots\cdots$ 等の曲線である。それは一般に曲線であって直線ではない。また體系を閉じたことによってその出發點を原點に措くことが許されよう。

11)　もし將來の特定時點の資本蓄積の大きさと構成

IV. 有效蓄積徑路の特質

そこで有效徑路がいかなる特質をもつかを探求してみよう。この特質を決定するものは寫像のオペレーター F の性格である。T が零次同次函數であることと，體系が閉じていることとは，Fが一次同次函數であることを保證するであろう。しかし以下の歸結のすべてにおいて F の同次性は決定的であるが，一次性はあるものにおいては要求されない。これらの必要な前提については，できる限り，區別して行論をすすめることとしよう。さて F が同次函數であるとすると，その時同次函數系のよく知られた性質によって，從屬變數たる $X(t+1)$ の成分の比は，（函數の次數に依存しながら）獨立變數たる $X(t)$ の成分の比によってもっぱら決定されるということができる。したがって F は $X(t)$ の成分の比を $X(t+1)$ の成分の比に移すオペレーターとなる。Fはそれ故財ストック空間の point-to-point の連續寫像を果すのみならず，原點からの半直線を半直線に寫す連續寫像をも示している。原點からの半直線群が X の成分の比をあらわす幾何學的表現であるからである。そしてマイナスの財のストックは無意味であるから $X(t)\geq 0$, $X(t+1)\geq 0$ と考えると，われわれの問題の舞臺は第2圖のようにプラスの象限に閉じられた半直線群に限定される。ところでこれもよく知られているように

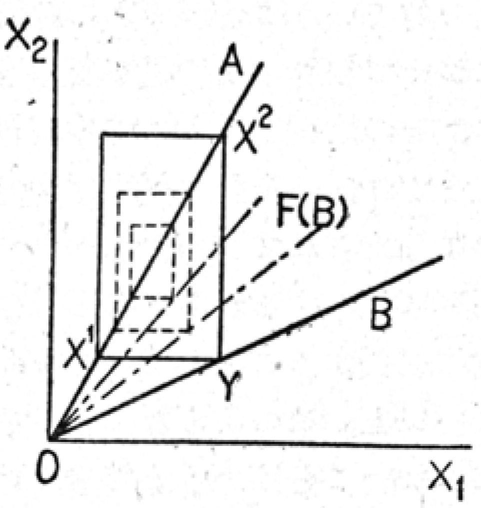


第 2 圖

$$\frac{x_i}{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n} \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n,)$$ という變換を行うと，たとえば半直線Aのすべての點は a 點に，半直線 B 上のすべての點は b という風に，一定の半直線上のすべての點は $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1$ というシンプレックス上の同一の點に變換される。したがってこの變換の後には問題の舞臺は，更に狹まりただ閉じたシンプレックス上のすべての點に歸着してしまう。第2圖でいえば{ $1ab1$} という線分がそれである。Fはシンプレックス上の點を同じシンプレックスの上に，上例でいえば {$1ab1$} の點を {$1ab1$} 自身に，いいかえれば，閉じたシンプレックスをそれ自身に連續的に寫像しているのである。この條件の下においては強力なブラウアーの不動點定理〔7〕を適用し，不動點の存在を立證することができる。このような不動點については F は一つの點を同一の點に寫像するのである。かくしてシンプレックスのこの不動點に對應する半直線上に有效徑路が置かれる時は，$X(t)$ のエレメントの間の相互の比率 $x_1(t):x_2(t):\cdots\cdots:x_n(t)$ は over time にこの半直線の示す比例を保つことが可能である。そしてこの比率における投入量はこの比率における產出量をうみだすという狀態を時間的に繰返して行くことが許される。財ストックの相互の比率を財の構成とよぶこととすると，以上の考察から「**Fが同次函數である時には，財の構成を一定に保つ有效蓄積徑路が存在する。**」という命題をひきだすことができる。（したがって第1圖において $a_1b_1c_1\cdots\cdots a_2b_2c_2\cdots\cdots$ 等々の曲線の中には半直線となるものが存在する。）このような有效徑路をその幾何學的イメージにならって直線的有效徑路あるいは有效半直線と假稱することにしよう。

この直線的有效徑路は，F の單調性の假定と F が一次以下の同次函數であるという假定を加える時，ただ一つしか存在しないことを證明することができる。〔11〕。F の單調性とは，投入量 $X(t)$ のエレメントのいずれかが投ぜられると，產出量 $X(t+1)$ のエレメントがすべて增加するという假定である。記號的には $X^1(t)\geq X^2(t)$ であれば $X^1(t+1)=F[X^1(t)]>F[X^2(t)]=X^2(t+1)$ ということを意味する。一次以下の同次函數とは $F[\lambda X(t)]=\lambda^n X(t+1)$ において $n\leq 1$ を意味す

を外生的に政策の目標として與えられた時，いわば時間を逆に流して從來の考察を適用することも考えられよう。$X(t+1)$ と $X(t-1)$ との兩端をおさえて，能率的な $X(t)$ の可能性を檢討する問題である。このように目標が外生的に與えられた時にはまた，資源（財ストック）と技術の初期條件にかんがみて，目標そのものの有效性を，われわれの有效條件によって批判する問題も存在しうる。



第 3 圖

ることは通常の通りである。いま有效半直線と異なる原點からの任意の半直線の上に一點 Y をえらび，それに應じて $Y \geqq X$ となるような X の集合と有效半直線との交點の「東北端」を X^1 とし，$Y \leqq X$ をみたす X の集合と有效徑路との交點の「西南端」を X^2 とする。(第3圖參照) そして $X^1 \leqq X(t) \leqq X^2$ となるような $X(t)$ の閉領域を C と考える。(第3圖において A を有效半直線，B を他の任意の半直線とすると X^1Y と X^2Y との包む短形がこの C である) 任意の半直線は C とただ一點 Y のみを共有して，相切しその內部を通過していないが，もし $F[Y]$ を通る半直線が C の內部を通ることとなれば，この半直線の F によるオペレーションは，もとと違った半直線に移ることを意味し，したがって Y 點を通る有效徑路は半直線とはなりえない。このことが有效半直線と異なる任意の半直線についていえる以上，直線的有效徑路の存在はただ一つに限られるということが結論される。ところで單調性と一次以下という F についての假定が，$F[Y]$ を通る半直線が C の內點と共通部分をもつことを保證する[12]。

類似の考察は同じ條件の下においての直線的有效徑路の安定性の吟味を可能にする。いま半直線から半直線への寫像が問題であるから X_t 點を通る半直線として $r(X_t)$ と記すこととする。そして $r(X_t)=F[r(X_{t-1})]$ という系列を考えて見よう。X_{t-1} を前述の Y に相應するものとすると，これに對して前と同樣に閉領域 C_{t-1} をつくることができ，したがって $r(X_t)$ はその內部を通過する。そこでこの共通部分の任意の一點 X_t を取り，それに對して同樣な方法で閉領域 C_t をつくると $F[r(X_t)]=r(X_{t+1})$ は C_t の內部を通過する。これを繰返せば次々と前の領域の內部に C_{t+r} を限りなく構成して行くことができる。第3圖で始めの短形の中に次々と前より小さな短形がつくられて行くのである。F は連續な寫像であるから，この極限は有效半直線上の點（第3圖で A 上の點）であると考えることができる。實際 $\{r(X_t)\}$ の時間的系列が何らか極限をもつとすれば，F は連續であるから極限においては半直線の自己自身への寫像があらわれるべきである。有效半直線はこの種の寫像として存在する唯一のものであった。したがって有效半直線上の點を X^* で示せば

$$\lim_{t\to\infty} r(X_t)=r(X^*)$$

という結論を導くことができる。

この直線的有效徑路の安定性の證明においては何らの近傍概念も用いられていないことに注意すべきである。したがってこの安定性は in the large に妥當する。以上の歸結を要約して置こう。

「F が單調な一次以下の同次函數である時資本蓄積のいかなる有效徑路もその財の構成において，やがては直線的有效徑路の示す一定の財の構成に限りなく接近する。直線的有效徑路の存在は一義的であり，そして上述の意味において，すなわち財の構成に關する限り，この徑路は安定な徑路である。」

次には有效蓄積の速度について考察しよう。このために今度は F は一次同次函數であると考える。これは T の形についての前提に最もよく照應するものであろう。(今までのいくつかの結論は以下においても妥當することはいうまでもない。) 有效蓄積の成長率を λ と置こう。その時 $X(t+1)=\lambda X(t)$ はすべての財が λ の速度で

12) X^1 と X^2 とは共に有効直線の上にあり $X^2>X^1$ であるから $aX^1=X^2$, $a>1$ となるような a が選べる。$X^1 \leq Y \leq X^2 = aX^1$ の關係に F の單調性および $n \leq 1$ を考慮すると $F[X^1]<F[Y]<F[aX^1]=a^nF[X^1] \leq aF[X^1]$ が成立つ。さて，$F[X^1]$ は有効直線の特質によって同じ半直線の上に存在するから $F[X^1]=bX^1$ となるプラスの b が選べる。これを上の關係に代入すると

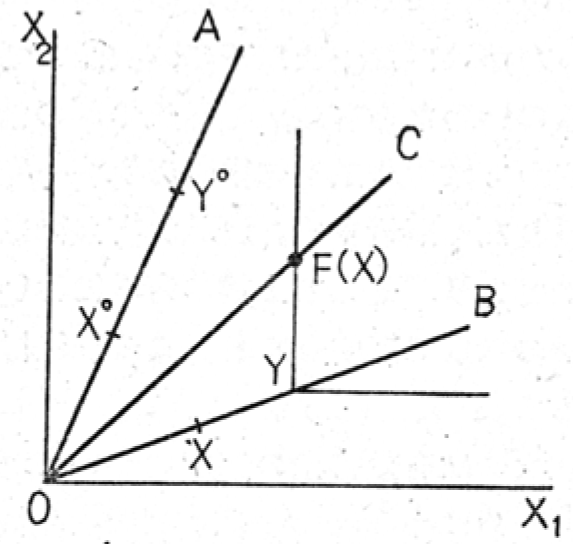
$$bX^1<F[Y]<a(bX^1)=b(aX^1)=bX^2,$$

したがって $X^1<\frac{1}{b}F[Y]<X^2$ いいかえれば $\frac{1}{b}F[Y]$ は C の內點である。それ故に $F[Y]$ を通る半直線は C の內點と交わる。

増大することを意味する。したがって $X(t)=kX\lambda^t$。k はコンスタントでベクトル X はシンプレックス上の點であるように標準化されているとする。上の關係を $X(t+1)=F[X(t)]$ に代入して F の一次同次性を考慮すると $\lambda X=F[X]$ が得られる。$F[X]$ を標準化したベクトルを Y とすると $Y=F[X]/\Sigma F_i[X]$ でシンプレックスの上にある。有效半直線がシンプレックスを切る點においては，既にのべたように不動點定理によって $X=Y$ であり，この點のベクトルを X^* とすると $X^*=F[X^*]/\Sigma F_i[X^*]$ であり，$\lambda^*=\Sigma F_i[X^*]$ とすれば $\lambda^*X^*\equiv F[X^*]$ が成立ち，この λ が有效半直線上を進む資本蓄積の速度として確定する。いいかえれば「**F が一次同次函數である時有效な資本蓄積が有效半直線に沿って進行すればその成長率は一定である。**」

さてもし初期において直線的有效徑路上で $X_1=F[X_0]>X_0$ であれば F の單調性からいかなる時點においても $X_{t+1}>X_t$ となる。したがっておよそプラスの成長が何處かにおいていやしくも可能ならば，そのことは全空間にわたってプラスの成長が進行することを物語っている。このような場合 λ^* は文字通り「成長」率であり，財ストックはその構成を一定に保ちながらそのスケールを擴大する。

このようなプラスの成長の可能な體系においては，有效半直線上にない運動について次のような點を明らかにすることができる。第4圖の A は有效半直線，B, C はその他の半直線とする。今



第 4 圖

B の上の點 X が C の上の $F(X)$ をうみだしたとする。その時 B の上の Y 點は $F[X]\geq Y$ を満足する點である。この Y が前の X の a 倍であるとする。すなわち $Y=aX, a>1$。それ故に次の如くいうことができる。體系が各財ストックについて相異った成長率をもって進行している時に，その成長率をもって半直線に沿った運動を行うとすれば，その成長率はすべての率の最小なものに押えられて a となる。いいかえれば a の成長率に甘んずるならば體系は半直線に沿って指數的に成長することができる。半直線が有效徑路でない以上，このような指數的成長は有效條件をみたさないことはいうまでもない。ところで有效な A の上の點 X° については $Y^\circ=F[X^\circ]=\lambda X^\circ$ であり，ここで指數的成長は有效でありしたがって λ は a の如き數の最大なものである。(第4圖で $X^\circ Y^\circ$ が λ を示し XY が一般の a を示す。) すなわち $F(X)\geq aX,\ X>0$ を満たす a のうち最大なものは λ^* である。$\mathrm{Max}\{a\}=\lambda^*$。〔6〕。有效徑路の成長率が非有效徑路の成長率より大きいことは常識的にも考えられる。したがって「**財の構成を一定に保つ成長において，有效半直線に沿うものが最大の速度をもっている。**」他の半直線に沿うものは有效條件をみたさない。成長がマイナスの成長であるような事態がもしおこれば，それに則して類似の議論を展開することは容易であろう。

以上が有效蓄積徑路について，さしあたり導きうる動學的特質である。

V. レオンチエフ體系への應用についてのノート

レオンチエフ動學體系に以上の分析の成果は適用できないであろうか。

まずはじめに關連の深い事項で既に明かなポイントを指摘しておく。A を生産係數の行列，B を資本係數の行列とする時，フローの變數 x についてのレオンチエフ動學モデルは，通常，微分方程式によって

$$(I-A)x=B\dot{x}$$

と書かれることはよく知られている。(ただし上來の議論との關係上閉じた體系のみ取上げておく。) この關係はストックのダイメンションにも書き直すことができるが，いずれの形態においても，それが適當な初期條件に對して balanced growth をうみだし得ることが證明される。一變數の場合と異り多數部門の動學的成長を考える場合には，ただにプラスの固有値が重要であるのみならず，同時にその固有値に應ずる固有ベクトルのエレメントがプラスの成分から成立つことが重要であり，このことが保證されなければ經濟的意味をもつ成長は不可能となる。しかし幸にして上述のレオンチエフ・モデルは，フロベニウスの定理〔2〕によってこの二つのことを保證する一組の固有値と固有ベクトルが一義的に存在する。したがってこの體系において balanced growth は可能である。この特定の成長徑路は，前述の直線的有效徑路のように安定性をもつであろうか。いいかえれば，上述のレオンチエフ體系に，いやしくも（部門毎に不均齊とはいえ）成長が可能である場合，その成長はやがてはこの balanced growth に近づくであろうか。答は一般的には否であるように思われる[13)]。

ところでこのレオンチエフ體系はわれわれが資本蓄積の有效性を検討した時のモデルと著しく異なっている。それは體系の通過するコースが始めから確定的に敷かれていて，何ら「最適性」「有效性」を求めるようになっていない點である。そこでこのレオンチエフ・モデルに「有效性」問題を持込むことを考える。それはいかにして可能であるか。「等式體系から不等式體系への變換によって」と答えたい。その狙いの大體は次の如くである。

先の動學體系を今までのモデルと照應させるため便宜上微分系から定差系にあらためる。

$$x(t)=Ax(t)+B\Delta x(t)=Ax(t)+B\{x(t+1)-x(t)\}$$

もし右邊の各項に示されるおのおのの用途へ配分されるべき財の利用可能な存在量を左邊が示すとするならば，これを

$$x(t)\geqq Ax(t)+B\{x(t+1)-x(t)\}$$

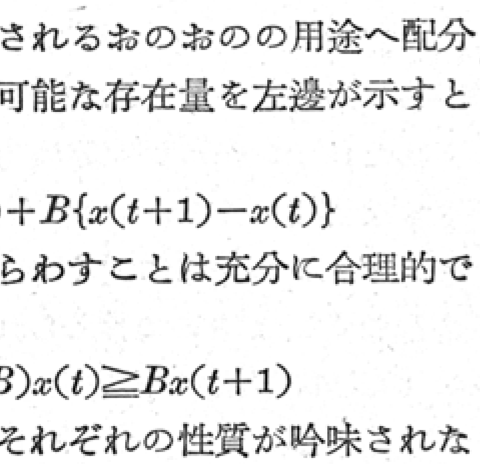
と不等號を加えてあらわすことは充分に合理的である。ここから

$$(I-A+B)x(t)\geqq Bx(t+1)$$

となる。A と B のそれぞれの性質が吟味されなければならないが，ここで飛躍して $A\geqq B$ が都合よく成立ち x もその經濟的意味によって常に有限確定値をもつとするならば $(I-A+B)^{-1}\geqq 0$ が假定される。それ故

$$x(t)\geqq (I-A+B)^{-1}Bx(t+1)$$

となる。$(I-A+B)^{-1}B=D$ とすれば $B\geqq 0$ であるから $D\geqq 0$。二次元のグラフでいえば第5圖の如くなる。したがって等式體系の時はただレオンチエフ徑路即ちL點の時間的系列が求められたのに對し，不等式體系における解は斜線をほどこした部分すべてとなり，ここで有效點集合をパレート・マキシマムとすれば，境界の折線 BLA がそれとなる。そこで前述の議論にならってインターテンポラルな有效點集合は



第 5 圖

$$x(t)\geqq Dx(t+1)$$
$$x(t-1)\geqq Dx(t)$$
$$x(t-1)=x_0$$

13) このレオンチエフ・モデルの balanced growth の性質については筆者は別の機會に取上げたことがある。(「レオンチエフ・モデルの一考察」(金融經済 30, 1955年2月) および「投入産出分析と日本經濟」(昭和 29 年度試驗研究費總合報告　未公刊)。ジョージスキュー・レーゲン〔4〕は二財のモデルについて，上述のレオンチエフ體系の動學的徑路のいくつかの可能性を探求したが，これについてはまず次の點を注意したい。第一に，動學的體系においては，靜學的體系と異なり，「閉じた」モデルにおいても $|I-A|\neq 0$ は投資項 Bx の存在の故に當然と考えられるべきであろう。そしてこの投資項がマイナスとならないことを約束されるならば，ホーキンズ—サイモンの條件〔2〕によって，$|I-A|>0$ となり，$|I-A|<0$ の場合は除外される。したがってジョージスキュー・レーゲンの分類の中では二つだけが取り殘される（(*a*) と (*c*)）。第二にこの殘された場合においては $|B|$ の符號が運動の形態を分類する。もし $|B|<0$ であれば，體系のすべての成長は，いかなる初期條件から出發してもやがて balanced growth に接近する！　しかし $|B|>0$ であれば，レオンチエフに「ルールの切換」を要求したような事態が發生する。この興味深い事實にかんがみ，一般的に n 箇の財の分類の場合への理論の擴張が望まれる。

の條件下における $x(t+1)$ のパレート・マキシマムと定義される。この條件が先には包絡面原則となり，それを考慮しながら變數の動學的展開についての有效徑路が規定された。今の體系でも包絡面は構成されるであろう。しかし，それは BLA 類似の n 次元空間の折線となることが予想される。したがってこの包絡面の系列は，$x(t)$ から $x(t+1)$ への point-to-point の寫像を果さずに point-to-set の寫像となるように直観される。とすれば有效徑路はどう確定されるであろうか。前述の如き直線的有效徑路は存在するであろうか。L 點の系列として先にレオンチエフに因んで命名されたレオンチエフ徑路は有效徑路であろうか。適當な初期條件がレオンチエフ徑路を balanced growth の成長路に置く時，それと安定な有效徑路との關係は如何に考えられるべきであろうか。これらの問題は充分に挑戰に値いするように思われる。しかしここでは單に問題の提起をもって一應本稿を閉じることを許されたい。

参考文獻

〔1〕 Dantzig, G. B. "The Programming of Interdependent Activities", *Activity Analysis* (Cowles Commission Monograph No. 13) 1951

〔2〕 Debreu, G and Herstein, I. N. "Nonnegative Square Matrices." *Econometrica.* Vol. 21. No. 4 1953.

〔3〕 Georgescu-Roegen, N. "The Aggregate Linear Production Function." *Activity Analysis*

〔4〕 Georgescu-Roegen, "Relaxation Phenomena in Linear Dynamic Models", *Activity Analysis*

〔5〕 Koopmans, T. C, "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities" *Activity Analysis.*

〔6〕 Krein, M. and S. Rutman, Linear Operators. 1948 筆者未見〔14〕による。

〔7〕 Lefschetz, S. *Introduction to Topology* 1949.

〔8〕 Malinvaud, E. "Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources" *Econometrica* Vol 21. No 2. 1953.

〔9〕 Neisser, H. P, "Balanced Growth under Constant Returns to Scale: Some Comments" *Econometrica* Vol 22. No 4. 1954

〔10〕 Neumann, J. "A Model of General Economic Equilibrium". *Review of Economic Studies* Vol 13, No. 1 1945—6

〔11〕 Suits D. B. "Dynamic Growth under Diminishing Returns to Scale" *Econometrica.* Vol 22 No 4. 1954

〔12〕 Samuelson, P. A. "Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models" *Activity Analysis.*

〔13〕 Samuelson, P. A. Efficient Paths of Dynamic Capital Development. Unpublished.

〔14〕 Solow, R. M. and Samuelson P. A. "Balanced Growth under Constant Returns to Scale" *Econometrica* Vol 21. No 3. 1953.