經濟學に於ける極値問題

古 瀬 大 六

1. 序

經濟科學に於ける極値問題は，2つの異った意義をもつ。1つは經濟均衡把握のための理論的用具としての意義であり，それは個別均衡に對してばかりでなく，ノイマン等により一般均衡理解のためにもまた有效であることが示されるに至った。

他の1つは合理的行動のための實踐的武器としてであり，最近の恐るべき能力をもつ電子管式計算機の出現と，線形計畫法理論による非負値條件・不等式拘束の導入とは，極値問題の意義をいよいよ大きなものにしつつある。計畫法算法が個別經濟主體の合理的決定を助けるだけでなく，一國の經濟の計畫化をも可能ならしめるのも遠いことではないであろう。

2. 單一極大問題

n 次元正則ジョルダン曲面を $z=g(x)$ とする。z の連續的增加に對應して此の曲面が連續的にその內部に移行し，且つ1つの z の値に對して唯一つの曲面が對應するならば，n 次元空間の全體は，これらの互に交ることのない曲面群によって餘すところなく覆われ，その唯一の中心點 (x^0) に於て z の値は極大 z^0 となる。

この極大點を求めるには，周知の如く，$\partial g/\partial x_i=0$, $(i=1, \cdots\cdots, n)$ なる聯立方程式を解けばよい。然し，高次の聯立代數（又は超越）方程式を解くことは容易でない。この難點を避けるには，同時方程式の微分解析機による解法[1]として既に知られているように，

$$\dot{x}_i=\partial g/\partial x_i \qquad (i=1, \cdots\cdots, n) \qquad (1)$$

なる聯立異時微分方程式の定常解として極大點 (x^0) を求める方法を利用すればよい。これを適當に定差方程式化すれば，單純な數値計算の繰返しによって，算術的に解を求めることができる。

この方法は計算技術的に優れているばかりでなく，次のような理論的長所をも具えている。即ち，問題を一般均衡モデルとして理解しようとする場合，同時方程式からはヒックス流の靜學的・局地的安定條件しか知り得ないのに對し，(1) によるならばサミュエルソン流の動學的・全域的安全條件をも確定することができる。

1) Korn and Korn, *Flectronic Analog Computers*, McGraw-Hill, 1952, p. 111.

3. 極大點の安定性

聯立微分方程式 (1) の安定性を知るには，特性根を算出して解析的・量的に檢討するよりも，位相曲面とその特異點の概念[2]によって位相幾何學的・質的に問題を把む方が簡單である。

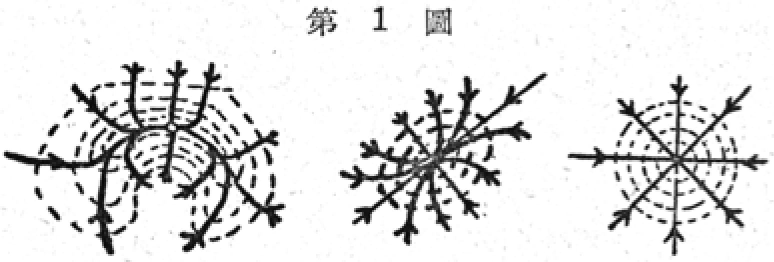
種々の初期値に對する (1) の解の時間的移動徑路は

$$\frac{dx_j}{dx_i}=\frac{\partial g/\partial x_j}{\partial g/\partial x_i} \qquad (i, j=1, \cdots\cdots, n;\ i\neq j)$$

で表わされる。これらの n 次元空間曲線群は，總ての等 z 面上の總ての點に於て等 z 面に直交し[3]，互に交ることはない。更に $g(x)$ が 2 節の條件を充すならば，これら曲線群は t の增加につれて悉く極大點 (x^0) に向って收斂する。即ち，初期値の如何に拘らず (1) の解は (x^0) に收斂し，從って (x^0) 點は全域的安定性を持つ。

種々の $g(x)$（點線）に對する (1) の解の移動徑路（實線）を示せば下圖の如くである。

第 1 圖



$g(x)$ と (1) の解との間の關係は，物理學に於けるポテンシャル函數と指力線との間の關係と全く同じである。

4. 單一極小問題

$g(x)$ の極小問題は $-g(x)$ の極大問題に外ならない。從って (1) は

$$\dot{x}_i=-\partial g/\partial x_i \qquad (i=1, \cdots\cdots, n)$$

と改められることになる。

5. 單一鞍點問題

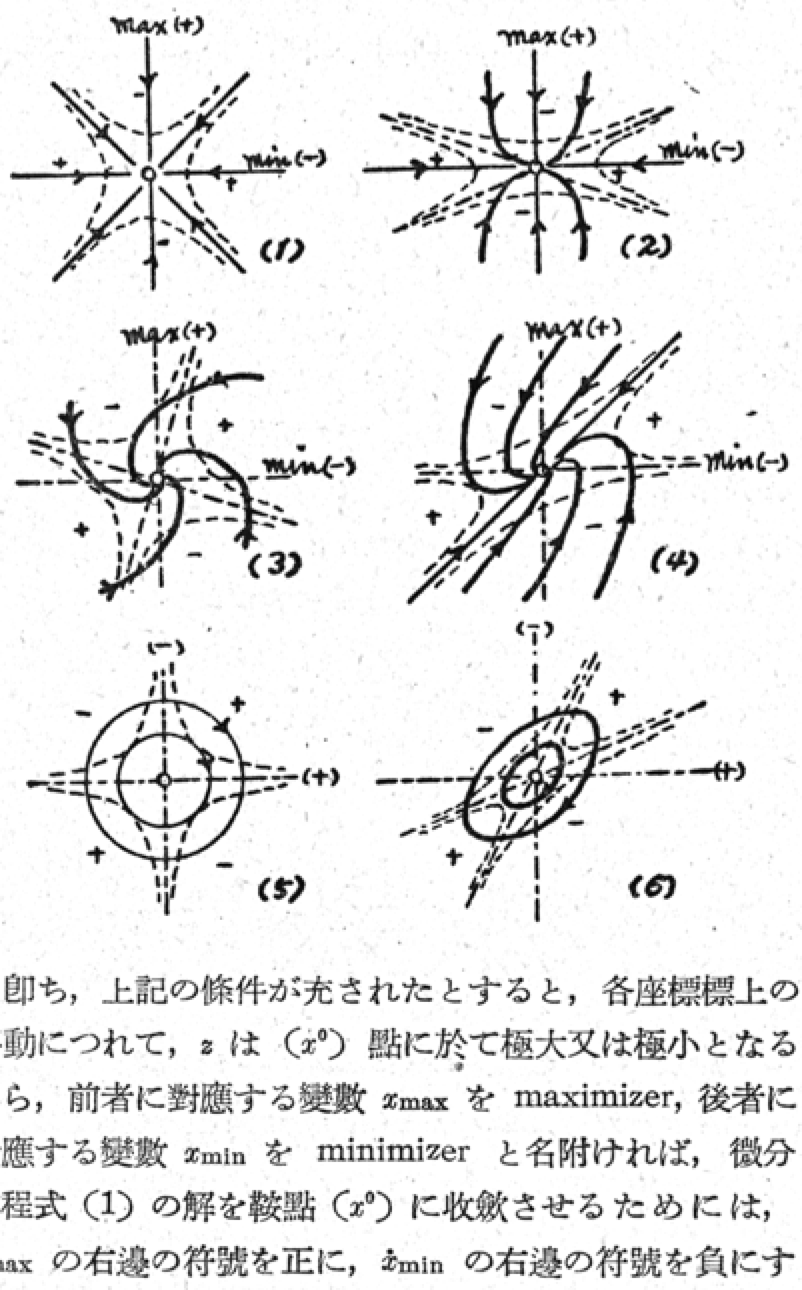
ゲーム・一般均衡方程式・拘束條件附極値問題の解は通常 $g(x)$ の鞍點を形成する。この鞍點 (x^0) に於ける z の値を z^0 とする。

2) Stoker, J. J., *Nonlinear Vibrations*, *Interscience*, 1952.

3) 寺澤寛一，自然科學者のための數學概論，岩波，p. 285.

$z^0=g(x)$ なる超曲面で全空間を幾つかに分割した場合，(x^0) を原點とする n 本の直交座標軸の何れか一つが何れか一つの領域の內部（その中の若干は境界面上に存在しても差支ない）を必ず通過し，座標軸の通過しない領域が一つも存在しないならば（第2回 (1), (2), (3), (4))，完全收斂性をもつ微分方程式を作ることができる。然らざる場合には發散又は非減衰振動解しか得られない（第2回，(5), (6))。

第 2 圖



即ち，上記の條件が充されたとすると，各座標標上の移動につれて，z は (x^0) 點に於て極大又は極小となるから，前者に對應する變數 x_{max} を maximizer, 後者に對應する變數 x_{min} を minimizer と名附ければ，微分方程式 (1) の解を鞍點 (x^0) に收斂させるためには，$\dot{x}_{max}$ の右邊の符號を正に，$\dot{x}_{min}$ の右邊の符號を負にすればよい。

鞍點を通過する座標軸が $z^0=g(x)$ 曲面上を通るときは（第2回，(4), (5))，その座標軸上を移動しても z の値は變らない。然し，この面を境とする2つの區域のうち何れか一方を他の座標軸が通過しているならば（第2圖，(4))，曲面上の座標軸に對應する變數は，その隣りの座標軸に對應する變數が x_{max} であるか x_{min} であるかに應じて，x_{min} 或は x_{max} として取扱うことができる。ラグランジュ乘數は一般に此の種の minimizer としての機能を有する。

6. 多重極值問題

極值又は鞍點が同一空間內に2つ以上存在するときは，全空間は，それぞれの極值點又は鞍點について，その點に上記の微分方程式の解を收斂させることのできる區域と，然らざる區域とに分割される。

7. 非負值條件

一般均衡方程式の數と，それに含まれる變數の數とが等しければ，均衡值は一義的に定まる，と考えるのがワルラス以來の傳統になっている。然し，これだけでは解が負にならないという保證は全くない。負價格・負在庫量などの經濟的に無意味な解が混入しないようにするためには，シュレーズィンガー，ワルトの指摘したように[4]，非負值條件を積極的に導入して解かねばならない。實踐的役割を重んずる最近の計畫法に於ては，特にこのが强調されている。

この非負值條件附極值問題を解くには，$z=g(x)$ 曲面が各變數 x について凸であり且つ解析的であるならば，同時方程式 $\partial g/\partial x_i=0$, $(i=1, \cdots\cdots, n)$ を解いて，その解のうちで負となるものがあればそれを零と置いた上で，再びこれを解き直せばよい。

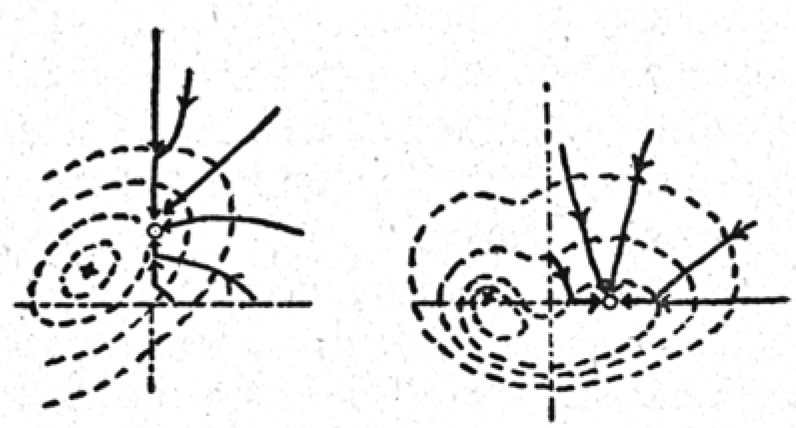
このような條件の成立たない場合には，先に示した聯立微分方程式 (1) を次のように變形することによって，非解析的・非凸の場合にもその非負解を得ることができる。

$$\dot{x}_i=\partial g\{\varphi(x)\}/\partial x_i \qquad (i=1, \cdots\cdots, n)$$
$$\varphi(x)=\max(0,\ x)$$

これも，定差方程式化すれば簡單な算術計算の繰返しですみ，ＩＢＭ等のカード式計算機を使えば短時間に收斂させることができる。

極小值，鞍點解の場合も，x の代りに同樣に $\varphi(x)$ を代入すればよい。

第 3 圖



4) Wald, A., On the Systems of Equations of Mathematical Economics, *Econometrica*, Oct., 1951, p. 372.

8. 不等式拘束條件

拘束條件附極値問題は從來總て，古典力學の傳統に從い，ラグランシュ乘數法によって解析的に解き得るところの等式拘束についてのみ論ぜられてきた。然し，一般均衡に於ける資源・勞働供給の限界，企業均衡に於ける固定設備の制約等は，寧ろ不等式として扱われるべきものである。

これは勿論從來の同時方程式解法では解き得ない。これを (1) の聯立微分方程式によって解くためには，6 節の非負値條件をも合せ考えること，即ち一般に計畫法の問題として取扱うことを必要とする。

$h_i(x) \geqq 0$, $(i=1, \cdots\cdots, m)$ なる拘束の下で，$g(x)$ を最大ならしめるところの解を x^0 とすれば，それは

$$\phi(x,\ u) \equiv g(x) + \sum_1^m u_i h_i(x), \qquad u \geqq 0$$

で定義される函數 ϕ の鞍點解，即ち

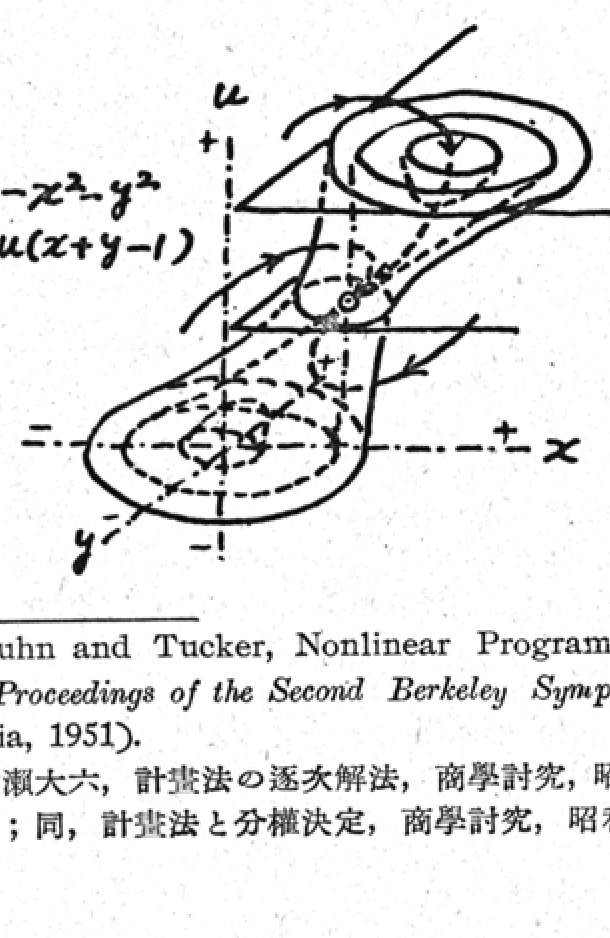
$$\min_u \ \max_x \phi(x,\ u) = \phi(x^0,\ u^0), \qquad u \geqq 0$$

を滿足する解 x^0 に一致する[5]。從ってそれは，ϕ が 4 節の條件を充すならば

$$\begin{cases} \dot{u}_i = -\partial\phi/\partial u_i = -h_i(x) & (i=1, \cdots\cdots, m) \\ \dot{x}_j = \partial\phi\{x, \varphi(u)\}/\partial x_j = \partial g/\partial x_j + \sum_{i=1}^{n} \varphi(u_i)\partial h_i/\partial x_j & \\ & (j=1,\ \cdots\cdots, n) \end{cases} \qquad (2)$$

なる聯立微分方程式の定常解として求めることができる[6]。更に x をも非負ならしめようとするならば，上記の聯立微分方程式の右邊の x に悉く $\varphi(x)$ を代入すればよい。

第 4 圖



5) Kuhn and Tucker, Nonlinear Programming, p. 481, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium*, California, 1951).

6) 古瀬大六，計畫法の逐次解法，商學討究，昭和 27 年 11 月；同，計畫法と分權決定，商學討究，昭和 28 年 7 月

9. 線形計畫法

$g(x)$ と $h(x)$ とが何れも線形であるときは，即ち線形計畫法に於ては，(2) の解は非減衰振動を續ける。これを鞍點 x^0 に收斂させるには，比例制御の外に豫想制御[7]をも加えて，次のように修正しなければならない。

$$\begin{cases} \dot{u}_i = -\dfrac{\partial\phi\{\varphi(x)\}}{\partial u_i} - \dfrac{\partial\dot{\phi}\{\varphi(x)\}}{\partial u_i} & \\ & (i=1, \cdots\cdots m) \\ \dot{x}_j = \dfrac{\partial\phi\{\varphi(x), \varphi(u)\}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\dot{\phi}\{\varphi(x), \varphi(u)\}}{\partial x_j} & \\ & (j=1, \cdots\cdots, n) \end{cases} \qquad (3)$$

即ち，目的函數を $c'x$，拘束を $b-Ax \geqq 0$ とすれば

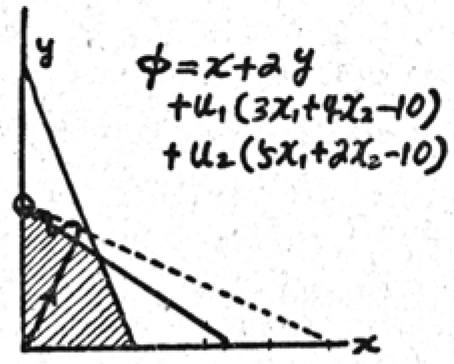
$$\phi \equiv c'x + u'(b - Ax)$$

となり，從って (3) は

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi(x_j) - b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{\varphi}(x_j) & \\ & (i=1, \cdots\cdots, m) \\ \dot{x}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varphi(u_i) - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\dot{\varphi}(u_i) & \\ & (j=1, \cdots\cdots, n) \end{cases} \qquad (4)$$

となる。

第 5 圖



10. 經濟的意味

$g(x)$ を一企業の利潤，$h(x) \geqq 0$ を固定生產要素の存在に基く拘束とすれば，(2) 式によって最大利潤活動計畫を算出することができるし，$g(x)$ を社會厚生函數，$h(x) \geqq 0$ を資源の供給限界と考えれば，これから，國民經濟に於ける最適經濟計畫を決定することができるであろう。

上記の聯立微分方程式はまた，單にこのような計算技術を意味するだけでなく，變數の數が莫大な場合には，これを $(m+n)$ 人の獨立的經濟主體間の現實の又は假構的な市場機構を通じて分擔決定せしめ得ることを示唆している。この際，u は各生產資源の市場價格，又は各固定設備使用の內部振替價格に外ならない[7]。

7) James, Nichols and Phillips, *Theory of Servomechanism*, McGraw-Hill, 1947. p. 3.