レオンチエフ體系と生産函數

山田　勇

I. はしがき

「均衡分析の經驗的適用」という副題をもって書かれたワシリー W. レオンチエフ教授の「アメリカ經濟の構造」[1] は，ワルラスの一般均衡理論に經驗的な統計資料をあてはめたという意味，一層詳しくいえば，微視的經濟理論としてのワルラスの理論に統計資料をあてはめてアメリカ經濟の構造を分析したという意味で，計量經濟學における新らしい分野を開拓した，といえるであろう。新らしい分野というのは，從來統計資料の適用が許されると考えられた理論は，主としてケインズ理論を中心とするいわゆる巨視的經濟理論であったことに對し，これが微視的理論に關する經驗的分析であるという點にあるのである。

かかるレオンチエフの試みを理論そのものの立場から考えてみるならば，それははなはだ簡單なものであり，分析用具としての經濟體系が，單に需要供給數量の方程式と，收入支出の關係式と，さらに生産函數との三者から成ることを示し，その均衡條件が求められているに過ぎないのであって，これではとうてい經濟理論家の興味をそそるに足るものではないといってもよいであろう[2]。

それにもかかわらず，それが計量經濟學者によって高く評價されるゆえんは，上述のような方法論上の問題のほかに，現實のアメリカ經濟を分析して，これから經濟計畫の方策を求めようとする，經濟政策的な價値があるという點である。事實かれの理論および方法は，アメリカ海軍および勞働統計局等で現實に問題となっているのである。

ところで，レオンチエフの研究に從來から放たれてきた重要な批判の一つは，かれの生産函數に關するものであった。それは，生産要素がその生産物と結合する仕方が線型であるのみならず，各生産要素間においては limitational な關係より見られず，現實に考えられるように substitutional ではない，ということである。このことは，おそらく統計資料のあてはめという問題のために模型を簡單にする必要から生じた結果であろう[3]。そこで本稿においては，各生産要素間の substitutional な關係をあらわす式としてダグラス函數を導入し，さらに，これを挿入した全體系に極大原理を適用して均衡條件を確定することを試みた。實際の統計資料をあてはめることは他の機會に讓ることとする。レオンチエフの場合もそうであったが，本稿においてもまた，統計資料のあてはめを目的とするために，理論模型の簡單化が必要であることを附記しておこう。

1) Wassily W. Leontief; *The Structure of American Economy*, 1919—1939, 2nd ed., enlarged, 1951.

2) 理論的な興味からすれば，むしろ，レオンチエフ體系の動學化の問題〔David Hawkins and Herbert A. Simon; Note; Some Conditions of Macroeconomic Stability, *Econometrica* July-October, 1949, pp. 245—248, 安井琢磨,「レオンチエフ體系の動學理論」(東北大學經濟學部研究年報「經濟學」1950年 pp. 1—14.) 等〕, 乘數論 (Richard M. Goodwin; The Multiplier as Matrices, *Economic Journal*, Vol. LIX, 1949, pp. 536—554; John S. Chipman; The Multi-sector Multiplier *Econometrica* Vol. 18, 1950. pp. 355—374; Robert Solow; A Note on Dynamic Multipliers, *Econometrica* Vol. 19, 1951. pp. 306—316. 等), 活動分析 (*Activity Analysis of Production and Allocation*, ed. by Tjalling C. Koopmans, 1951) 等が重要であろう。

3) Leontief; *The Structure of American Economy*, p. 37.

II. レオンチエフ體系

レオンチエフ體系はつぎの如くあらわされる[4]。いま，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ をもって，それぞれ 1, 2, …, n なる産業部門で生産される純生産量（總生産量からその産業部門で自己消費せられる數量を差引いた量）をあらわす。$x_{21}, x_{31}, \cdots, x_{n1}$ をもって，1 なる部門の生産物がそれぞれ 2, 3, …, n なる他の部門へ配分される數量を；$x_{12}, x_{32}, \cdots, x_{n2}$, をもって，2 なる部門の生産物がそれぞれ 1, 3, …, n なる他の部門へ配分される數量を；……, $x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{n-1,n}$ をもって，n なる部門（これを消費部門とする。したがってここで生産されるものは一般に勞働量である）の生産物がそれぞれ 1, 2, …, $n-1$ なる他の部門へ配分せられる數量を，あらわすものとする。すべての産業部門において，その純生産物 X が過不足なく他の産業部門へ配分せられるものとすれば，つぎの需給均等式が成り立つことは明らかである。

$$
\begin{array}{ll}
 & -X_1+x_{21}+x_{31}+\cdots\cdots+x_{n-1,1}+x_{n1}=0 \\
 & x_{12}-X_2+x_{32}+\cdots\cdots+x_{n-1,2}+x_{n2}=0 \\
(1) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & x_{1n}+x_{2n}+x_{3n}+\cdots\cdots+x_{n-1,n}-X_n=0
\end{array}
$$

この關係式をそれぞれ縦に見れば，それは生産物と生産要素との關係をあらわしている。たとえば，第一縦欄についていえば，X_1 なる生産物をうるのに，$x_{12}, \cdots x_{1n}$ なる生産要素を必要とし，第 n 縦欄についていえば，X_n なる生産物(勞働量)をうるのに，$x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{n,n-1}$ なる生産要素を必要とすることを示している。

そこで，つぎは生産函數の問題である。i なる産業部門についての生産函數は一般に

$$X_i=f(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \cdots, x_{in})$$

によってあらわされるが，レオンチエフ體系においては，これを極めて簡單にして，各生産要素 $x_{i1}, \cdots, x_{in}$ とその生産物 Xi との間には線型關係が成立し，しかも各生産要素間には相互に關連なく，いわゆる limitational な關係を許容する。すなわち

$$x_{i1}=a_{i1}X_i,\ x_{i2}=a_{i2}X_i, \cdots\cdots,\ x_{in}=a_{in}X_i$$

上式において $a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{in}$ は Xi を一單位作るのにそれぞれ $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}$ がどれだけ必要であるかを示す，一種の生産係數（coefficient of production）をあらわす。〔n 番目の部門は消費部門であるから $a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,n-1}$ は消費係數（coefficient of consumption）と考えられる。〕

ところで，ある一つの産業内で，たとえば技術の進歩等のために各生産係數を一樣に比例的に變化せしめる要素を考え，これを生産性係數（productivity coefficient）と呼ぶことにし，A であらわすことにすれば，うえの生産函數はつぎの如く書きえられる。

$$
\begin{array}{ll}
 & x_{12}=\dfrac{a_{12}X_1}{A_1}, \cdots\cdots, \\
 & x_{1,n-1}=\dfrac{a_{1,n-1}X_1}{A_1},\quad x_{1n}=\dfrac{a_{1n}X_1}{A_1} \\
(2) & x_{21}=\dfrac{a_{21}X_2}{A_2}, \cdots\cdots, \\
 & x_{2,n-1}=\dfrac{a_{n,n-1}X_2}{A_2},\quad x_{2n}=\dfrac{a_{2n}X_2}{A_2} \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & x_{n1}=\dfrac{a_{n1}X_n}{A_n},\quad x_{n2}=\dfrac{a_{n2}X_n}{A_n}, \cdots\cdots, \\
 & x_{n,n-1}=\dfrac{a_{n,n-1}X_n}{A_n}
\end{array}
$$

以上によって，需給均等式と生産函數とがえられたが，もう一つ各産業部門の收支關係を示す一連の方程式が殘る。

いま，1, 2, …, n なる部門の生産物の價格をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$ とする。i なる部門について，その純生産物の配分總額はいうまでもなく P_iX_i であり，これを生産するに要する費用の總額は　$P_1x_{i1}+P_2x_{i2}+\cdots+P_{i-1}x_{i,i-1}+P_{i+1}x_{i,i+1}+\cdots+P_nx_{in}$ である。この配分總額は必ずしも費用總額と一致せず，むしろ兩者は相異するのであるが，レオンチエフ體系においては，配分總額（賣上總額）が費用總額より大であれば，その差額は貯蓄せられ，その逆であれば，その差額は投資の結果であると見る。したがっていま B という係數を導入し，i 部門についてつぎの式が成立

4) レオンチエフは，最近，本稿に紹介した形より，さらに新しい模型を使用している。（*The Structure*, p. 143 ff.）

するものと考える。

$$-\frac{P_iX_i}{B_i}+(P_1x_{i1}+P_2x_{i2}+\cdots+P_{i-1}x_{i,\,i-1}$$
$$+P_{i+1}x_{i,\,i+1}+\cdots+P_nx_{in})=0$$

もしも B_i が1に等しいときは，配分總額と費用總額とが相等しい靜學的均衡をあらわすのに對し，これが1よりも大きいか，小さい場合は，それぞれ貯蓄もしくは投資の存在することを示すのであって，體系は動學的となる。この B_i を單に貯蓄係數(saving coefficient)と名づける。したがって，B_i が1に等しい場合は收支が均衡し，1よりも大きい場合は貯蓄が行われ，1よりも小さい場合は投資の存在することがわかる。さらに全產業部門の收支關係に比例的に影響を與える要素として β を導入する[5]。そこで

$$-\frac{P_1X_1}{B_1\beta}+P_2x_{12}+P_3x_{13}+\cdots+P_nx_{1n}=0$$
$$(3)\quad P_1x_{21}-\frac{P_2X_2}{B_2\beta}+P_3x_{23}+\cdots+P_nx_{2n}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_1x_{n1}+P_2x_{n2}+P_3x_{n3}+\cdots-\frac{P_nX_n}{B_n\beta}=0$$

がえられる。以上の方程式組織(1)，(2)，(3)において，未知數は，$X_1, X_2,\cdots, X_n$ の n 個，$x_{21}, x_{31},\cdots, x_{n1}$；$x_{12}, x_{32},\cdots, x_{n2}$；$\cdots$；$x_{1n}, x_{2n}, x_{3n},\cdots, x_{n-1,\,n}$ の $n(n-1)$ 個および $P_1, P_2,\cdots, P_n$ の n 個，合計 $n(n+1)$ 個あるのに對し，方程式は，(1)式の n 個；(2)式の $n(n-1)$ 個；(3)式の n 個，合計 $n(n+1)$ 個であるから，この體系は一義的に確定される。

すでに述べた如く，レオンチエフ體系そのものは理論としては，極めて簡單であって，ことさら興味を引くほどのこともないが，問題はそれの實際の計量化にある。レオンチエフは以上の理論模型をすでに1919年，1929年，1939年のアメリカの統計資料に適用している。ここにこの研究の特徵が認められるのである。

5) この β は，レオンチエフが連立同次一次方程式の必要條件

$$D(\beta)=0$$

を解くために導入したものと考えられ，その經濟的意味は明確を缺く。(*The Structure*, p. 51)

III. レオンチエフ體系の修正

レオンチエフ體系は，(1)式において述べたように自已消費量 x_{ii} を含まず，これを總生產量から差引いた純生產量 X_i を考えている。そこで，さらに一般的に總生產量を Y_i で示し，自已消費量を體系中に導入しよう。この場合においては，(1)式で $X_i=Y_i-x_{ii}$ とおけばよい。したがって

$$(Y_1-x_{11})-x_{21}-x_{31}-\cdots\cdots-x_{n-1,\,1}-x_{n1}=0$$
$$-x_{12}+(Y_2-x_{22})-x_{32}-\cdots\cdots-x_{n-1,\,2}-x_{n2}=0$$
$$(4)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-x_{1n}-x_{2n}-x_{3n}-\cdots\cdots-x_{n-1,\,n}+(Y_n-x_{nn})=0$$

つぎに生產函數を考える。從來問題となったレオンチエフ體系の limitational な生產函數(2)に代えて，一般的に

$$Y_1=f_1(x_{11}, x_{12}, x_{13},\cdots,\ x_{1n})$$
$$(5)\quad Y_2=f_2(x_{21}, x_{22}, x_{23},\cdots,\ x_{2n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_n=f_n(x_{n1}, x_{n2}, x_{n3},\cdots,\ x_{nn})$$

とおく。この式は，$x_{i1}, x_{i2},\cdots, x_{in}$ の各生產要素がsubstitutional な關係をもつことを示す。

つぎに，レオンチエフ體系における收支の關係式(3)は，以上の修正に應じて

$$P_1(Y_1-x_{11})-P_2x_{12}-P_3x_{13}-\cdots\cdots$$
$$-P_{n-1}x_{1,\,n-1}-P_nx_{1n}=\pi_1$$
$$(6)\quad -P_1x_{21}+P_2(Y_2-x_{22})-P_3x_{23}-\cdots\cdots$$
$$-P_{n-1}x_{2,\,n-1}-P_nx_{2n}=\pi_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-P_1x_{n1}-P_2x_{n2}-P_3x_{n3}-\cdots\cdots$$
$$-P_{n-1}x_{n,\,n-1}+P_n(Y_n-x_{nn})=\pi_n$$

と書き換えられる。ここに $\pi_1, \pi_2,\cdots, \pi_n$ は 1, 2,…, n の各部門における餘剩(配分總額—費用總額)である。

いま，各產業部門はそれぞれの餘剩 π を極大ならしめようとする場合を考える。ところで，レオンチエフ體系においてはすべての價格 $P_1, P_2,\cdots, P_n$ はこの體系內で決定せられる內生變數(endogenous variables)であったが，理論を簡單ならしめ，實際の統計資料のあてはめを容易ならしめるため，これを與件として考えば，π の極大條件はつぎの如くになる。

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_{11}}=1,\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_{12}}=\frac{P_2}{P_1},\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_{13}}=\frac{P_3}{P_1},\cdots,$$
$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_{1,\,n-1}}=\frac{P_{n-1}}{P_1},\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_{1-n}}=\frac{P_n}{P_1}$$
$$(7)\quad \frac{\partial Y_2}{\partial x_{21}}=\frac{P_1}{P_2},\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_{22}}=1,\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_{23}}\ \frac{P_3}{P_2},\cdots,$$
$$\frac{\partial Y_2}{\partial x_{2,\,n-1}}=\frac{P_{n-1}}{P_2},\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_{2n}}=\frac{P_n}{P_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial Y_n}{\partial x_{n1}}=\frac{P_1}{P_n},\ \frac{\partial Y_n}{\partial x_{n2}}=\frac{P_2}{P_n},\ \frac{\partial Y_n}{\partial x_{n3}}=\frac{P_3}{P_n},\cdots,$$
$$\frac{\partial Y_n}{\partial x_{n,\,n-1}}=\frac{P_{n-1}}{P_n},\ \frac{\partial Y_n}{\partial x_{nn}}=1$$

この場合の未知數の個數は $Y_1, Y_2,\cdots, Y_n$ の n 個と，$x_{11}, x_{12},\cdots, x_{1n}$；$x_{21}, x_{22},\cdots, x_{2n}$；…；$x_{n1}, x_{n2},\cdots, x_{nn}$ の n^2 個，合計 $n(n+1)$ 個である。これに對する方程式は，生産函數（5）の n 個，極大條件式（7）の n^2 個，合計 $n(n+1)$ 個であり，すべての未知數は一義的に決定せられる。ここでは，（3）式は方程式として考えないのであって，この點はレオンチエフの場合より條件が緩かである[6]。

IV. 生　産　函　數

（5）式によって示される生産函數の具體的な形としてダグラス函數を用いることとしよう。すなわち，これを

$$Y_1=A_1x_{11}{}^{b_{11}}x_{12}{}^{b_{12}}\cdots x_{1n}{}^{b_{1n}}$$
$$(8)\quad Y_2=A_2x_{21}{}^{b_{21}}x_{22}{}^{b_{22}}\cdots x_{2n}{}^{b_{2n}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_n=A_nx_{n1}{}^{b_{n1}}x_{n2}{}^{b_{n2}}\cdots x_{nn}{}^{b_{nn}}$$

とおく。ここに $A_1, A_2,\cdots, A_n$ は常數であり，$b_{11}, b_{12},\cdots$；b_{1n}；$b_{21}, b_{22},\cdots b_{2n}$；…；$b_{n1}, b_{n2},\cdots, b_{nn}$ は，（8）式から

$$b_{11}=\frac{x_{11}}{Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial x_{11}},\ b_{12}=\frac{x_{12}}{Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial x_{12}},\cdots,$$
$$b_{1n}=\frac{x_{1n}}{Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial x_{1n}}$$
$$(9)\quad b_{21}=\frac{x_{21}}{Y_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{21}},\ b_{22}=\frac{x_{22}}{Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial x_{22}},\cdots,$$
$$b_{2n}=\frac{x_{2n}}{Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial x_{2n}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{n1}=\frac{x_{n1}}{Y_n}\frac{\partial Y_n}{\partial x_{n1}},\ b_{n2}=\frac{x_{n2}}{Y_n}\frac{\partial Y_n}{\partial x_{n2}},\cdots,$$
$$b_{nn}=\frac{x_{nn}}{Y_n}\frac{\partial Y_n}{\partial x_{nn}}$$

が求められる如く，それぞれ生産要素の増加率に對應する生産物の増加率の比をあらわす，部分彈力性として考えられ，一種の生産構造を示す指標である。これがレオンチエフ體系（2）の生産係數 a に對應することはいうまでもない。

（9）式とさきの均衡條件式（7）とを組合せて，つぎの體系がえられる[7]。

$$x_{11}=b_{11}Y_1,\ x_{12}=b_{12}\frac{P_1}{P_2}Y_1,$$
$$x_{13}=b_{13}\frac{P_1}{P_3}Y_1,\cdots,\ x_{1n}=b_{1n}\frac{P_1}{P_n}Y_1$$
$$(10)\quad x_{21}=b_{21}\frac{P_2}{P_1}Y_2,\ x_{22}=b_{22}Y_2,$$
$$x_{23}=b_{23}\frac{P_2}{P_3}Y_2,\cdots,\ x_{2n}=b_{2n}\frac{P_1}{P_n}Y_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n1}=b_{n1}\frac{P_n}{P_1}Y_n,\ x_{n2}=b_{n2}\frac{P_n}{P_2}Y_n,$$
$$x_{n3}=b_{n3}\frac{P_n}{P_3}Y_n,\cdots,\ x_{nn}=Y_n$$

6）（4）式の條件のもとに（6）式の π_i を極大ならしめるには

$$\pi_1-\lambda_1\Big[Y_1-\sum_{i=1}^{n}x_{i1}\Big]-\lambda_2\Big[Y_2-\sum_{i=1}^{n}x_{i2}\Big]-\cdots\cdots-\lambda n\Big[Yn-\sum_{i=1}^{n}x_{in}\Big]$$

について極大を求めればよい。この場合，新らしい未知數 $\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda n$ が導入されるが，さらに（4）式を方程式の體系に含ましめることによって，方程式と未知數とが一致する。しかし計量の問題として，かかる λ の値を決定することは極めて困難となるので，(4)式の條件から體系を解放すると同時に，λ も考慮しないことが必要となるであろう。

7）この極値が極大であるためには

$$\frac{\partial^2Y_1}{\partial x_{11}{}^2}=b_{11}(b_{11}-1)\frac{Y_1}{x_{11}{}^2}<0$$
$$\frac{\partial^2Y_1}{\partial x_{12}{}^2}=b_{12}(b_{12}-1)\frac{Y_1}{x_{12}{}^2}<0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial^2Yn}{\partial xnn^2}=b_{nn}(b_{nn}-1)\frac{Yn}{x_{nn}{}^2}<0$$

を充分條件とすることは，いうまでもない。

したがって，われわれの新らしい均衡體系は（8）式と（10）式とであり，ここでの未知數と方程式との關係は前節の場合と同樣である。すなわち，未知數は $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$；$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}$；$\cdots$；$x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nn}$ の $n(n+1)$ 個であるに對し，方程式の個數も，(8)，(10) 兩式の個數を加えて，ちようど同數であり，一義的な均衡値がえられる。パラメーターのうち，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ は與えられた資料から求められねばならず，また b の數値は（8）式から經驗的に求められることを要する。つぎに n 番目の部門はレオンチエフ體系の場合と同樣に消費部門をあらわすこととし，この部門について若干の説明を補足しておこう。

V. 消費部門

（8）式において　$Y_n = A_n x_{n1}^{b_{n1}} x_{n2}^{b_{n2}} \cdots x_{nn}^{b_{nn}}$ は消費部門の生產函數をあらわしている。ここでの生產は勞働の生產であり，Y_n は勞働生產量を示す。これを生產するためにはその他の產業部門から配分された生產要素（いわば生活資材）$x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots, x_{n,n-1}$ と自家勞働的要素 x_{nn} とを必要とする。それらの結合關係が上記の式であらわされている。$A_n, b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nn}$ はその勞働生產の構造を示すパラメーターであって，このかぎりにおいては，消費部門も他の部門と同樣に取扱いえられることはいうまでもない。

さらにまた，最後の消費部門を除き，（8）式の Y_i の各式は，その最後に $x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{n-1,n}$ を含むのであって，これは，勞働がその他の生產要素と結合して生產物を作ることを示している[8]。

つぎに，（6）式の最後の式，すなわち
$-P_1x_{n1} - P_2x_{n2} - P_3x_{n3} - \cdots - P_{n-1}x_{n,n-1} + P_n(Y_n - x_{nn}) = \pi_n$ は家計の收支を示すものである。家計の總收入は，自家勞働的要素を考慮外におけば，$P_n(Y_n - x_{nn})$ であり，その支出總額は $P_1x_{n1} + P_2x_{n2} + \cdots + P_{n-1}x_{n,n-1}$ であり，兩者の差 π_n がプラスであれば家計餘剰であり，マイナスの場合は家計不足額であるが，この場合，家計としては，かかる家計餘剰を極大にしようとする傾向があり，このこともまた，他の部門における場合と變りがない[9]。

VI. 統計資料のあてはめについて

以上によって，レオンチエフの體系にダグラス函數を導入し，さらに企業および家計餘剰を極大ならしめる條件を，この體系のなかで考察した。これの理論模型に實際の統計資料をあてはめることは，計量經濟學の立場からすれば，重要なことであり，本稿においては，比較的容易にこの目的を遂行しうるような理論模型の導出に努めた。

しかし，レオンチエフの統計表は，すべて金額によって與えられている。これを，三部門に結合した表によって示せばつぎの如くである[10]。

	企業 (1)	家計 (2)	その他(3)	計
企　業 (1)	P_1x_{11}	P_1x_{21}	P_1x_{31}	P_1Y_1
家　計 (2)	P_2x_{12}	P_2x_{22}	P_2x_{32}	P_2Y_2
その他 (3)	P_3x_{13}	P_3x_{23}	P_3x_{33}	P_3Y_3

この表から，すべての數量 x_{ik} を求めることは，Y_i および價格に何等かの假定をおかないかぎり，不可能である。この點に關するレオンチエフの方法は必ずしも納得のいくものではない[11]。もしも，この表からではなく，實際の他の資料から價格を求めえたとすれば，數量を求めることは容易である。

8) この點は，とくにレーゲンが強く主張している。(Nicholas Georgescu-Roegen; Leontief's System in the Light of Recent Results, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 32, 1950, pp. 214—222.)

9) 消費者の經濟行動は，普通には效用を極大にすることであるが，計量の問題としては，效用極大は，現在までのところ無意味であって，本稿で考察したように，たとえば，經驗的な量の一つたる家計餘剰の極大ということをねらうものでなければならない。家計餘剰の極大は，消費者行動の全部ではなく，そのうちの一つであることはいうまでもない。

10) この表において
$$P_1x_{11} + P_1x_{21} + P_1x_{31} = P_1Y_1$$
$$P_2x_{12} + P_2x_{22} + P_2x_{32} = P_2Y_2$$
$$P_3x_{13} + P_3x_{23} + P_3x_{33} = P_3Y_3$$
となることはいうまでもない。

11) レオンチエフは，家計の PX(X はレオンチエフの模型において自己消費分を差引いた數量である）をもって他の PX を割り，數量を求めることを定義しているが，その意味は明らかでない。(*The Structure*, pp. 72—73)

さて，数量 X_i および x_{ik} が求められたものとして，この資料から，ダグラス函數 (8) の諸常數を確定するには，ただ一ヵ年の統計資料によることは許されない。レオンチエフは，すでにアメリカの經濟について，1919, 1929, 1939 の三ヵ年について表を作成しているので，かりに 1919 年と 1929 年との間に技術の進歩がなかったか，あるいはそれが極めて僅少であったものとして，この兩年の統計資料によって，ダグラス函數中の b_{ik} の値を確定し，これをもって 1919 年の生産構造係數とすることは，計量の問題としてはやむをえないことであろう。（1939 年についても同様に計算する。そして 1929 年の b_{ik} は 1919 年と 1939 年の幾何平均をとるのも一方法であろう。）

ただ以上のように，生産函數が確定せられ，b_{ik} の値が求められたとしても，X_i, x_{ik} の均衡値が意味のある値となるとはかぎらない。

このような問題の解決にあたっては，さらに計量的な研究を必要とするであろう。[12)]

12) 以上の理論模型に，1919 年，1929 年，1939 年のアメリカ經濟の資料（レオンチエフ作成）をあてはめてみたのであるが，その結果については，なお吟味を要する點があるので，これの發表を他日に讓ることとした。

山田勇教授のレオンチエフ體系の修正について

家　本　秀　太　郎

編集部の懇望あり，ここに敢て鈍筆に鞭を打つ。山田説の趣旨は次の如くかと思う。即ち，微視論として創設された Walras 體系を骨格とする Leontief 體系もまた當然微視論たる性格をもつが，微視論たる Leontief 體系が本來の姿であるためには內に極大原理を包攝しなければならぬ。しかるに Leontief 體系では Walras 的な平均的固定生産係數に基く生産函數を假定しそこに極大原理はその存立の餘地がない。そこで技術的代替性を許す生産函數，しかも比較的計測容易な對數一次函數形をもつ Douglas 函數を以てすることによって極大原理を導入した修正 Leontief 體系を得る。結果としてうるものは，〔I〕生産函數（Douglas 函數）の定義 (8) と，〔II〕極大原理（Walras の限界生産力說第二命題）(7) と技術的部分彈力性の定義 (9) との結合たる (10)，即ち

$$b_{i1}=\frac{P_1x_{i1}}{P_iY_i},\ \cdots,\ b_{in}=\frac{P_nx_{in}}{P_iY_i}\cdot〔i=1, 2, \cdots, n〕$$

言い換えれば，一生産部門の總生産金額中に占める各生産用役投入金額の割合がそれぞれの生産用役の部分彈力性に相等しい關係式である。殊に (10) は一見して簡明な結果という意味において注目するに足るであろう。

さてこの提說を吟味してみよう。讀者とともに私の感じた一つはこの提說の結論に至るまで極めて自然な手ぎわのよい數學的運びを經ていること，しかも結果 (10) は殊に簡明であること。唯この形式上の興味深さに拘らず問題の提示の仕方について一つの問題が橫たわっているのではないか。即ち，產業部門間の相互關連を明かにすべき Leontief の產業構造理論を微視的見地において取扱うという山田教授の態度について，充分な論據が所說のいずこにも見出されないが，やはりそのことは根本的に問題としてとりあげらるべきものではなかったかと思う。Leontief 體系は，教授も指摘する如く，需給均衡式(1)，收支均衡式(2),