レオンチエフ體系の計測について

山　田　　勇

I. はしがき

筆者は，すでに本誌において，ダグラスの生産函数を導入することにより，レオンチエフ體系の計測を可能にするような1つの試論を發表した[1]。すなわち，X を生産物の量，x をそれを生産するに必要な生産要素の量とするとき，X と x とが，原理としては，$x_{ij}=a_{ij}X_n$ というい わゆる limitational な關係であらわされることがレオンチエフの考えた生産函数の特色である。これに對して，$X_i=f(x_{i1}, x_{i2}, \cdots\cdots, x_{in})$ の1つの形として substitutional なダグラス型の生産函数を採用し，これに經濟餘剩極大の條件を導入することを試みた。その結果は計測に堪えうるような結論をえた。いま，本稿通讀の便宜のために，その要點を再錄することとしよう。

まず，需要・供給の數量關係式として

$$(1)\begin{cases}(Y_1-x_{11})-x_{21}-\cdots-x_{n-1,1}-x_{n1}=0\\ -x_{12}+(Y_2-x_{22})-\cdots-x_{n-1,2}-x_{n2}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -x_{1n}-x_{2n}-\cdots-x_{n-1,n}+(Y_n-x_{nn})=0\end{cases}$$

をうる。ここに Y_i は第 i 部門の總生産量をあらわし，x_{ij} は第 j 部門の生産物のうちから第 i 部門へ配分せられた量をあらわす。また第 n 部門は家計部門とすることはレオンチエフの場合と變りがない。

さらに收支の關係式はつぎのように與えられる。

$$(2)\begin{cases}P_1(Y_1-x_{11})-P_2x_{12}-\cdots-P_{n-1}x_{1,n-1}\\ \qquad -P_nx_{1n}=\pi_1\\ -P_1x_{21}+P_2(Y_2-x_{22})-\cdots-P_{n-1}x_{2,n-1}\\ \qquad -P_nx_{2n}=\pi_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -P_1x_{n1}-P_2x_{n2}-\cdots-P_{n-1}x_{n,n-1}\\ \qquad +P_n(Y_n-x_{nn})=\pi_n\end{cases}$$

P_i は第 i 部門の生産物の價格であり，π_i は第 i 部門の經濟餘剩，すなわち配分總量 $(=Y_i-x_{ii})$ から費用總額を差引いたものである。そこで，いま，P_i をパラメーターとして，π_i の極大條件を求めると，(2) 式から

$$(3)\begin{cases}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_{11}}=1,\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_{12}}=\dfrac{P_2}{P_1},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_{1,n-1}}\\ \qquad =\dfrac{P_{n-1}}{P_1},\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_{1n}}=\dfrac{P_n}{P_1}\\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial x_{21}}=\dfrac{P_1}{P_2},\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial x_{22}}=1,\ \cdots,\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial x_{2,n-1}}\\ \qquad =\dfrac{P_{n-1}}{P_2},\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial x_{2n}}=\dfrac{P_n}{P_2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{n1}}=\dfrac{P_1}{P_n},\ \dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{n2}}=\dfrac{P_2}{P_n},\ \cdots,\\ \qquad \dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{n,n-1}}=\dfrac{P_{n-1}}{P_n},\ \dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{nn}}=1\end{cases}$$

つぎはダグラス型の生産函数をこの體系のなかへ導入することである。そしてこの場合の生産函数としては，つぎの型のものを採擇した。

$$(4)\begin{cases}Y_1=A_1x_{11}^{\ b_{11}}x_{12}^{\ b_{12}}\cdots x_{1n}^{\ b_{1n}}\\ Y_2=A_2x_{21}^{\ b_{21}}x_{22}^{\ b_{22}}\cdots x_{2n}^{\ b_{2n}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ Y_n=A_nx_{n1}^{\ b_{n1}}x_{n2}^{\ b_{n2}}\cdots x_{nn}^{\ b_{nn}}\end{cases}$$

A_i, b_{ij} はともに，これらの生産函数のパラメーターであるが，このうち b_{ij} は (4) 式から，つぎのように與えられる。

$$(5)\begin{cases}b_{11}=\dfrac{x_{11}}{Y_1}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_{11}},\ b_{12}=\dfrac{x_{12}}{Y_1}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_{12}},\ \cdots,\\ \qquad b_{1n}=\dfrac{x_{1n}}{Y_1}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_{1n}}\\ b_{21}=\dfrac{x_{21}}{Y_2}\dfrac{\partial Y_2}{\partial x_{21}},\ b_{22}=\dfrac{x_{22}}{Y_2}\dfrac{\partial Y_2}{\partial x_{22}},\ \cdots,\end{cases}$$

---

1) 山田勇「レオンチエフ體系と生産函數」'經濟研究，第3卷 3號，1952年7月，pp. 191—196)

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\quad b_{2n}=\dfrac{x_{2n}}{Y_2}\dfrac{\partial Y_2}{\partial x_{2n}} \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{n1}=\dfrac{x_{n1}}{Y_n}\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{n1}},\ b_{n2}=\dfrac{x_{n2}}{Y_n}\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{n2}},\ \cdots, \\
\quad b_{nn}=\dfrac{x_{nn}}{Y_n}\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_{nn}}
\end{array}
\right.
$$

(5) 式と (3) 式とを組合わせることによって，つぎの結果をうる。

$$
(6)\left\{
\begin{array}{l}
x_{11}=b_{11}Y_1,\ x_{12}=b_{12}\dfrac{P_1}{P_2}Y_1,\ \cdots, \\
\quad x_{1n}=b_{1n}\dfrac{P_1}{P_n}Y_1 \\
x_{21}=b_{21}\dfrac{P_2}{P_1}Y_2,\ x_{22}=b_{22}Y_2,\ \cdots, \\
\quad x_{2n}=b_{2n}\dfrac{P_2}{P_n}Y_2 \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n1}=b_{n1}\dfrac{P_n}{P_1}Y_n,\ x_{n2}=b_{n2}\dfrac{P_n}{P_2}Y_n,\ \cdots, \\
\quad x_{nn}=b_{nn}Y_n
\end{array}
\right.
$$

以上は前稿の結果の要約であるが，これからさき，前稿の所論を多少變更して，つぎのように均衡値を確定するものとする。

II. 需給方程式の一般化と夫に伴う體系の修正

まず，(1) 式の需給方程式をさらに一般化することを試みよう。いま，第 i 部門の生産物の前期からの繰越量を S_i' とし，後期への繰越量を S_i'' とすれば，つぎの方程式が成立することは明かであろう。

$$-x_{1i}-x_{2i}-\cdots+(Y_i+S_i'-x_{ii})-\cdots-x_{ni}=S_i''$$

あるいは $S_i''-S_i'\equiv S_i$ とすれば

$$-x_{1i}-x_{2i}-\cdots+(Y_i-x_{ii})-\cdots-x_{ni}=S_i$$

となる。したがって，(1) 式の代りに

$$
(1a)\left\{
\begin{array}{l}
(Y_1-x_{11})-x_{21}-\cdots-x_{n-1,\,1}-x_{n1}=S_1 \\
-x_{12}+(Y_2-x_{22})-\cdots-x_{n-1,\,2}-x_{n2}=S_2 \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-x_{1n}-x_{2n}-\cdots-x_{n-1,\,n}+(Y_n-x_{nn})=S_n
\end{array}
\right.
$$

これに伴って，(2) 式の收支關係式も變更をうけ，つぎの形に修正せられる。

$$
(2a)\left\{
\begin{array}{l}
P_1(Y_1-S_1-x_{11})-P_2x_{12}-\cdots-P_nx_{1n}=\pi_1' \\
-P_1x_{21}+P_2(Y_2-S_2-x_{22})-\cdots-P_nx_{2n} \\
\qquad=\pi_2' \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-P_1x_{n1}-P_2x_{n2}-\cdots-P_n(Y_n-S_n-x_{nn}) \\
\qquad=\pi_n'
\end{array}
\right.
$$

ここに π_i' は，新らしい體系における經濟餘剰であって，(2) 式の π_i に對應することはいうまでもない。いま，ここで S_i を常數を考えて，π_i' の極大の條件を求めると，その結果は (3)式と全然同一である。

ところで，(4) 式の生產函數，したがってこれから導き出された (5) 式，および,(3) 式と (5) 式とを組合わせた (6) 式は，このような S_i の導入によって影響を受けないことは容易にわかるであらう。そこで，均衡値の求め方は，(6) 式と (1a) 式とを連立方程式として解くことにある[2]。すなわち，(6) 式を (1a) 式に代入して

$$
(7)\left\{
\begin{array}{l}
(1-b_{11})Y_1P_1-b_{21}Y_2P_2-\cdots-b_{n1}Y_nP_n \\
\qquad=S_1P_1 \\
-b_{12}Y_1P_1+(1-b_{22})Y_2P_2-\cdots \\
\qquad+b_{n2}Y_nP_n=S_2P_2 \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-b_{1n}Y_1P_1-b_{2n}Y_2P_2-\cdots \\
\qquad+(1-b_{nn})Y_nP_n=S_nP_n
\end{array}
\right.
$$

この方程式において，b_{11}, b_{21}, $\cdots$, b_{n1} ; b_{12}, b_{22}, $\cdots$, b_{n2} ; $\cdots$; b_{1n}, b_{2n}, $\cdots$, b_{nn} は生產函數に關する常數であり，P_i および S_i はパラメーターと考えたから，この式の未知數は Y_i だけであり，上の n 個の方程式から $Y_i(i=1, 2, \cdots, n)$ は一義的に決定せられる。Y_i が決定せられれば，これから，(6) 式によって，x_{ij} も決定する。以上によって Y_i と x_{ij} の均衡値がえられる。

III. 統計資料のあてはめ——レオンチエフの方法

以上の修正體系に現實の統計資料をあてはめるに先立って，レオンチエフが行っているあてはめの方法を省み，これについて檢討することとしよう。

2) 前稿では,(6) 式と (4) 式とを連立せしめるように述べたが，これを本稿のように修正する。

このような分析に當って，まず最初に行わねばならない仕事は，現實の統計資料の蒐集である。これには多くの困難を伴うことは誰でもが認めるところであろう。レオンチエフ體系が原理としては極めて單純であるにもかかわらずこれが現在重要視せられる所以は，これに統計資料をあてはめるという點にあり，そして，この意味からいって，原理に合致するように統計資料を蒐集，編成した點に，レオンチエフの偉大な業績をまず認めなければならないであろう。しかし，かれの方法には，計測の問題として，なお幾多の疑問の餘地を殘すのであって，この點を檢討することが，われわれの修正體系の計測の問題に對して，參考となるものといわねばならない。

レオンチエフは實際にアメリカの經濟を分析するにあたって，全産業を，最初，44 部門（1919, 1929 年の分析の場合）ないし 42 部門（1939 年の分析の場合）に分割し，さらに計算にあたってはこれを 10 部門（1919, 1929 年の場合）ないし 11 部門（1939 年の場合）に統括している。ここに 10 部門というのは，1919 年および 1929 年の分析においては，(1) 農業および食品工業，(2) 鑛業，(3) 金屬工業，(4) 燃料および動力工業，(5) 紡績および皮革工業，(6) 輸送業，(7) 外國貿易，(8) その他の工業，(9) その他の產業，(10) 家計，がこれであり，1939 年の分析における 11 部門というのは，(1) 農業，(2) 鑛業，(3) 金屬工業，(4) 燃料および動力工業，(5) 紡績，皮革およびゴム工業，(6) 鐵道業，(7) 外國貿易，(8) その他の工業，(9) 政府，(10) その他の產業および (11) 家計がこれである。

ところで，レオンチエフが行った實際の計算の方法を説明するには，これらの 10 部門ないし 11 部門のレオンチエフ表によるよりも，出來うるかぎり，さらに部門の統括を行うことがわかり易いと思われるので，以下の所論では，アメリカの全國民經濟を，企業，家計，その他の 3 大部門に統括することとする。その基礎になるアメリカの經濟に關する統計資料は，レオンチエフ自身の作成したものであることはいうまでもない[3]。3 つの部門に統括するにあたって，1919 年および 1929 年については，農業および食品工業，鑛業，金屬工業，燃料および動力工業，紡績および皮革工業，輸送業，その他の工業を一括して企業部門とし，家計およびその他の產業はレオンチエフの場合と同樣に取扱った。また，1939 年については，農業，鑛業，金屬工業，燃料および動力工業，紡績，皮革およびゴム工業，鐵道業を一括して企業部門とし，企業および個人のサービス (business and personal service) および家計 (household) を一括して家計部門とし，その他の部門，すなわち，外國貿易，政府，飲食施設，ストックおよび配分不能の部分を一括してその他の部門とした。[4]

以上のように統括した結果を示せば第 1 表の如くである。[5]

第 1 表　インプット・アウトプット總額表

（單位 100 萬ドル）

1919 年

	企　業	家　計	その他	計
企　業	44,381	29,609	26,831	100,821
家　計	36,159	8,846	19,288	64,293
そ の 他	26,248	13,907	307	40,462
計	106,788	52,362	46,426	205,576

3) この統計資料は，1919 年，1929 年については W. W. Leontief, *The Structure of American Economy*, 1 st ed. 1941, 所揭のものであり，1939 年については Ditto, 2 nd ed. 1951, p. 140 ならびに卷末附表所揭のものである。なお，1947 年の同樣のレオンチエフ表がアメリカ勞働統計局 (U. S. Bureau of Labor Statistics) で作成されているが，これは使用しないこととする。さらに，現在入手しうるものとしてイタリー經濟のレオンチフ表がある (U. S. A. Mutual Security Agency, *The Structure and Growth of the Italian Economy*, Rome 1953) が，これの分析も割愛することとした。

4) この統括には，理論的に見て，多くの論議すべき點が殘されようが，本稿の主な目的が，計測の方法にあるので，この統括自體の問題は，他日に讓ることとする。

5) 統括を行うことによって，レオンチエフ表の對角線上のコマに入るべき數値の大きさが異ってくる。したがって，レオンチエフが計算したように，この對角線上の數値を，それぞれこれに對應する縱橫の合計から差引いて，net output, net input を求める方式では，この統括にあたっての純額の吟味を行う必要があるが，本稿のように，x_{ii} の値を，それぞれの縱橫の合計から差引かない場合には，この種の問題は起き

1929 年

	企　業	家　計	その他	計
企　　業	47,587	37,305	26,827	111,719
家　　計	39,794	14,153	32,003	85,950
そ　の　他	29,170	24,188	475	53,833
計	116,551	75,646	59,305	251,502

1939 年

	企　業	家　計	その他	計
企　　業	65,860	47,990	23,570	137,420
家　　計	46,187	31,591	14,852	92,630
そ　の　他	26,068	11,949	2,407	40,424
計	138,115	91,530	40,829	270,474

さて，これからレオンチエフの行った計算の方法を示してみよう。この場合，1919 年，1929 年のレオンチエフ表の計算と，1939 年の場合の計算とでは計算の方法を異にしている。それは，レオンチエフ體系そのものが異るためである。そこで，1919, 1929 年の場合の體系と，1939 年の場合のそれとを要約し，これに基づいて，レオンチエフの計測の方法を示してみよう。

1. 1919, 1929 年の經濟分析に用いられたレオンチエフ體系[6)]

需給均等方程式は

$$
\text{(A)}\left\{\begin{array}{l}
-X_1+x_{21}+\cdots+x_{n1}=0\\
x_{12}-X_2+\cdots+x_{n2}=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{1n}+x_{2n}+\cdots-X_n=0
\end{array}\right.
$$

ここに，$X_i=Y_i-x_{ii}$ である。つぎに收支方程式はつぎの如くである。

$$
\text{(B)}\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{P_1X_1}{B_1\beta}+P_2x_{12}+\cdots+P_nx_{1n}=0\\
P_1x_{21}-\dfrac{P_2X_2}{B_2\beta}+\cdots+P_nx_{2n}=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P_1x_{n1}+P_2x_{n2}+\cdots-\dfrac{P_nX_n}{B_n\beta}=0
\end{array}\right.
$$

B_i は貯蓄係數もしくは投資係數であって，これが 1 に等しいときは，收支は均衡するが，1 より大きいときは收支の差額は貯蓄をあらわし，1 より小さいときは投資をあらわす。β は他のパラメーターである。最後に生產關係式は

$$
\text{(C)}\left\{\begin{array}{l}
x_{12}=\dfrac{a_{12}X_1}{A_1B_1\beta},\cdots,x_{1n}=\dfrac{a_{1n}X_1}{A_1B_1\beta}\\
x_{21}=\dfrac{a_{21}X_2}{A_2B_2\beta},\qquad\cdots,x_{2n}=\dfrac{a_{2n}X_2}{A_2B_2\beta}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n1}=\dfrac{a_{n1}X_n}{A_nB_n\beta},x_{n2}=\dfrac{a_{n2}X_n}{A_nB_n\beta},\cdots
\end{array}\right.
$$

上式中の A_i は第 i 番目の部門特有の技術的パラメーターである。ところで (C) 式を (A) 式に代入すれば

$$
\text{(D)}\left\{\begin{array}{l}
-X_1+\dfrac{a_{21}X_2}{A_2B_2\beta}+\cdots+\dfrac{a_{n1}X_n}{A_nB_n\beta}=0\\
\dfrac{a_{12}X_1}{A_1B_1\beta}-X_2+\cdots+\dfrac{a_{n2}X_n}{A_nB_n\beta}=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{a_{1n}X_1}{A_1B_1\beta}+\dfrac{a_{2n}X_2}{A_2B_2\beta}+\cdots-X_n=0
\end{array}\right.
$$

この式は X_i に關する方程式であり，しかも連立同次一次方程式であるから，X_i が 0 以外の解を有するための必要條件は

$$
\text{(E)}\quad\left|\begin{array}{cccc}
-A_1B_1\beta & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\
a_{12} & -A_2B_2\beta & & a_{n2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & -A_nB_n\beta
\end{array}\right|=D(\beta)=0
$$

である。X_1 をかりに numéraire にとれば，他の X の値は

$$
X_i=\frac{D_{1i}}{D_{11}}\,\frac{A_i}{A_1}\,\frac{B_i}{B_1}
$$

によって與えられる。ここに D_{11} あるいは D_{1i} は D の第 1 列第 1 行あるいは第 1 列第 i 行の餘因子をあらわす。

そこで，これからさき，以上のレオンチエフ體係の計測の方法を，レオンチエフ自身のこころみた方式により，まえの企業，家計，その他という 3 部門に統括した第 1 表に基づいて紹介し，さらにこれを批判することとしよう。

レオンチエフ自身の體系に適合するように，第 1 表を作り換えることから初める。これが第 2 表

て來ない點を注意しておく。

6) W. W. Leontief, *The Structure*, 2nd ed., pp. 33—51.

である。

第２表　インプット・アウトプット純額表

（單位 100 萬ドル）

1919 年

	企業	家計	その他	計
企業		29,609	26,831	56,440
家計	36,159		19,288	55,447
その他	26,248	13,907		40,155
計	62,407	43,516	46,119	152,042

1929 年

	企業	家計	その他	計
企業		37,305	26,827	64,132
家計	39,794		32,003	71,797
その他	29,170	24,188		53,358
計	68,964	61,493	58,830	189,287

1939 年

	企業	家計	その他	計
企業		47,990	23,570	71,560
家計	46,187		14,852	61,039
その他	26,068	11,949		38,017
計	72,255	59,939	38,422	170,616

この表では，第１表における左上から右下へかけての對角線上にある數字が，この數字のある縦横のそれぞれの合計額から差引いてある。たとえば，1919 年の表についていえば，第１横行(企業)と第１縦欄（企業）との交叉點にある數字，44,381 が第１横行の合計，すなわち企業のアウトプットの總願 100,821 から差引かれて，その値 56,440 が，第２表 1919 年の表の第１横行の合計欄に記入されている。また，第１表の第１縦欄の合計，すなわち企業のインプットの總額 106,788 から，いまの交叉點の數字 44,381 が差引かれて，その結果 62,407 が，第２表の該當の箇所に記入されている。他の數字についても，第１表と第２表との間に同様な關係がある。このようにして，第１表はインプット・アウトプットの總額表であるのに對して，第２表はその純額表ともいうことが出來よう。

こんどは，プラメーターの推定の問題である。これについては，まず $A_i=1$，$\beta=1$ とおく。したがって（E）式は

$$
(\mathrm{E}')\qquad \begin{vmatrix} -B_1 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{11} & -B_2 & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & -B_n \end{vmatrix} = 0
$$

となる。貯蓄・投資係數 B_i の推定はつぎのようにして行われる。第２表において，たとえば，1929 年の企業についての B（この場合は B_1）を計算すれば

$$B_1=\frac{64,132}{68,964}=0,9299$$

家計部門では

$$B_2=\frac{71,797}{61,493}=1,1676$$

以下同様にして B_i を計算する。つぎは，生産係數 a_{ij} の推定の問題であるが，ここに疑問の點がある。レオンチエフはこれを求めるのに，つぎの方法を採用している。たとえば，1929 年の表において，a_{12}，すなわち第１縦欄（企業）第２横行（家計）の生産係數は

$$a_{12}=\frac{39,794}{64,132}\times 0.9299=0.5770$$

と計算せられる。これを記號で書けば

$$a_{12}=\frac{P_2x_{12}}{P_1X_1}B_1$$

一般に

$$(8)\qquad a_{ij}=\frac{P_jx_{ij}}{P_iX_i}B_i$$

とあらわされる。この方式によってパラメーターの表を作成すればつぎの第２表となる。

第３表　パラメーターの表

1919 年

j \ i	企業 (1)	家計 (2)	その他 (3)
企業(1)	$-B_1=-0.9044$	$a_{21}=0.6804$	$a_{31}=0.5818$
家計(2)	$a_{12}=0.5794$	$-B_2=-0.5330$	$a_{32}=0.4182$
その他(3)	$a_{13}=0.4206$	$a_{23}=0.3196$	$-B_3=-0.8707$

1929 年

j \ i	企業	家計	その他
企業	$-B_1=-0.9299$	$a_{21}=0.6067$	$a_{31}=0.4560$
家計	$a_{12}=0.5770$	$-B_2=-1.1676$	$a_{32}=0.5440$
その他	$a_{13}=0.4230$	$a_{23}=0.3933$	$-B_3=-0.9070$

これらの表にある値を，1919年と1929年についての（E′）式の左邊にあてはめれば，その結果はともに0となり，（E′）の條件は滿足せられる。これは當然のことであつて，以上のようなレオンチエフの計算に基づくかぎり，つねに成立する結論である。これを數學的に證明することは容易である。いま，第2表のインプット・アウトプットの純額表を記號をもって作成すれば，つぎの如くである。

第 4 表

j ＼ i	企業(1)	家計(2)	その他(3)	計
企　業 (1)		P_1x_{21}	P_1x_{31}	P_1X_1
家　計 (2)	P_2x_{12}		P_2x_{32}	P_2X_2
そ の 他 (3)	P_3x_{13}	P_3x_{23}		P_3X_3
計	$\sum_{j\neq 1}P_jx_{1j}$	$\sum_{j\neq 2}P_jx_{2j}$	$\sum_{j\neq 3}P_jx_{3j}$	

この表で $\sum_{j\neq 1}P_jx_{1j}$ は $j=1$ を除く他のすべての Px の合計をあらわす。したがって $\sum_{j\neq 1}P_jx_{1j}=P_2x_{12}+P_3x_{13}$ である。$\sum_{j\neq 2}P_jx_{2j}$ および $\sum_{j\neq 3}P_jx_{3j}$ も同様に $j=2$, $j=3$ を除き他のすべての Px を合計することをあらわす。ところで，このような記號を使用すれば，(8) 式はつぎのように變形せられる。

$$(8')\quad a_{ij}=\frac{P_jx_{ij}}{P_iX_i}B_i=\frac{P_jx_{ij}}{P_iX_i}\,\frac{P_iX_i}{\sum_{j\neq i}P_jx_{ij}}$$
$$=\frac{P_jx_{ij}}{\sum_{j\neq i}P_jx_{ij}}$$

そうすれば（E′）式はつぎの形に書き換えられる。ただし，$\sum P_jx_{1j}=\alpha$, $\sum P_jx_{2j}=\gamma$, $\sum P_jx_{3j}=\delta$ とする。

$$\begin{vmatrix} -\frac{P_1X_1}{\sum P_jx_{1j}} & \frac{P_1x_{21}}{\sum P_jx_{2j}} & \frac{P_1x_{31}}{\sum P_jx_{3j}} \\ \frac{P_2x_{12}}{\sum P_jx_{1j}} & -\frac{P_2X_2}{\sum P_jx_{2j}} & \frac{P_2x_{32}}{\sum P_jx_{3j}} \\ \frac{P_3x_{13}}{\sum P_jx_{1j}} & \frac{P_3x_{23}}{\sum P_jx_{2j}} & -\frac{P_3X_3}{\sum P_jx_{3j}} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{P_1P_2P_3}{\alpha\gamma\delta}\begin{vmatrix} -X_1 & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & -X_2 & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & -X_3 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{P_1P_2P_3}{\alpha\gamma\delta}\begin{vmatrix} -X_1+x_{21}+x_{31} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12}-X_2+x_{32} & -X_2 & x_{32} \\ x_{13}+x_{23}-X_3 & x_{23} & -X_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & x_{21} & x_{31} \\ 0 & -X_2 & x_{32} \\ 0 & x_{23} & -X_3 \end{vmatrix}=0$$

また，レオンチエフの計算では，(8′) 式によって a_{ij} は $P_jx_{ij}/\sum_{j\neq i}P_jx_{ij}$ に等しいから

$$\sum_{j\neq i}P_jx_{ij}=P_1x_{i1}+P_2x_{i2}+\cdots+P_{i-1}x_{i,\,i-1}$$
$$+P_{i+1}x_{i,\,i+1}+\cdots+P_nx_{in}$$

この兩邊を左邊で割れば

$$1=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{i,\,i-1}+a_{i,\,i+1}+\cdots+a_{in}$$

となる。すなわち，任意の縱欄について生產係數を合計すれば，その結果はつねに1となる。このことは第3表を見れば明らかであろう。

ところで，(8) 式によってあらわされる a_{ij} の計測方式は，まえのレオンチエフ體系と矛盾しないであろうか。(C) 式において $A_i=1$, $\beta=1$ とおけば，一般的に

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}B_i}{X_i}$$

の形であらわされ，これは明らかに (8) 式とは異る。したがって，レオンチエフの生產係數の計測方式は，その理論的モデルと矛盾するという結論にならざるをえない。

以上は，1919年，1929年の經濟表についてレオンチエフの行った生產係數の推定方法に關する矛盾であるが，その他價格 P_i の推定はさらに理解し難いものである點を附記しておく。

2. 1939 年の經濟分析に用いられたレオンチエフ體系[7)]

1939年におけるレオンチエフ體系は，まえの場合と異り，したがって，その計測方法も異る。まず，體系を略述しよう。

(A)式に對應してつぎの式を需給方程式とする。

$$(\mathrm{F})\quad\begin{cases} +X_1-x_{21}-\cdots-x_{m1}=x_{n1} \\ -x_{12}+X_2-\cdots-x_{m2}=x_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_{1m}-x_{2m}-\cdots+X_m=x_{nm} \end{cases}$$

ここに x_{ni} は第 i 部門の生產物が第 n 部門すな

7) W. W. Leontief, *The Structure*, 2nd ed., pp. 143—148.

わち家計部門で直接使用せられる數量をあらわす。つぎに，(C) 式に對應する生産關係式は

$$
(G)\begin{cases} x_{12}=a_{12}X_1, \cdots, x_{1n}=a_{1n}X_1 \\ x_{21}=a_{21}X_2, \qquad \cdots, x_{2n}=a_{2n}X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}=a_{m1}X_m, x_{m2}=a_{m2}X_m, \cdots \end{cases}
$$

(G) 式を (F) 式に代入すれば

$$
(H)\begin{cases} X_1-a_{21}X_2-\cdots-a_{m1}X_m=x_{n1} \\ -a_{12}X_1+X_2-\cdots-a_{m2}X_m=x_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{1m}X_1-a_{2m}X_2-\cdots+X_m=x_{nm} \end{cases}
$$

この式における X_i が未知數であって，他はすべて常數とする。とくに，レオンチエフは x_{ni} は，「特殊な計算をする目的から」これらを常數と考えるのである[8]。この式を解けば，その根はつぎの形であらわすことが出來る。

$$
(J)\begin{cases} X_1=A_{11}x_{n1}+A_{12}x_{n2}+\cdots+A_{1m}x_{nm} \\ X_2=A_{21}x_{n1}+A_{22}x_{n2}+\cdots+A_{2m}x_{nm} \\ X_m=A_{m1}x_{n1}+A_{m2}x_{n2}+\cdots+A_{mm}x_{nm} \end{cases}
$$

ところで，實際に a_{ij} を推定するにあたって，レオンチエフの採用した方法は，まえの第2表について述べれば，つぎの如くである。まず，1939年の表を，(F) 式に對應するように，書き換えて

第 5 表

j \ i	企業 (1)	その他(2)	家　計
企　業 (1)	−71,560	23,570	47,990
その他 (2)	26,068	−38,017	11,949
家　計	46,187	14,852	61,039

各横行について見れば，企業とその他の兩部門の合計が家計部門の數字と一致する。この場合，左上から右下へかけての對角線上にある數字は，それぞれの部門のアウトプットの純額である。そこで，第1縱欄（企業）と第2横行（その他）との交叉點にある生産係數 a_{12} は，つぎのようにして求められる。

$$a_{12}=\frac{26,068}{71,560}=0.3643$$

8) W. W. Leontief, *The Structure*, 2nd ed., p. 145.

同様にして

$$a_{21}=\frac{23,570}{38,017}=0.6200$$

そしてこの場合もまた，(G) 式の生産函數とは矛盾する。何となれば，一般に

$$a_{ij}=\frac{P_jx_{ij}}{P_iX_i}$$

と計算されているからである。家計についての a_{ni} は，1919, 1929年の場合と異って，雇用人員を純アウトプットで除することによって求められているから，この場合は，他の a_{ij} の推定とは全く別種が取扱いがなされているといわねばならない。さらに，x_{ni} を常數として取扱うことについては，たとえ，便宜的な手段であるとしても，許し難い假定であるであろう。

以上によって，レオンチエフが構成したかれの體系と，かれの實際の計測との間には超え難い矛盾が含まれていることを指摘した。

IV. 修正體系の計測

レオンチエフ自身の計測については，以上に考察したような矛盾點が考えられる。それでは，第II節でとり上げた修正體系についての計測はどうなるか。まえにも述べたように，レオンチエフ表において示される統計數値はすべて數量と價格とが掛け合わされた金額によって表示されている。いま，部門を3つに分けた場合のレオンチエフ表を，このような數量と價格とであらわせばつぎのようになる。

第 6 表

j \ i	企業(1)	家計(2)	その他(3)	計
企　業 (1)	P_1x_{11}	P_1x_{21}	P_1x_{31}	$P_1(Y_1-S_1)$
家　計 (2)	P_2x_{12}	P_2x_{22}	P_2x_{32}	$P_2(Y_2-S_2)$
その他 (3)	P_3x_{13}	P_3x_{23}	P_3x_{33}	$P_3(Y_3-S_3)$
計	ΣP_ix_{1i}	ΣP_ix_{2i}	ΣP_ix_{3i}	

したがって，このような表を原資料として，數量と價格とを分離しようとすることに無理がある。もちろん，このような金額のうち，價格もしくは數量の一方がわかれば，他方は容易に求められる。たとえば，企業については，その生産物の平均價

格，家計についてもその生産物すなわち勞働・サービスの平均價格を求めることが出來るとすれば，企業と家計の生産物の量は，原理上計算出來よう。しかしこの場合の企業なり家計なりの平均價格は，平均的な總合物價指數のような比率では意味がない。何となれば，レオンチエフ表の金額は現實の生産額の實額をもってあらわされているからである。同様にして，かりに企業と家計との生産量が求められたとすれば，原理としては，これらに對應する價格がえられるはずであるが，このような生産量は，總合的な生産指數の形では，レオンチエフ表の目的に沿うことが出來ない。以上の事實は部門の統括を一層高度に行えば行うほど一層著しくあらわれてくることは見易いところであろう。

そこで，レオンチエフ表の統計的分析では，數量と價格とを掛け合わせた金額そのものによって分析する方法を考える必要が起きてくるといえよう。このような觀點から，われわれの修正體系を吟味し，しかるのち，實際の統計資料に基づいて，その計測を行うこととしよう。

ところで第II節に考察した修正體系中計測に必要な結論的部分を摘錄すればつぎの2點となる。

まず，(4) 式のダグラス函數のパラメーター b_{ij} の値は，(6) 式から計算する。この (6) 式を書き直せば，つぎのようになる。

$$
(8)\begin{cases}
b_{11}=\dfrac{P_1x_{11}}{P_1Y_1},\ b_{12}=\dfrac{P_2x_{12}}{P_1Y_1},\ \cdots,\ b_{1n}=\dfrac{P_nx_{1n}}{P_1Y_1}\\
b_{21}=\dfrac{P_1x_{21}}{P_2Y_2},\ b_{22}=\dfrac{P_2x_{22}}{P_2Y_2},\ \cdots,\ b_{2n}=\dfrac{P_nx_{2n}}{P_2Y_2}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_{n1}=\dfrac{P_1x_{n1}}{P_nY_n},\ b_{n2}=\dfrac{P_2x_{n2}}{P_nY_n},\ \cdots,\ b_{nn}=\dfrac{P_nx_{nn}}{P_nY_n}
\end{cases}
$$

上式のそれぞれの方程式の右邊について考えてみる。そこには，1つの著しい特徴が見出される。すなわち，分母，分子とも，それらの數値は金額で表示せられ，しかも，それらは現實にレオンチエフ表に揭載されている數値にほかならない。ここに1つ注意しなければならないことがらはつぎの點である。(6) 式ないし (8) 式は，生産函數でなくて (2) 式の π_i を極大にするための均衡條件式であり，これと (1a) 式とを組合わして (7) 式がえられ，この式から Y_i の均衡値が決定せられる。そして Y_i の均衡均衡値から (6) 式ないし (8) 式によって x_{ij} の均衡値も求められる。言葉を換えていえば，(8) 式は，Y_i と x_{ij} との均衡値を求めるための連立方程式の一部であり，Y_i と x_{ij} とが均衡値であるかどうかには關係なく，この式の關係が成立しなければならないことはいうまでもないことである。したがって，現實のレオンチエフ表に揭載されている P_iY_i および P_jx_{ij} の數値からも b_{ij} が求められなければならない。本來 b_{ij} は，(4) 式であらわされた生産函數から，たとえば最小自乘法によって與えられた統計資料に基づいて推定されるものであるが，また同時に (8) 式によって現實のレオンチエフ表からも求められる。

つぎに，(7) 式について考察する。この式においてパラメーターは b_{ij} および P_i と S_i である。ところで，b_{ij} はいま述べた方法によって推定が出來るが，P_i はレオンチエフ表の知識だけからは求められない。ところが，(7) 式を Y_i についての方程式を見る代りに Y_iP_i の方程式とし，未知數を Y_iP_i とすることによって，その均衡値を求めることにすれば，レオンチエフ表から解くことが出來る。

S_i については，1919 年および 1929 年のアメリカ經濟については，レオンチエフ表に關するかぎり，明確ではなく，むしろ0と假定すべきであろう。これに對して，1939 年のレオンチエフ表にはストックの部門があるが，これをわれわれの S_i に等しいものと假定することが出來るかどうかを檢討する必要がある。われわれの場合の S_i は，まえに述べた如く，前期繰越量 S_i' から後期繰越量 S_i'' を差引いたものである。ところが，このうち S_i' は，當該期間ではこれをパラメーターとして取扱うことが妥當であっても，S_i'' はむしろ，レオンチエフ體系のなかで決定せられる變數と見るのが正當であろう。また，1939 年のレオンチエフ表もそのように作成せられている。そこで，この S_i'' は (1a) 式の方程式の左邊のいずれかの x と考えることによって，(1a) 式をつぎのように變形することが，實際の場合により一層適切とな

るであろう。

$$(9)\begin{cases}(Y_1-x_{11})-x_{21}-\cdots-x_{n1}=-S_1'\\ -x_{12}+(Y_2-x_{22})-\cdots-x_{n2}=-S_2'\\ -x_{1n}-x_{2n}-\cdots+(Y_n-x_{nn})=-S_n'\end{cases}$$

しかし，このような前期繰越量 S_i' は，まえの第1表ないし第2表のレオンチエフ表では不明であり，むしろこれを0とおくことが一應考えられる。

ところで,(6) 式を (9) 式に代入することによって，(7) 式に對應する式として

$$(10)\begin{cases}(1-b_{11})Y_1P_1-b_{21}Y_2P_2-\cdots-b_{n1}Y_nP_n\\ \qquad=-S_1'P_1\\ -b_{12}Y_1P_1+(1-b_{22})Y_2P_2-\cdots-b_{n2}Y_nP_n\\ \qquad=-S_2'P_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -b_{1n}Y_1P_1-b_{2n}Y_2P_2-\cdots-(1-b_{nn})Y_nP_n\\ \qquad=-S_n'P_n\end{cases}$$

をうる。いま，$S_i'=0$ とおけば，(10) 式は連立同次一次方程式となるから

$$(11)\begin{vmatrix}1-b_{11} & -b_{21} & \cdots-b_{n1}\\ -b_{12} & 1-b_{22} & \cdots-b_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -b_{1n} & -b_{2n} & 1-b_{nn}\end{vmatrix}=\varDelta=0$$

なることが，Y_iP_i が0以外の解を持つために必要である。果してこの條件が充たされるか。このことを調べるために，(8) 式の値を (11) 式に代入してみる。その結果はつぎの如くである。

$$\begin{vmatrix}1-\dfrac{P_1x_{11}}{P_1Y_1} & -\dfrac{P_1x_{21}}{P_2Y_2}\cdots & -\dfrac{P_1x_{n1}}{P_nY_n}\\ -\dfrac{P_2x_{12}}{P_1Y_1} & 1-\dfrac{P_2x_{22}}{P_2Y_2}\cdots & -\dfrac{P_2x_{n2}}{P_nY_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -\dfrac{P_nx_{1n}}{P_1Y_1} & -\dfrac{P_nx_{2n}}{P_2Y_2}\cdots & 1-\dfrac{P_nx_{nn}}{P_nY_n}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{Y_1\cdots Y_n}$$

$$\times\begin{vmatrix}Y_1-x_{11}-\cdots-x_{n1} & -x_{21}\cdots & -x_{n1}\\ -x_{12}+Y_2-\cdots-x_{n2} & Y_2-x_{22}\cdots & -x_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -x_{1n}-\cdots+Y_n-x_{nn} & -x_{2n}\cdots & Y_n-x_{nn}\end{vmatrix}=0$$

したがって修正體系では (11) 式はつねに満足せられる。そこで，$Y_1P_1=1$ とすれば，Y_iP_i は

$$(12)\quad Y_iP_i=\frac{\varDelta_{1i}}{\varDelta_{11}}$$

から求められる。ここに $\varDelta_{11}$ あるいは $\varDelta_{1i}$ は $\varDelta$ の第1列第1行あるいは第1列第 i 行の餘因子である。

最後に，第1表の 1939 年のレオンチエフ表に，以上のわれわれの體系をあてはめて計測してみよう。まず，(8) 式によって b_{ij} を求めると，つぎの第7表の如くである。

第 7 表

j ＼ i	企　業 (1)	家　計 (2)	そ の 他 (3)
企業 (1)	$b_{11}=\dfrac{65,860}{137,420}=0.4793$	$b_{21}=\dfrac{47,990}{92,630}=0.5181$	$b_{31}=\dfrac{23,570}{40,424}=0.5831$
家計 (2)	$b_{12}=\dfrac{46,187}{137,420}=0.3361$	$b_{22}=\dfrac{31,591}{92,630}=0.3410$	$b_{\cdot 2}\ \dfrac{14,852}{40,424}=0.3674$
その他 (3)	$b_{13}=\dfrac{26,068}{137,420}=0.1897$	$b_{23}=\dfrac{11,949}{92,630}=0.1290$	$b_{33}=\dfrac{2,407}{40,424}=0.0595$

上表に基づいて，(12) 式により，Y_iP_i の均衡値を求めた結果はつぎの如くである。

$$Y_1^0P_1=1,\quad Y_2^0P_2=0.6740,\quad Y_3^0P_3=0.2941$$

また，(6) 式あるいは (8) 式によって，均衡値 $P_jx_{ij}^0$ を求めて，1表にしたものが第8表である。ただしこの表の値は，$Y_1^0P_1=1$ としたときの値であることを注意する必要がある。

第 8 表

	企　業	家　計	そ の 他
企　業	0.4793	0.3492	0.1715
家　計	0.3361	0.2298	0.1081
そ の 他	0.1897	0.0869	0.0175