レオンチエフ體系と極大原理

山　田　　勇

I　レオンチエフ體系への極大原理導入の二．三の試み

レオンチエフが 1941 年に出版した著書[1]において取扱った

(1)　　$x_{ik}=a_{ik}X_i$

（X_i は第 i 部門の純アウトプットの數量，x_{ik} は第 k 部門から流れてきた第 i 部門のインプットの數量，a_{ik} はこの場合の投入係數である）は，かれも明言しているように，生產函數として考えられている[2]。したがって，かれの創設したいわゆるレオンチエフ體系には，何等かの經濟量を極大にするような原理は含まれていないと考えるのが妥當であろう。

ところで，いままでレオンチエフ體系に極大原理を導入した研究として注目すべきものにサムエルスン[3]とクライン[4]とがある。サムエルスンの業績はすでに周知のところであるが，ここにその要點だけを記してわれわれの問題の關連とを考察し，またクラインの研究にも一べつを與えて參考にしよう。

まず，サムエルスンの場合を考察しよう。

レオンチエフによれば，最終需要(ultimate demand, final demand, final bill of goods)とは，中間需要(intermediate demand)に對する言葉であって，後者が從屬變數として取扱われるのに對して，これは獨立變數の性質を有する[5]。いま第 i 部門の總アウトプットを Y_i とし，その最終需要を C_i，中間需要を x_{ji} とすると

(2)　　$Y_i=C_i+\sum_{j=1}^{n}x_{ji}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

第 $n+1$ 番目の部門を家計部門とし，ここで生產せられる勞働量を Y_{n+1} とすれば

(3)　　$Y_{n+1}=0+\sum_{j=1}^{n}x_{j,\,n+1}$

つぎに一次同次の生產函數

(4)　　$Y_i=F_i(x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots,\ x_{i,\,n+1})$

$$=mF_i\left(\frac{x_{i1}}{m},\cdots,\frac{x_{i,n+1}}{m}\right)$$

を導入する。ところで，サムエルスンにおいては，これらの C_i のうち，任意の C_i たとえば C_1 の極大を求めるのに，他のすべての C および勞働の一定量 Y_{n+1} の制約條件のもとに，これを行うことを試みている。すなわち

$$\lambda_1C_1+\lambda_2\Big(F_2-\sum_{j=1}^{n}x_{j2}-C_2\Big)+\cdots$$

この式を x_{jk} に關して微分して，つぎに λ_i を消去することにより，C_1 の極大條件として

(5)　　$\dfrac{\partial F_1}{\partial x_{11}}=1,\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{1i}}\dfrac{\partial F_i}{\partial x_{ij}}=\dfrac{\partial F_1}{\partial x_{1j}}\qquad \begin{cases} i=2,\ \cdots,\ n \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \end{cases}$

をうる。

さて，C は，前述の如く，最終需要であって，これには直接家計部門の消費にあてられる部分と投資とが含まれる[6]。このような C のうち，ある特定の部門，たとえば C_1 の極大ということは，いいかえれば，この特定部門のアウトプットのうち，家計消費と投資とに向けられる需要の極大ということにほかならない。しかも，サムエルスンの場合は他のすべての部門の最終需要と一定の勞働量との關連のもとに，當該部門の最終需要の極大が考えられている。このような量の極大の經濟的意味は，いわゆる徵視的な經濟行動，すなわち個々の企業者，個個の消費者の經濟行動ではなく，むしろこれとは異る總體的な政策目的に關係あるものとして考えられよう。

これに對して，クラインの場合は，徵視的經濟行動としての極大原理をレオンチエフ體系に導入しようと試みたことは明らかである。すなわち，かれは，まず價格というような市場的要素とは獨立に，技術的關係式としてつぎの生產函數を提案する。

---

1) W. W. Leontief, *The Structure of American Economy*, 1919—1929, Cambridge, Mass., 1941.

2) W. W. Leontief, *The Structure of American Economy*, 1919—1939, 2nd ed., New York, 1951, p. 37, p. 144.

3) P. A. Samuelson, Abstract of a System concerning Substitutability in Open Leontief Models, *Activity Analysis of Production and Allocation*, New York, 1951, pp. 142—146.

4) L. R. Klein, On the Interpretation of Professor Leontief's System, *Review of Economic Studies*, Vol. 20, 1953, pp. 131—136. Ditto, *A Textbook of Econometrics*, Evanston, Ill., 1953, pp. 201—211.

5) Leontief, *The Structure*, 2nd ed., p. 147.

6) Leontief, *The Structure*, 2nd ed., p. 143, p. 168.

$$(6)\quad F_i(Y_i^{(1)},\cdots,Y_i^{(s)};\ x_{i1}^{(1)},\cdots,x_{i1}^{(r)};\ \cdots;\ x_{in}^{(1)},\cdots,x_{in}^{(t)})=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

そして競爭市場においては

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_i}{\partial Y_i}=-\lambda_i P_i \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial x_{ik}}=\lambda_i P_k \end{cases}$$

という式を導いているが，これは明らかに

$$(8)\quad \pi_i=P_iY_i-\sum_{k=1}^{n}P_kx_{ik}$$

という經濟餘剰 π_i を，(6) 式の制約のもとに，極大ならしめた結果である。この π_i をかれの言葉でいいあらわせば，「利潤」であって，(7) 式は「利潤極大の條件」にほかならない[7)]。

II　經濟餘剰極大の經濟的意味

以上によってサムエルスンとクラインのレオンチエフ體系における極大原理を説明した。筆者がさきに發表した極大原理は，このうちのクラインのものと同巧異曲のものであるといえよう[8)]。

さきに筆者の採用した生產函數はダグラス函數の一般形

$$(9)\quad Y_i=A_i\,x_{i1}^{b_{i1}}\,x_{i2}^{b_{i2}}\cdots x_{in}^{b_{in}} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

であって，これはサムエルスンの一次同次の生產函數(4)式の特殊型であり，またクラインの生產函數[9)]

$$\Sigma\beta_i^{(s)}[Y_i^{(s)}]^{\beta}-A\prod_k\prod_r[x_{ik}^{(r)}]^{a_{ik}^{(r)}}=0$$

の左邊第2項に類似の形となる。

このような生產函數を想定して，各部門の經濟餘剰（S_i は繰越量である）

$$(10)\quad \pi_i'=P_i(Y_i-S_i)-\sum_{k=1}^{n}P_kx_{ik} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

の極大を求める場合の條件を吟味した。その結果は

$$(11)\quad b_{ik}=\frac{P_kx_{ik}}{P_iY_i} \qquad \begin{cases} i=1,2,\cdots,n \\ k=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

となる[10)]。上式において，右邊の分母，分子はレオンチエフ表に現實に記入されている計數であり，この點レオンチエフの投入係數の推定が本質的にかれの生產函數における投入係數の性格と矛盾する點を，この方法によって回避出來ることを指摘した[11)]。

ところで，このような意味の經濟餘剰の極大は何を意味するか。クラインは明らかにこれを「利潤極大」(profit maximization) といっている[12)]。これは企業部門にとって妥當する言葉である。そして個々の企業の最終目的は，このような利潤の極大である。この意味においてこれは個々の企業の經濟行動をあらわしている。クラインの場合も筆者の場合も，內生部門として家計を考えるのであるが，この家計部門における「利潤極大」ないしは「經濟餘剰の極大」はどのような經濟的意味があるか。これは特別な注意が必要であるので，次節に改めて説明する。

III　家計部門と極大原理

家計部門を第 n 部門とすれば，この場合の經濟餘剰はつぎの如くあらわされる。

$$(12)\quad -P_1x_{n1}-\cdots-P_{n-1}x_{n,\,n-1}+P_n(Y_n-S_n-x_{nn})=\pi_n'$$

すなわち家計における經濟餘剰 π_n' は家計總收入 $P_n(Y_n-S_n-x_{nn})$ から家計費の總額 $P_1x_{n1}+P_2x_{n2}+\cdots+P_{n-1}x_{n,\,n-1}$ を差引いた殘餘である。この場合の π_n' を極大にするということは，近代理論で考えるような效用極大の條件とは必ずしも一致しない[13)]。しかし現實の經濟構造の統計的分析という立場——これがレオンチエフ體系の主要な特質であることには，何人も異論はないであろう——から見れば，測定不可能と考えられる效用極大という立場を捨てて，測定可能な上述の意味の經濟餘剰の極大を求めるという問題を，考察の對象とするこ

---

7) (7) 式を導く場合に，$\dfrac{\partial Y_i}{\partial x_{ik}}=0$ としなければならない。もしそうだとしたら，$\dfrac{\partial Y_i}{\partial x_{ik}}=0$ に對して疑問の餘地があるが，これはここでの主題ではないので，問題にはしないこととする。

8) 拙稿「レオンチエフ體系と生產函數」(「經濟研究」1952 年 7 月號，pp. 191—196.) 拙稿「レオンチエフ體系の計測について」(「經濟研究」1954 年 1 月號，pp. 10—17.)

9) L. R. Klein, On the Interpretation, p. 135.

10) 筆者のこの試みはサムエルスン，クラインの研究とは全く獨立に行われたものであるが，(11) 式の結果においてはクラインのものと同一となつた。勿論クラインの場合と筆者の場合とでは，レオンチエフ體系は異り，分析の方法も相違する。(cf. Klein, *A Textbook*, p. 206.)

11) 拙稿「レオンチエフ體系の計測について」p. 16.

12) Klein, *A Textbook*, p. 206.

13) いま普通の效用極大の條件をこのようなレオンチエフ體系に適用してみよう。效用函數は

$$u=u(x_{n1},\ x_{n2},\ \cdots,\ x_{nn};\ s_n) \qquad \text{(i)}$$

上式において s_n は貯蓄であり，これは將來財の購入にあてられるものと考える。またこの場合の豫算制約式は

$$P_nY_n=\sum_{i=1}^{n}P_ix_{ni}+s_n \qquad \text{(ii)}$$

(ii) 式の制約のもとに (i) 式の效用を極大ならしめる

とは，レオンチエフの體系の分析においては，避け難い問題といわねばならず，さらにまた，家計以外の他の部門，とくに企業部門と統一的に操作するうえにおいても，必要なことである。もし，以上の２つの點を無視して，從來の消費者選擇の理論をこれに適用しようとすれば，現在までのところ，家計部門についてはこれを外生部門として取扱う必要が生じ，レオンチエフ體系の分析方法の効果を著しく減殺することとなろう[14]。

この問題に關連して，もう１つの點を注意しておこう。それは π_n' の極大の條件を導出する場合に用いた，家計部門におけるダグラス型生産函數

(13)　$Y_n = A_n x_{n1}^{b_{n1}} x_{n2}^{b_{n2}} \cdots\cdots x_{nn}^{b_{nn}}$

の意味についてである。これについてもすでに述べたところであるが[15]，もう一度ここで補足しながら繰り返しておく。第 n 部門，すなわち家計部門で生産せられるアウトプットは勞働であるが，この場合のインプットは x_{n1}，x_{n2}，……，x_{nn} という生活資材であって，家計はこれらの生活負材をインプットとして使用して，勞働というアウトプットを生産するものと考える。(13)式はすべて物量的な關係をあらわしており，貨幣的な概念は入っていないものと解釋する。この意味において，(13)式はいわゆる消費函數でないことは勿論である。さらにまた，(13)式は效用函數でないことも明らかであろう。このような家計における生産函數は，從來の理論にはなかった新らしい概念といっても差支えないであろう。

IV　極大原理と經濟計畫

まえに説明した如く，筆者の極大原理は，個々の企業および個々の家計の經濟行動の最終目的として理解すべきものである。このような經濟行動の意味は，レオンチエフ方式を１つの計畫方式として考える場合，その意味が一層明白になるであろう。すなわち，いま經濟計畫の當局が，計畫變數（この場合の計畫變數は主として價格と投入係數とであるが，このうち投入係數は本質的には技術的に決定せられるもので，これの計畫變數としての意味は，第一義的には，薄いものと考えられる）を與えておけば，これを基礎として，個々の企業ないし家計は，自己の經濟餘剰を極大ならしめるように行動する。したがってこのような，いわばランゲ流の經濟計畫において，經濟諸量の豫測を行う場合，さらにまた，計畫變數を與えた場合落着くべき將來の經濟構造を，このような分析を通じて豫見することが，一應理論的には可能となるであろう。そして，もしこのような極大原理を抜きにしたレオンチエフ體系を計畫方式として採用するような場合には，これを考慮した上述の場合の計畫方式よりも，一層高度の統制を必要とすることは明らかであろう。このことを一層詳しく説明するために，例として需給方程式をとる。筆者の分析においては需給方程式は

$$Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_{ik} = S_i'' - S_i' \equiv S_i \qquad (k=1, 2\cdots, n)$$

である。ここに S_i' は前期からの繰越量，S_i'' は後期への繰越量をあらわす。このような S もまた與件なのであるが，このうち S_i' は當該期間においては當然パラメーターとして取扱われ，さらに S_i'' は計畫變數として考えてもよく，また各部門において自然に發生するストックの豫想量として，計畫變數から除外してもよく，さら

條件は

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_{n1}}}{P_n\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{n1}}-P_1}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_{n2}}}{P_n\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{n2}}-P_2}=\cdots=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_{nn}}}{P_n\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{nn}}-P_n}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial s_n}}{P_n\dfrac{\partial Y_n}{\partial s_n}-1} \qquad \text{(iii)}$$

となる。

これに對して經濟餘剰 π_n' を極大ならしめる條件は，つぎの如くである。

$$P_n\frac{\partial Y_n}{\partial x_{n1}}-P_1=P_n\frac{\partial Y_n}{\partial x_{n2}}-P_2=\cdots=P_n\frac{\partial Y_n}{\partial x_{nn}}-P_n=0 \qquad \text{(iv)}$$

あるいは，上述の普通の消費者選擇の理論と對應させるために，(i) 式を變形して

$$f(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nn};\ u)=0 \qquad \text{(i)}'$$

とし，これを制約條件として (12) 式の π_n' を極大ならしめる條件を求めれば，つぎの結果がえられる。

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_{n1}}}{P_n\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{n1}}-P_1}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_{n2}}}{P_n\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{n2}}-P_2}=\cdots=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_{nn}}}{P_n\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{nn}}-P_n} \qquad \text{(v)}$$

(i) 式と (iv) 式もしくは (i) 式と (v) 式とは一般に異るものであり，したがつて，π_n' を極大にする條件と，u を極大にする普通の場合の條件とは必ずしも等しくない。

14) この點について家本教授は「産業相互關連の input-output 的分析方法について」(「經濟研究」1954 年 1 月號 p. 5) において筆者の方法に反對しておられるが，これに對する回答は，すでに拙稿「レオンチエフ體系と生産函數」(「經濟研究」1952 年 7 月號 p. 195) でも述べたところであり，さらに上述するところによって筆者の考え方を述べたのである。

15) 拙稿「レオンチエフ體系と生産函數」(「經濟研究」1952 年 7 月號，p. 195.)

にまた，レオンチエフの 1939 年の分析の如く，これを內生變數として方程式の左邊へ移項することも可能である。もしこれを第2の性格のもの，すなわち各部門が自主的に決定する豫想量として取扱うときは，このような計畫方式における計畫變數は價格のみとなり，統制はその限りにおいて考えればよい。これに反して，レオンチエフ自身の方式

$$-X_i+\sum_{i=1}^{n}x_{ik}=0 \qquad (i\neq k,\ k=1,2,\cdots,n)$$

において，これを計畫方式として採用する場合は，需要と供給とが各部門每に必ず均等することが必要であり，これには高度の統制を必要とするであろう[16]。

V 部門の統括と極大原理

最後に，部門を統括 (consolidate) した場合，統括前の個別部門の極大原理と，統括部門の極大原理との關係はどうなるか。この問題はいわゆる「總體の問題」(aggregation problem) として一般的に取扱われてきた問題である[17]。しかし，レオンチエフ體系における統括の問題は多少その取扱を異にすることは，「以下の考察の示すところである。いま，統括すべき部門を第 m 番目から第 s 番目までとし，この統括した部門を第 r 番目とする。問題を2つに分け，生產函數と投入係數とを考察しよう。

A 第 r 番目の部門

第 m 部門から第 s 部門までの生產函數は

$$(14)\quad \begin{cases} Y_m=A_m x_{m1}^{b_{m1}}\cdots x_{mm}^{b_{mm}}\cdots x_{ms}^{b_{ms}}\cdots x_{mn}^{b_{mn}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_s=A_s x_{s1}^{b_{s1}}\cdots x_{sm}^{b_{sm}}\cdots x_{ss}^{b_{ss}}\cdots x_{sn}^{b_{sn}} \end{cases}$$

統括部門の生產函數を

$$(15)\quad Y_r=A_r x_{r1}^{b_{r1}}\cdots x_{rr}^{b_{rr}}\cdots x_{rn}^{b_{rn}}$$

とする。さてつぎの假定を設ける。

$$(16)\quad Y_r=\left[Y_m^{P_mY_m}\cdots Y_s^{P_sY_s}\right]^{\alpha}$$

$$(17)\quad x_{ri}^{b_{ri}}=\left[R_i(x_{mi}^{b_{mi}})^{P_mY_m}\cdots(x_{si}^{b_{si}})^{P_sY_s}\right]^{\alpha}$$
$$(i=1,\cdots,m-1,s+1,\cdots,n)$$

$$(18)\quad x_{rr}^{b_{rr}}=\left[R_r(x_{mm}^{b_{mm}}\cdots x_{ms}^{b_{ms}})^{P_mY_m}\cdots(x_{sm}^{b_{sm}}\cdots x_{ss}^{b_{ss}})^{P_sY_s}\right]^{\alpha}$$

ただし，$\alpha=1/(P_mY_m+\cdots+P_sY_s)$ をあらわし，R はある常數である。ところで，いま

$$x_{mi}=r_{m+1,i}\,x_{m+1,i}=\cdots=r_{si}x_{si}$$
$$(19)\quad x_{mm}=r_{m,m+1}x_{m,m+1}=\cdots=r_{ms}x_{ms}$$
$$=r_{sm}x_{sm}=\cdots=r_{ss}x_{ss}$$

とすれば

$$(20)\quad \begin{cases} b_{ri}=\dfrac{b_{mi}P_mY_m+\cdots+b_{si}P_sY_s}{P_mY_m+\cdots+P_sY_s} \\ \qquad\qquad (i=1,\cdots,m-1,s+1,\cdots,n) \\ b_{rr}=\dfrac{b'P_mY_m+\cdots+b''P_sY_s}{P_mY_m+\cdots+P_sY_s} \end{cases}$$

がえられる。ただし， $b'=b_{mm}+\cdots+b_{ms}$； $b''=b_{sm}+\cdots+b_{ss}$.

統括前の個別部門の極大條件は (11) 式であらわされるが，これを (20) 式に代入すれば

$$\begin{cases} b_{ri}=\dfrac{P_ix_{mi}+\cdots+P_ix_{si}}{P_mY_m+\cdots+P_sY_s} \\ b_{rr}= \\ \dfrac{P_mx_{mm}+\cdots+P_sx_{ms}+\cdots+P_mx_{sm}+\cdots+P_sx_{ss}}{P_mY_m+\cdots+P_sY_s} \end{cases}$$

上式は統括部門についての極大條件にほかならない。したがって，上記の場合には，個別部門の極大條件は，統括部門の極大條件とは矛盾しない。

B その他の部門

統括部門以前の生產函數は，統括前では

$$(22)\quad Y_i=A_ix_{i1}^{b_{i1}}\cdots x_{im}^{b_{im}}\cdots x_{is}^{b_{is}}\cdots x_{in}^{b_{in}}$$
$$(i=1,\cdots,m-1,s+1,\cdots,n)$$

であるに對し，統括後は

$$(23)\quad Y_i=A_ix_{i1}^{b_{i1}}\cdots x_{ir}^{b_{ir}}\cdots x_{in}^{b_{in}}$$

この場合には (17) 式を假定する。さらに

$$(24)\quad x_{im}=r_{i,m+1}x_{i,m+1}=\cdots=r_{is}x_{is}$$

とおけば

$$(25)\quad b_{ir}=\frac{(b_{im}+\cdots+b_{is})P_iY_i}{P_iY_i}=b_{im}+\cdots+b_{is}$$

(11) 式を使用して

$$(26)\quad b_{ir}=\frac{P_mx_{im}+\cdots+P_sx_{is}}{P_iY_i}$$

これまた，統括後における統括部門以外の部門の極大條件にほかならない。

これを總括して結論を述べれば，われわれの修正體系においては，統括前の極大條件と統括後の極大條件とは，上述の條件を滿足するかぎり，矛盾しないということができる。これは統括についての技術的な條件を教えるものである。

---

16) このような「餘剩極大」が何を意味するかについて家本教授は筆者に疑問を投げておられるが（家本秀太郎，「產業相互關連の input-output 的分析方法について」p. 4.)，一部門を構成する產業は，レオンチエフ分析においては，理論的には單數であると解釋している筆者にとっては，以上の說明がある程度同教授の質問に對する回答となったと考える。

17) この問題に關する各種の論文のうち，この場合參考になるのは，L. R. Klein, Macroeconomics and the Theory of Rational Behavior, *Econometrica*, Vol. 14, No. 2—April 1946, pp. 93—108. および拙稿「微視的經濟理論と巨視的經濟理論との關連について」(「統計數理研究」第 2～3 號，1948～49, pp. 1—13.