動學的投入產出過程の最適徑路について

福　岡　正　夫

はしがき

本稿は，一般化された動學的投入產出モデルにおける資本蓄積の最適徑路（efficient path）に關する研究の一部である。はじめに，その議論の極めて多くをポール・サムエルソン教授に負うことを記しておきたい。

I. 問　題

まず，ある t 時點において，n 種の財のストック $K_1(t), K_2(t), \cdots\cdots, K_n(t)$ があり，それらは變形されて，次の時點 $t+1$ には，（イ）ふたたび生產に投下さるべきストック $K_1(t+1), K_2(t+1), \cdots\cdots, K_n(t+1)$ と，（ロ）消費に用いられるストック $C_1(t+1), C_2(t+1), \cdots\cdots, C_n(t+1)$ とになると考えよう。その變形が基く技術的關係の如何を問わず，われわれはつねに次の期に利用可能な財のストックが極大となるような生產が行われるものと想定する。このような極大產出量がいわゆる生產可能性函數もしくは最適のフロンティアを形成することはよく知られている。われわれはこのフロンティアを極めて一般的に

$$(1)\quad T[K_1(t), K_2(t), \cdots\cdots; K_1(t+1)+C_1(t+1), K_2(t+1)+C_2(t+1), \cdots\cdots]=0$$

という形で記し，それが規模に關する收益不變に服すること，かついわゆる凸の性質を具えること（比例に關する收益遞減その他）を假定する。もし時間を連續的に處理するとすれば，われわれはまたそれを

$$(2)\quad T[K_1(t), K_2(t), \cdots\cdots; \dot{K}_1(t)+\dot{C}_1(t), \dot{K}_2(t)+\dot{C}_2(t), \cdots\cdots]=0$$

と書くことができよう。

これらのフロンティアを導き出す仕事そのものが，實は既に經濟理論の課題の一部である。無數の要素結合の間にスムースな代替が可能な新古典派の場合には，御馴染の限界生產力分析がそれを導き，また有限個の「工程（プロセス）」ないしは「活動（アクテイヴイテイ）」が含まれるリニアー・プログラミングの場合には，ダンテッグ＝クープマンス型の最適化のテクニックがそれを導くであろう。しかし，これらの手續は，現在では經濟學者の間でよく知られており，そのために紙數を費す必要はないと考えられるから，本稿では一應その問題は棚上げにして（「見えざる手」あるいは「プログラマー」が既に背後でそれを解決濟みと考えてよい），もっぱらこのフロンティアの各時點における存在を假定しつつ議論を進めることにする。

かくして，われわれのモデルでは，いかなる時點においても生產上の最適條件は滿足され，從って生產の最適編成については，もはやそれ以上要求される何物もないかのように思われる。しかし，事實，われわれは未だ重大な連環を看逃しているのである。**財のストックの最適成長徑路が定まるには，單に時點的（instantaneous）な最適條件の滿足だけでは不充分であり，更に異時的（intertemporal）な最適條件が滿足されなければならない。**そのような時間過程を通じての最適條件を求め，その意味を問うてみることが，以下本稿の主要な課題である。

この問題は，時間を斷續的に取扱ういわゆる期間分析の觀點からも，あるいはそれを連續的に取扱ういわゆる速度分析の觀點からも分析できるが，

われわれはまず理解がヨリ容易であると思われる前者の觀點から分析を始め，その後で後者に移るのが便利であると考える。

II. 最適條件の分析
——斷續的モデルについて

以下われわれは，投入物が互に連續的かつスムースに代替可能な新古典派的立場を中心として考察を行う。かつ最初は，圖形の便宜を用いるため，ただ二財の事例に即して說明を進めよう。

さきに記したところに從って，t 時點におけるわれわれのフロンティアは

$$T[K_1(t), K_2(t)\,;\ K_1(t+1)+C_1(t+1),\ K_2(t+1)+C_2(t+1)]=0$$

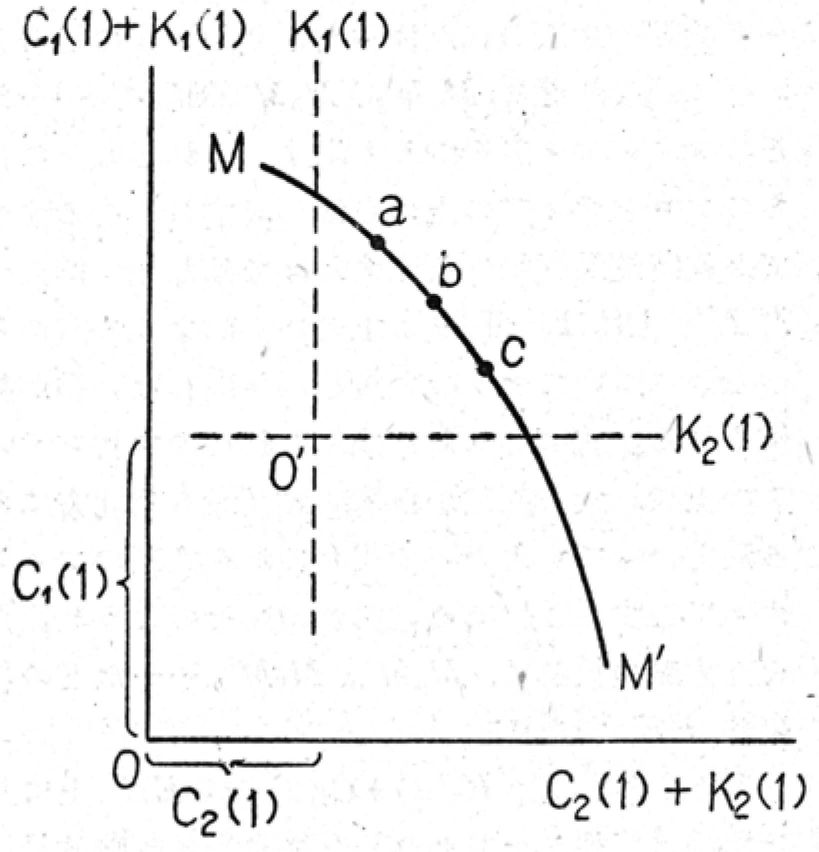
であるが，いまこれを陽表的に

$$K_1(t+1)+C_1(t+1)=F[K_1(t), K_2(t)\,;\ K_2(t+1)+C_2(t+1)] \tag{3}$$

の形で書き表す。ここで F はスムースに連續的な偏導函數（限界生產力）をもつ連續函數であり，また規模に關する制約因子は無視されているから，一次の同次函數である。左邊が，所與の $K_1(t)$, $K_2(t)$ と $K_2(t+1)+C_2(t+1)$ に對應する $K_1(t+1)+C_1(t+1)$ の極大可能量を表していることはいうまでもない。

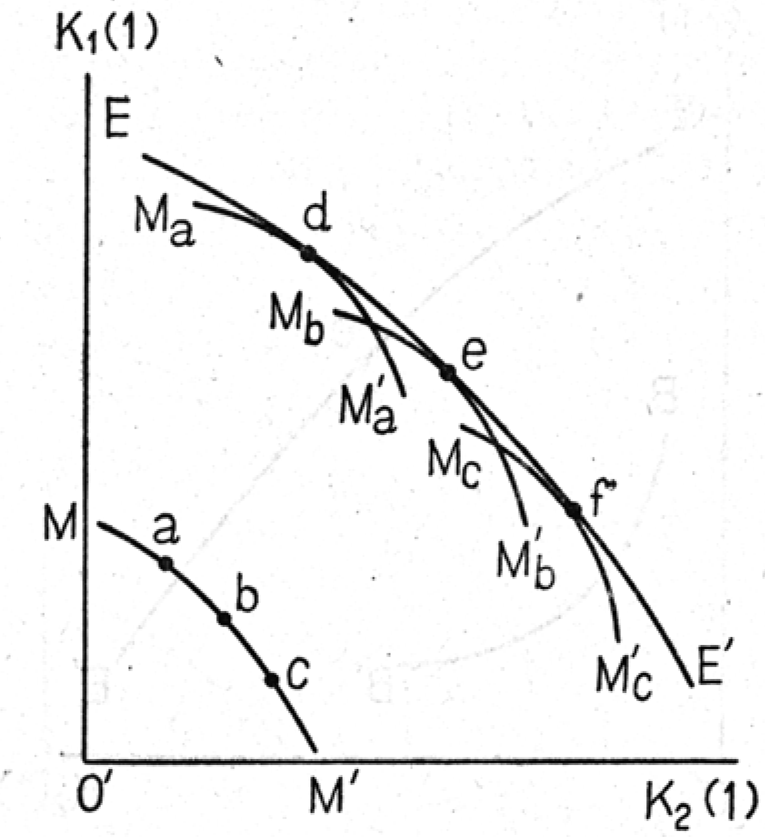
さて，求める異時的最適條件を導くため，次のように問題を設定してみよう。（イ）初期のストック $K_1(0), K_2(0)$ は所與，（ロ）また次期の消費量 $C_1(1), C_2(1)$ も消費者の需要ないしは嗜好の命ずるままにある水準に特定化されると考える。そのとき，二期後には $K_1(2)+C_1(2), K_2(2)+C_2(2)$ について，われわれはいくばくの極大フロンティアを保證されるであろうか。あるいは同じことであるが，もし $C_1(2), C_2(2)$ も特定化されると考えれば，われわれが子孫に遺贈し得る $K_1(2)$, $K_2(2)$ の極大フロンティアはどれだけのものであろうか。

圖を眺めながら，この問題を考えてゆくことにする。第1圖（イ）の MM' は，與えられた初期のストック $K_1(0), K_2(0)$ からどれだけの $K_1(1)+C_1(1)$, $K_2(1)+C_2(1)$ が生產可能かを示している。その中，$C_1(1), C_2(1)$ は消費のため差引かれるから，次期の生產に利用可能なストック $K_1(1)$, $K_2(1)$ は，O' を原點とする正の象限に含まれた部分である。さて，それを（ロ）に移す。$a, b, c,$ ……などによって代表されるその上の諸點は，す



（イ）

第 1 圖

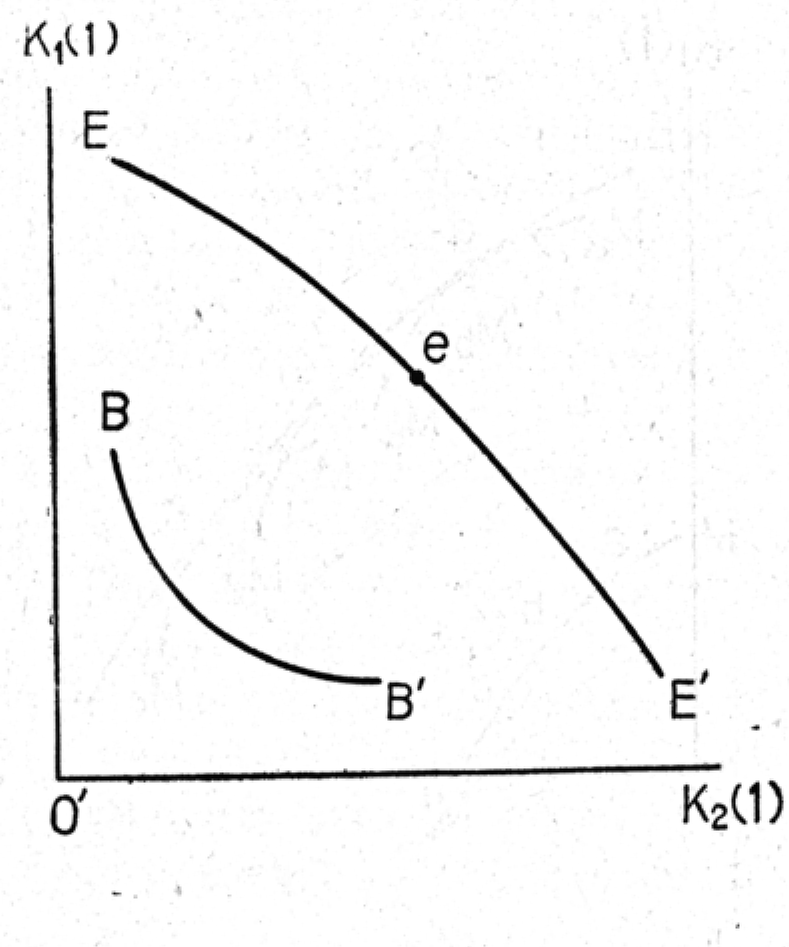


（ロ）

第 1 圖

べて次期の生産の初期條件となり，(イ) の場合と同様に，それぞれ $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$,……などのフロンティアをつくり出す。けれども，これらのフロンティアの上の點は，必ずしもそのすべてが異時的最適條件を充すわけではない。例えば $M_bM'_b$ 上には，$M_aM'_a$ 上のある點よりも，あらゆる財についてヨリ少い量しか生産しない點が見出される。故にわれわれは，これらのフロンティアの上で，最も原點から遠い點（最も東北方にある點といってもよい）の集りのみを次期のフロンティアとすべきである。明かに，そのような條件を充す點の軌跡は，$M_aM'_a$, $M_bM'_b$,……などの包絡線 EE' である。

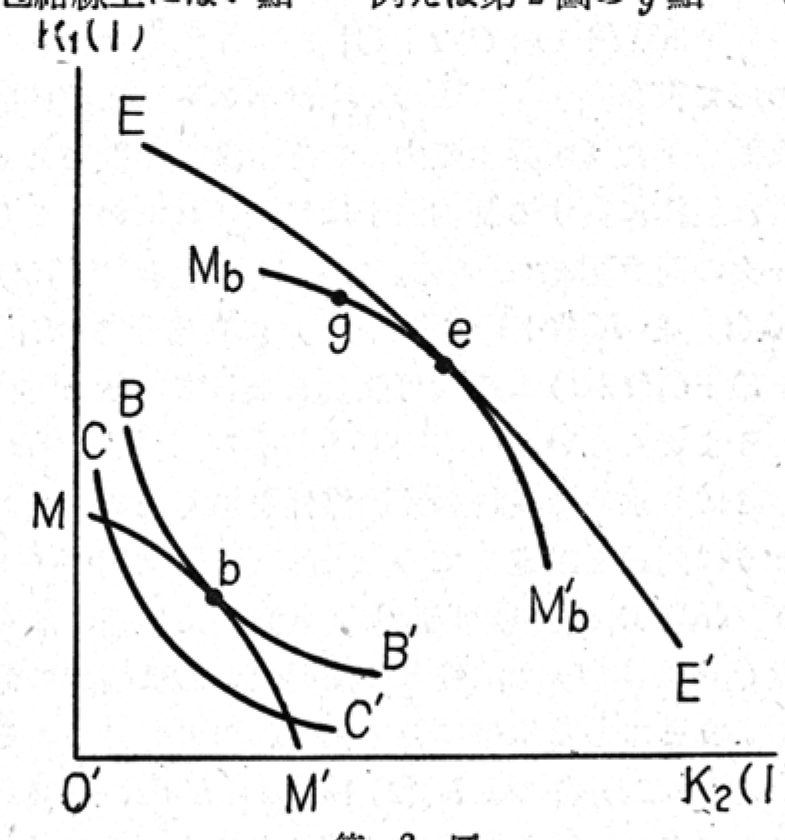
$K_1(2)+C_1(2)$, $K_2(2)+C_2(2)$ が EE' 上にあるための條件こそ，われわれの求める異時的最適條件に他ならない。それでは，その條件とはいかなるものであろうか。近代經濟理論に馴染みのある人なら誰しも，それは何らかの意味での限界代替率均等の條件に違いないと推測するであろう。この推測の正しいことは，後の證明が明かにするが，いまその結論を先取りして掲げれば，次のとおりである。



(ハ)
第 1 圖

前期（昨日）の産出物と考えられたときのいかなる二財の間の限界代替率も，次期（明日）の投入物と考えられたときのそれらの間の限界代替率に等しくなければならない。

圖でいえば，この規則は第2圖の中の BB' と MM' との切點 b で示されている。BB' の意味は第1圖の (ハ) を見れば明かである。すなわち，それは包絡線上の一點 e を生産するための投入物としての $K_1(1)$, $K_2(1)$ の組合せである。それの傾斜が，次期の投入物と考えられた $K_1(1)$, $K_2(1)$ の間の限界代替率を表すことはいうまでもない。一方，MM' の傾斜は，前期の産出物としての $K_1(1)$, $K_2(1)$ 間の限界代替率を表しており，かくして兩者の切する點において規則の命ずる最適條件が實現されるのである。これに對して，包絡線上にない點——例えば第2圖の g 點——に



第 2 圖

は，BB' の代りに CC' が對應し，CC' は MM' と切しないから，上の規則は滿足されない。

以上のことを理解した上，嚴密な數學的分析にとりかかろう。われわれは，最適條件を演繹するために，

$$F[K_1(1), K_2(1)\,;\ K_2(2)+C_2(2)]$$
$$=K_1(2)+C_1(2)$$

を

$$F[K_1(0), K_2(0)\,;\ K_2(1)+C_2(1)]$$
$$-K_1(1)-C_1(1)=0$$

および

$$[K_1(0), K_2(0); C_1(1), C_2(1), C_1(2), C_2(2); K_2(2)]\text{一定}$$

の制約の下で極大ならしめる。通例のラグランジュの方法に從ってラグランジュ式をつくれば

$$G=F[K_1(1), K_2(1); K_2(2)+C_2(2)] +\lambda\{F[K_1(0), K_2(0); K_2(1)+C_2(1)] -K_1(1)-C_1(1)\},$$

從って，極大の必要條件として

$$\frac{\partial G}{\partial K_1(1)}=\frac{\partial F[K_1(1), K_2(1); K_2(2)+C_2(2)]}{\partial K_1(1)} -\lambda=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial K_2(1)}=\frac{\partial F[K_1(1), K_2(1); K_2(2)+C_2(2)]}{\partial K_2(1)} +\lambda\frac{\partial F[K_1(0), K_2(0); K_2(1)+C_2(1)]}{\partial K_2(1)} =0$$

を得，これから λ を消去して

$$\frac{\partial F[K_1(0), K_2(0); K_2(1)+C_2(1)]}{\partial K_2(1)}= -\frac{\dfrac{\partial F[K_1(1), K_2(1); K_2(2)+C_2(2)]}{\partial K_2(1)}}{\dfrac{\partial F[K_1(1), K_2(1); K_2(2)+C_2(2)]}{\partial K_1(1)}} \tag{4}$$

を得る。これがわれわれの求める基本的最適條件である。

(4) をそれと等義な

$$\left\{\frac{\partial K_1(1)}{\partial K_2(1)}\right\}_{\substack{C_1(1),\ C_2(1)\\ K_1(0), K_2(0)\text{一定}}}=\left\{\frac{\partial K_1(1)}{\partial K_2(1)}\right\}_{\substack{C_1(2),\ C_2(2)\\ K_1(2), K_2(2)\text{一定}}}$$

という形で書けば，それがさきの切點の條件であることが明かとなるであろう。また (4) の右邊の分母を左邊と交換して

$$\left\{\frac{\partial K_1(2)}{\partial K_1(1)}\right\}=\left\{-\frac{\partial K_1(2)}{\partial K_2(1)}\ \frac{\partial K_2(1)}{\partial K_1(1)}\right\}$$

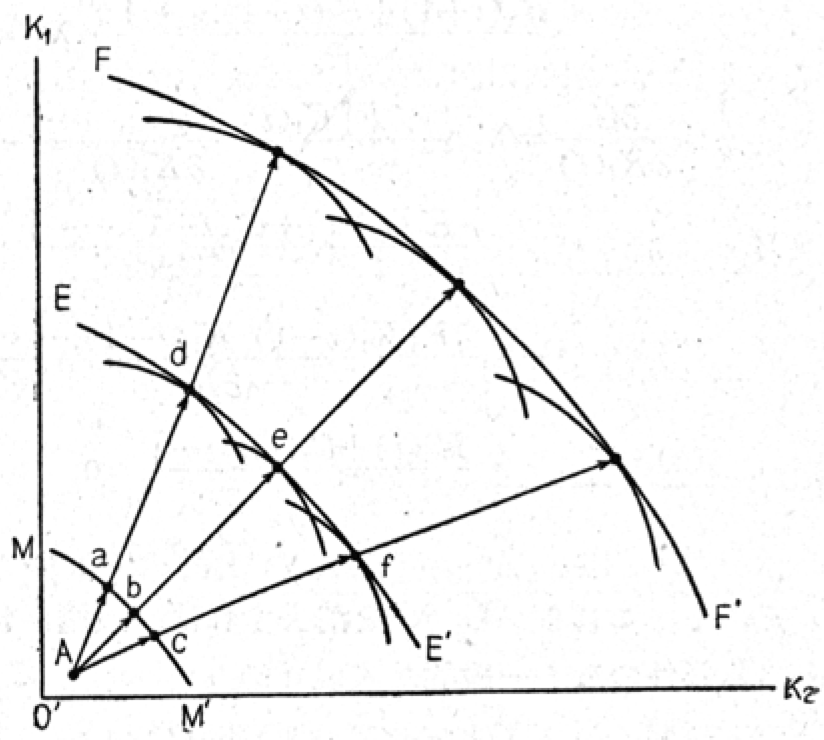
と書けば，次のような解釋が可能である。すなわち，この式の左邊は，第1期と第2期の間の第1財の直接的な自己利子率ないしは增殖率を表している。これに對して，右邊は，第1期に第1財を犧牲にして第2財を增加し，その第2財の增加に基いて第2期の第1財を增加した場合の間接的な增殖力を表している。最適條件の意味するところは，この直接的および間接的の兩過程が同一の結果を生まなければならないということである。

さて，以上の分析は，二つの方向に向って一般化される。その一つは財の數を增やす方向であり，もう一つは期間の數を增やす方向である。前者の方向への一般化は極めて容易である。いまやわれわれは，任意にとり出されたどの二財の間にも (4) が成立すると考えればよい。財が n 種類あるときは，その中の一つを基準として，それと他の $n-1$ 財との間に，次の $n-1$ 個の最適條件が成立する。

$$\frac{\partial F[K_1(0), K_2(0),\cdots; K_2(1)+C_2(1),\cdots]}{\partial K_i(1)}= -\frac{\dfrac{\partial F[K_1(1), K_2(1),\cdots; K_2(2)+C_2(2),\cdots]}{\partial K_i(1)}}{\dfrac{\partial F[K_1(1), K_2(1),\cdots; K_2(2)+C_2(2),\cdots]}{\partial K_1(1)}} \tag{5}$$

$$(i=2,\cdots, n)$$

次に第二の方向への一般化について。さきにわれわれは，初期のストック $K_1(0), K_2(0)$ から出發して，第2期に包絡線フロンティア EE' を得ることを知った。全く同じ推論によって，第3期には包絡線の包絡線としてのフロンティア FF' が得られ，以下第4期，第5期，……についても同樣であることは理解に容易であろう。かくして，一定の技術條件と消費條件の下において，包絡線



第 3 圖

フロンティアの「繁殖」とも呼ばれるべき過程が發生し，一群の放射線状の最適徑路が確立される（第3圖參照）。

多數財多期間の一般的モデルにおいてこれらを規定する數學的分析は，次のようである。われわれは，さきと同様に，

$$F[K_1(T-1), K_2(T-1), \cdots\cdots; K_2(T)+C_2(T), \cdots] = K_1(T)+C_1(T)$$

を

$$F[K_1(t-1), K_2(t-1), \cdots\cdots; K_2(t)+C_2(t), \cdots] - K_1(t)-C_1(t)=0 \qquad (t=1, 2, \cdots\cdots, T-1)$$

および

$$[K_1(0), K_2(0), \cdots\cdots; C_1(t), C_2(t), \cdots\cdots; K_2(T)]\text{一定} \qquad (t=1, 2, \cdots\cdots, T)$$

の制約の下で極大ならしめる。$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_{T-1}$ を $T-1$ 個の未定乘數とすれば，ラグランジュ式は

$$G=F[K_1(T-1), K_2(T-1), \cdots\cdots; K_2(T)+C_2(T), \cdots\cdots]+\sum_{t=1}^{T-1}\lambda_t\{F[K_1(t-1), K_2(t-1), \cdots\cdots; K_2(t)+C_2(t)] - K_1(t)-C_1(t)\}$$

と書かれ，從って極大の必要條件として

$$\frac{\partial G}{\partial K_1(t)}=\lambda_{t+1}\frac{\partial F[K_1(t), K_2(t), \cdots\cdots; K_2(t+1)+C_2(t+1), \cdots\cdots]}{\partial K_1(t)}-\lambda_t=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial K_i(t)}=\lambda_{t+1}\frac{\partial F[K_1(t), K_2(t), \cdots\cdots; K_2(t+1)+C_2(t+1), \cdots\cdots]}{\partial K_i(t)}+\lambda_t\frac{\partial F[K_1(t-1), K_2(t-1), \cdots\cdots; K_2(t)+C_2(t), \cdots\cdots]}{\partial K_i(t)}=0 \qquad (i=2, \cdots\cdots, n)$$

を得る。これらから λ を消去すれば，最適＝包絡線條件の最も一般的な表現 (6)

$$\frac{\partial F[K_1(t), K_2(t), \cdots; K_2(t+1)+C_2(t+1), \cdots]}{\partial K_i(t)} \div \frac{\partial F[K_1(t), K_2(t), \cdots; K_2(t+1)+C_2(t+1), \cdots]}{\partial K_1(t)} \cdot \frac{\partial F[K_1(t-1), K_2(t-1), \cdots; K_2(t)+C_2(t), \cdots]}{\partial K_i(t)} =0 \qquad (i=2, \cdots\cdots, n)$$

が得られる。

ここで (6) が (5) と全く同じものであることには注意すべきであろう。すなわち，投資のプログラムが多期間に亙る場合にも，われわれはその最適＝包絡線條件として，二期間の場合のそれに加うべき何らの新條件をも要しないのである。この幸運な事實は，われわれのプログラムが recursive な性質のものであること，換言すればそれが必要限度の短期間のそれぞれについて最適であれば，全期間に亙っても最適であること，を物語るものである。

III. 最適條件の分析
——連續的モデルについて

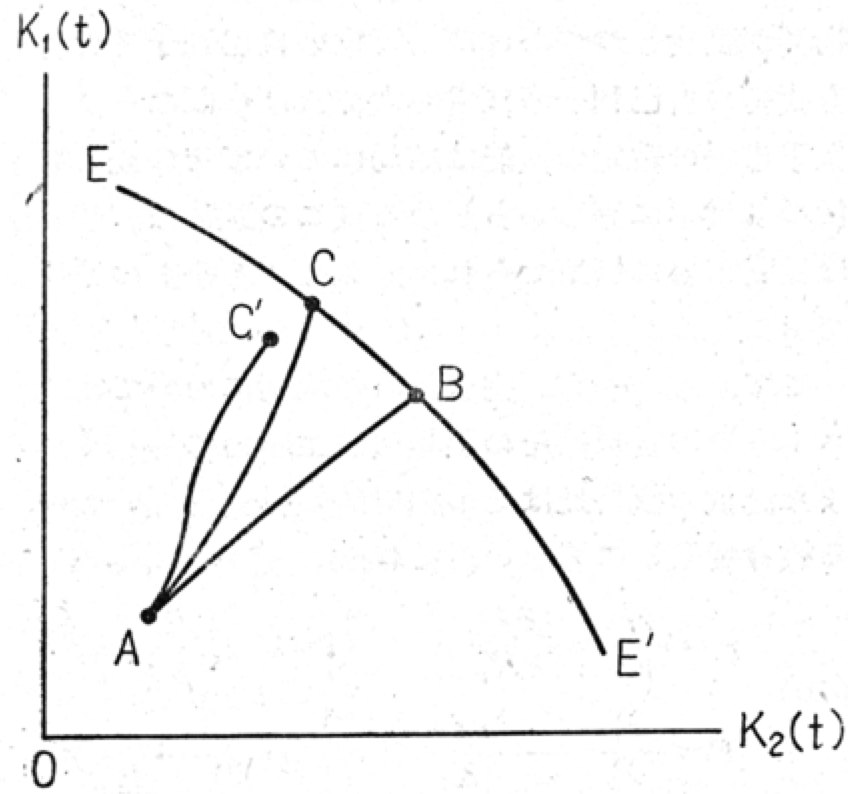
ここで時間の連續的に取扱われるモデルに移る。このモデルにおいては，(1) が (2) に書直されるのと平行して，(3) は

$$(7) \qquad \dot{K}_1(t)+\dot{C}_1(t)=f[K_1(t), K_2(t), \cdots\cdots; \dot{K}_2(t)+\dot{C}_2(t), \cdots\cdots]$$

に書直される。ここで f は F と同じくスムースな偏導函數をもつ連續函數で，かつ一次の同次函數である。

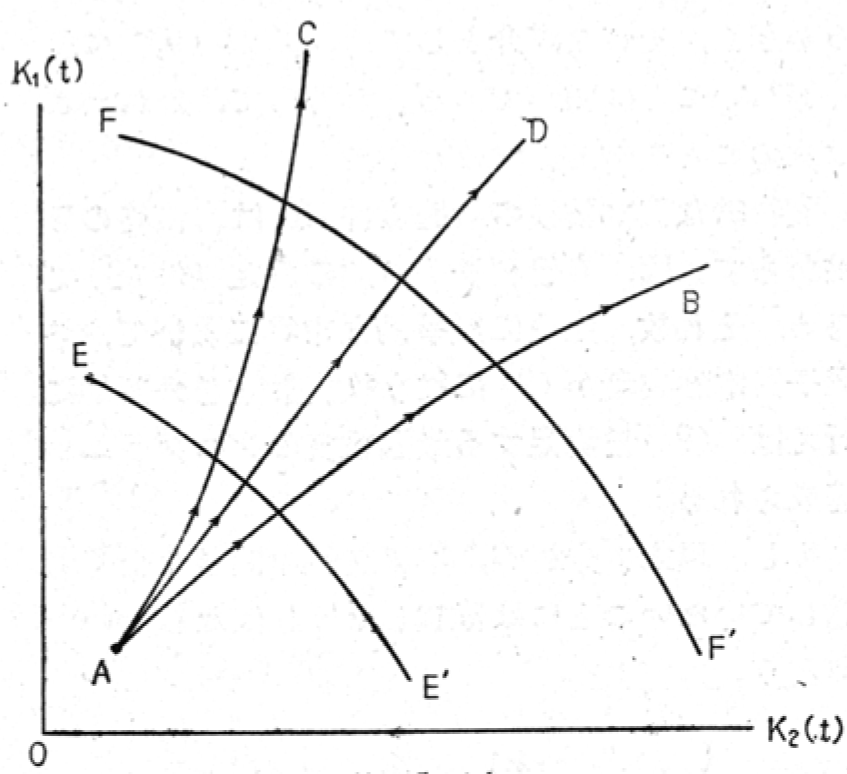
以下の分析は，すべて時間の斷續的な場合にアナロガスである。われわれはまず初期の資本ストック $K_1(0), K_2(0), \cdots\cdots$ から出發し，0 時點と T 時點との間の消費 $\dot{C}_1(t)=g_1(t), \dot{C}_2(t)=g_2(t), \cdots\cdots$ はすべて自發的に與えられたものとして（すなわち $g_1, g_2, \cdots\cdots$ は時間に關する既知函數），終點の T 時點における資本ストックのフロンティア $K_1(T), K_2(T), \cdots\cdots$ を考察する。

第4圖は，この終點における最適フロンティアを二財の場合について示している。出發點 A は，與えられた技術と消費の條件を滿足させるいろいろな成長徑路を發生し，それらは T 時點におい



第 4 圖

てそれぞれ $B, C, \cdots\cdots$ などの終點に到達する。しかし，それらの徑路のすべてが最適徑路となるわけではない。例えば，AC' の如きは，あらゆる資本について AC よりもヨリ少量をしか生産しないから最適ではない。かくして，他を減らさずしては一つを增やすことができないような，最適の終點のみがフロンティア EE' を構成する。次に第5圖は，さきの第3圖に對應して，連續的な場合



第 5 圖

の過程の續行を示している。EE' の上の諸點から出發し次の終點を T' 時點と考えることによって，ふたたび次のフロンティア FF' が構成されること，そのプロセスの反復によって最適徑路 $AB, AC, AD, \cdots\cdots$ などが決定されること，などの要領は，第3圖の場合と全く平行的である。

連續的な場合の數學的分析は，次のようにして行われる。われわれは

$$K_1(T)-K_1(0)=\int_0^T \dot{K}_1(t)dt$$

を

$$f[K_1(t), K_2(t), \cdots\cdots;\ \dot{K}_2(t)+g_2(t), \cdots\cdots] -\dot{K}_1(t)-g_1(t)=0$$

および

$$[K_1(0), K_2(0), \cdots\cdots;\ K_2(T), \cdots\cdots]\text{一定}$$

の制約の下で極大ならしめる。これは積分を微分方程式の制約條件の下で極大ならしめる問題であり，變分法でラグランジュもしくはマイアーの問題と呼ばれるものに該當する。微分方程式の制約條件はどの t 時點においても成立するから，ラグランジュ乘數はこの場合は t に關する函數である。從って，ラグランジュ式は

$$G=\int_0^T [\dot{K}_1(t)+\lambda(t)\{f[K_1(t), K_2(t), \cdots\cdots;\ \dot{K}_2(t)+g_2(t), \cdots\cdots]-\dot{K}_1(t)-g_1(t)\}]$$

と記され，極大の第一次條件として，われわれは

$$\frac{d}{dt}[1-\lambda(t)]-\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial K_1}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial \dot{K}_i}\right]-\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial K_i}=0$$

を得る。これが變分法でよく知られたオイラーの微分方程式の，われわれの事例における表現である。さきと同じように $\lambda(t)$ を消去することにより，われわれは最終的に

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\ \frac{\partial f[K_1(t), K_2(t), \cdots;\ \dot{K}_2(t)+g_2(t), \cdots]}{\partial \dot{K}_i(t)}\\ (8)\quad &=\frac{\partial f[K_1(t), K_2(t), \cdots;\ \dot{K}_2(t)+g_2(t), \cdots]}{\partial K_i(t)}\\ &+\frac{\partial f[K_1(t), K_2(t), \cdots;\ \dot{K}_2(t)+g_2(t), \cdots]}{\partial K_1(t)}\\ &\cdot\frac{\partial f[K_1(t), K_2(t), \cdots;\ \dot{K}_2(t)+g_2(t), \cdots]}{\partial \dot{K}_i(t)}\\ &\qquad\qquad (i=2, \cdots\cdots, n)\end{aligned}$$

を得る。連續的モデルにおいて基本的な最適條件は，この (8) によって與えられる。

IV. 最適條件の市場的解釋

最後にわれわれは，最適條件(8)に對して，價格もしくは市場の觀點からする一つの解釋を與えてみよう。

第1財の流量 K_1（もしくは C_1）の價格を價値尺度として $P_1(t)\equiv 1$ と書き，他の財の流量 K_i（もしくは C_i）の價格をこの尺度で測って $P_i(t)\equiv P_i(t)/P_1(t)$ と書く。次に，各財のストック K_i の單位時間當りの賃料（レント）を同じく $P_1(t)$ で測って $r_i(t)\equiv r_i(t)/P_1(t)$ と記す。

そのとき，第1財ストックの賃料 $r_1(t)\equiv r_1(t)/P_1(t)$ は，第1財自らの流量で表されるから，明かに純粹數すなわち單位時間當りの%である。いま，もし第1財のストックの所有者がその賃料所得のすべてを投資するとすれば，K_1 は

$$\frac{dK_1(t)}{dt}=r_1(t)K_1(t)$$

すなわち

$$K(t)=K(0)e^{\int_0^T r_1(t)dt}$$
$$=K(0)e^{\bar{r}_1 t}\qquad (r_1(t)\text{ が常數の場合})$$

の率で增殖する。それ故，われわれは $r_1(t)$ を第1財の自己利子率と解釋することができる。また同樣の理由で，$r_i(t)/P_i(t)$ は第 i 財の自己利子率と解釋される。

ところで，完全な競爭市場を假定すれば，それが有する裁定作用を通じて，種々の自己利子率の間には，次の關係が成立すると考えられる。

$$(9)\qquad r_1(t)+0=\frac{r_2(t)}{P_2(t)}+\frac{\dot{P}_2(t)}{P_2(t)}=\cdots\cdots=\frac{r_n(t)}{P_n(t)}+\frac{\dot{P}_n(t)}{P_n(t)},$$

あるいは同じことであるが

$$(9)'\qquad \frac{\dfrac{dP_i}{dt}}{P_i}=\frac{r_i}{P_i}-r_1\qquad (i=2,\cdots\cdots,n),$$

すなわち，どの價格も變化していなければ，これらの自己利子率は相互に等しいが，もし價格が變化しつつあるとすれば，それらは價格の變化率の開きだけ相互に異らなければならない。例えば，物價が騰貴しつつあれば，實物の自己利子率よりも貨幣の自己利子率は當然大でなければならず，競爭市場の裁定の機能は結局においてその差を物價の騰貴率に等しからしめる（この意味で，(9)は投資市場に適用せられた「見えざる手」の原理である）。

さて，もう一方，完全競爭の均衡においては，ストックの賃料はその限界價値生產力に等しく，また流量の價格比はその相對的限界費用（いわゆる機會費用）に等しい。それ故

$$(10)\qquad r_i=\frac{r_i}{r_1}=\frac{\partial f}{\partial K_i}\qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$
$$P_i=\frac{P_i}{P_1}=-\frac{\partial f}{\partial \dot{K}_i}\qquad (i=2,\cdots\cdots,n)$$

という關係が成立する。

以上を考慮しながら，われわれは基本的最適條件(8)を

$$(8)'\qquad \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{K}_i}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial \dot{K}_i}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial K_i}}{-\dfrac{\partial f}{\partial \dot{K}_i}}-\frac{\partial f}{\partial K_1}\qquad (i=2,\cdots\cdots,n)$$

の形に書直してみよう。そのとき，(10)が成立するかぎり，それを媒介として，(8)′が(9)′に全く等しいことは明かである。かくして，われわれは次のことを知る。すなわち，

實物的な資本蓄積の最適條件(8)は，價格の觀點からすれば，自己利子率の間の裁定條件(9)である。それ故，完全に競爭的な市場において，各原子論的參與者が(9)に從う投資計畫を分權的に行えば，(8)を滿足する最適投資のプログラムが達成される。

但し，以上の分析が，不確實性の問題を全く考慮していないことには留意しなければならないであろう。

補　論

われわれの最適＝包絡線條件の導出は，まず第Ⅱ節においては時間の斷續的な定差方程式の場合について行われ，次いで第Ⅲ節では時間の連續的な微分方程式の場合について，それとは別個に行

われた。しかし，本來連續的な場合は斷續的な場合における期間の單位を無限に小さくしていった極限と考えられるから，その最適條件もまた後者のそれの limiting case として導かれる筈である。そのような操作によって，さきに變分法の導いた條件と全く同一の條件が導かれることを明かにし，二つの立場の間に架橋をほどこすのが，この補論の目的である。

敍述を簡單にするため，$C_i(t)$ は省略し，かつ $K_i(t)=K_i^t$, $K_i(t+\theta)=K_i^{t+\theta}$ などと記すことにする。いま斷續的な場合の時點的フロンティアを一般的に

$$K_1^{t+\theta}=F[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ K_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]$$

と記せば，いうまでもなく $\theta=1$ の場合が第Ⅱ節の場合である。さて

$$\frac{K_i^{t+\theta}-K_i^t}{\theta}=\hat{K}_i^{t+\theta}$$

と定義しよう。そのときには，上のフロンティアは

$$\theta\hat{K}_1^{t+\theta}+K_1^t=F[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ \theta\hat{K}_2^{t+\theta}+K_2^t, \cdots\cdots;\ \theta]$$

と書改められ，故に

$$\hat{K}_1^{t+\theta}=\frac{1}{\theta}\{F[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ \theta\hat{K}_2^{t+\theta}+K_2^t, \cdots\cdots;\ \theta]-K_1^t\}$$

であるから，その右邊をさらに書直して

$$\hat{K}_1^{t+\theta}=f[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ K_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]$$

と定義すれば，明かに $\Delta t=\theta\to 0$ の極限において $\hat{K}_i^{t+\theta}=\hat{K}_i$ となり

$$\hat{K}_1=f[K_1, K_2, \cdots\cdots;\ \hat{K}_2, \cdots\cdots;\ 0]$$

となる。すなわち，フロンティア (7) はフロンティア (3) の limiting case である。

さて，以上の關係を考慮しながら計算を行えば，容易に

$$\frac{\partial F[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ K_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]}{\partial K_1^t}=\theta\frac{\partial f[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ \hat{K}_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]}{\partial K_1^t}+1;$$

$$\frac{\partial F[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ K_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]}{\partial K_i^t}=\theta\frac{\partial f[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ \hat{K}_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]}{\partial K_i^t}-\frac{\partial f[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ \hat{K}_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]}{\partial \hat{K}_i^{t+\theta}};$$

$$\frac{\partial f[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ \hat{K}_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]}{\partial \hat{K}_i^{t+\theta}}=\frac{\partial f[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ K_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]}{\partial K_i^{t+\theta}}$$

$$(i=2, \cdots\cdots, n)$$

を得る。故に，$F[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ K_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]=F^{t+\theta}$, $f[K_1^t, K_2^t, \cdots\cdots;\ \hat{K}_2^{t+\theta}, \cdots\cdots;\ \theta]=f^{t+\theta}$ と略記すると，最適＝包絡線條件 (6) は次のように書かれる。

$$\frac{\partial F^{t+\theta}}{\partial K_i^t}+\frac{\partial F^{t+\theta}}{\partial K_1^t}\,\frac{\partial F^t}{\partial K_i^t}=\left\{\theta\frac{\partial f^{t+\theta}}{\partial K_i^t}-\frac{\partial f^{t+\theta}}{\partial \hat{K}_i^{t+\theta}}\right\}+\left\{\theta\frac{\partial f^{t+\theta}}{\partial K_1^t}+1\right\}\cdot\left\{\frac{\partial f^t}{\partial_i\hat{K}^t}\right\}=0$$

$$(i=2, \cdots\cdots, n).$$

適當に整頓して θ で割れば，

$$\frac{\dfrac{\partial f^{t+\theta}}{\partial \hat{K}_i^{t+\theta}}-\dfrac{\partial f^t}{\partial \hat{K}_i^t}}{\theta}=\frac{\partial f^{t+\theta}}{\partial K_i^t}+\frac{\partial f^{t+\theta}}{\partial K_1^t}\,\frac{\partial f^t}{\partial \hat{K}_i^t}$$

$$(i=2, \cdots\cdots, n)\cdot$$

$\Delta t=\theta\to 0$ の極限においては左邊 $\Delta\{\partial f/\partial\hat{K}_i\}/\Delta t$ は $d\{\partial f/\partial\hat{K}_i\}/dt$ となるから，結局

$$\frac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial \hat{K}_i}\right)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial K_i}+\frac{\partial f}{\partial K_1}\,\frac{\partial f}{\partial \hat{K}_i}$$

$$(i=2, \cdots\cdots, n)$$

が成立する。これは連續的なモデルの最適條件 (8) に他ならない。依って，補論の目的は達せられる。

＊　　＊　　＊

《あとがき》 本文中の第3圖および第5圖は，印刷の都合上ほかの圖に比べて縮尺されています。その點に留意して御覽下さい。