確率と効用測定の試み

ポール・エイ・サムエルスン

マサチューセッツ工業研究所
ケンブリッジ，マサチューセッツ

1. 1890年代までには，パレートとアーヴィング・フィッシァーとは，ベンタムやエッジワースのようなまえの時代の經濟理論家によって假定せられた効用の**基數的** (cardinal) 測定が，大小關係を取扱うに過ぎない純粋に**序數的な** (ordinal) 効用によって，省略しえられる，ということを知るに至った。近代的な理論家にとっては，基數的効用は，需要の行動を明確に說明するためにも，また規範的な厚生經濟學にとっても，ともに關係のないものである。

それにもかかわらず，基數的効用の一義的測定を定義するような假定を工夫するというお座敷の遊戯にふける若干の人々がいまもなお存在している。このことは多種多樣の異った曲藝によって行われうる。その一番ありふれた曲藝は，**加法的** (additive) 効用函數という恣意的な假定を含んでいる。これらの方法のうち最も古いものの一つが最近再び流行しだした。すなわち，それは，消費者の行動を觀察することによって，効用函數を確率狀態に合致せしめようとする試みを含むものである。かかる方法は特殊の經驗的な場合にかぎり有效であり，さらに，勝負事と保険とに關する消費者の**序數的な**行動の記述を統一するという便宜的な方法としては別問題であるが，それは，無效ではないが，しかし範圍を狹くとつたような場合でさえ，限定された理論的興味だけよりない。以下においては，討論と批判とに對する廣大な標的を提供するために，幾分獨斷的にかかる問題についてわたくしの見解を述べてみた。

2. ベルヌーイとマーシァルとは，（限界効用が一定の場合）効用が所得とともに一次的に增加するものとすれば，人々は 50 パーセントの確率を持った一ドルの利益によって償われるとき，これと同じ確率を持った一ドルの損失の危險をおかすであろう，と論じた。[1] 他方，限界効用遞減の法則が支配するときは，かかる損失に對してさらに多くの利益をうる確率によって償われることを必要とするであろう。勝負事への人々の反應作用はこのようにして，限界効用の質的行動のみならず，効用函數の正確な**量的**性質をも，同樣に明らかならしめることができる。[2]

ある人々にとっての勝負事に關する全體のうち

---

1) A. Marshall, *Principles of Economics*, 8th ed., pp. 135, 842-3.（大塚金之助譯「マーシァル經濟學原理」第一分册 1928 pp. 253-254, 376-378）さらに，貴重な討論と一層の參考のために，M. Friedman and L. T. Savage, "The Utility Analysis of Choices Involving Risk," *Journal of Political Economy*, Vol. 54 (1948), pp. 279-304 を見よ。J. v. Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton, 1944 and 1947) は理論に対して嚴密な公理的基礎を與えた。ダニエル・ベルヌーイもマーシァルもともに，とくに獨創的な貢獻に寄與したものと考えうるわけではないが，かれらの名前はかかる理論と結びつけられてきた。

2) 測定尺度と原點の諸常數を除けば，決定函數 $U=f(x)=\int_0^x f'(s)ds$ は無限の**異る**經驗的な仕方によって定義しえられる。例えば，任意の所得水準 x_0 の周りに，$1/2$ の確率の損失 h とこれを償う $1/2$ の確率の利益 g との間の經驗的關係を觀察しうる。かかる函數 $g=g(h; x_0)$ は $f'(x)$ の測定單位以外のすべてを決定する。もしくは，x_0 の周りの任意の二つの所得水準 x_1 および x_2 について，x_1 の觀測可能な唯一の確率 p が存在し，かかる p はその人をして確實な x_0 に對比して無差別ならしめるであろう。これを觀察された函數と呼び，$p(x_1, x_2; x_0)$ であらわす。これからまた $f'(x)$ を決定できる。第三の方法は，h が 0 に近迫するときの $2[g(h; x_0)-h]/h^2$ の極限の行動を研究することである。これは $\partial^2 g/\partial h^2$ を定義し，さらにこの値は $-2f''(x_0)/f''(x_0)$ に等しいことが證明できる。そしてこれから容易に限界効用函數の彈力性をうることができ，さらに（x_0 について積分することによって）その完全な形を求めることができる。無數の他の同樣な實驗が工夫しえられ，かつまた起りえないような特殊の場合を除けば，おのおのの方法は**異る**効用函數を生み出すものと期待しえられる。

のある事實はかかる理論と一致する——たとえば數學的に公平な條件でも決して賭をしないが，保險によって損失が補償されるとき支出する人の古典的な場合がこれである。しかしながら，すべての所得水準において公平な小さい賭さえも拒否ししかも富くじを買うような人の完全に起りうる場合は，かかる單純な理論を超えることによってのみ處理しえられる。しかもなお (1) 有效であり，(2) 新奇な，換言すればかかる特殊の理論がなくては說明しえられないことが明らかにせられた，かかる理論の暗示する，經驗的豫測を，わたくしは知らない。さらにわたくしは，勝負事の社會學が，かかる特殊の理論の許容するものよりも，はなはだしく豊富な內容のものであるという，個人的見解を記錄しうる。パスカルからと同樣にドストエフスキーからも勝負事について知りうるのである。

3.　しかしながら，わたくしの現在の目的は，数字的效用のベルヌーイ・マーシァル理論の事實的基礎を檢討することではなく，論理的水準においてその恣意性を示そうとするのである。さらにまた，歸納法の基礎的な哲學的問題を素通りするときのその最も重大な缺陷を批判しようとはしないであろう。すなわち，いかなる哲學者も，いまだかって純粋な演繹的數學的確率論（順列論的分析，集合論および測度論）と有限個の決意を行う經驗的問題との間に橋を設けることはしなかった。數學者は，的確にも，かかる問題を無視し，さらに，理想的に定義づけられた條件のもとに無限回の觀察を行ったとき最適となるような方法を定義することに自己を限定する。しかしながら，わたくしがわたくしの一人息子の生命を手術に賭けるか，法廷において證人の言を信ずるか，またはある馬に賭けるか，投資計畫に賭けるかということ——これらの諸問題について數學的確率論はほとんど智慧をかしてくれない。

かかる基礎的な問題はベルヌーイ・マーシァル理論にとって特有のものではない。それでわたくしもまたここではこれを素通りし，所得水準 $x_1, x_2, \cdots$ の確率 $p_1, p_2, \cdots$ が個人の單一の決意にとって意味があり，關係があるものということを認めよう。さらに特定化していえば，任意の二つの狀態

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A} & x_1^a, x_2^a, \cdots;\ p_1^a, p_2^a, \cdots \\ \mathrm{B} & x_1^b, x_2^b, \cdots;\ p_1^b, p_2^b, \cdots \end{array}$$

が與えられ，$\sum p=1$ とすれば，かかる個人はつねに，AがBより劣るか，BがAより劣るか，またはAとBとが無差別であるか，を決定することができるものと假定する。[3] 結局，これはつぎのことを意味する。すなわち

$$V(x_1, x_2, \cdots;\ p_1, p_2, \cdots)$$

あるいは　$W(V)=W(x_1, x_2, \cdots;\ p_1, p_2, \cdots)$

という形の不定個數の序數的選擇について數學的指標を定義し，AがBより劣ることを $V(\mathrm{A})<V(\mathrm{B})$，AとBとが無差別であることを $V(\mathrm{A})=V(\mathrm{B})$ とし，さらに $W(V)$ を任意の一方向の函數 (one-directional function) または序列を變換する函數とする。一定に保たれた V または W によって定義せられる無差別軌跡は，經驗的には，行動の實驗 (behavioristic experiment) と同一である。

說明を簡單にするために，函數の連續性と微分可能性とを假定する。危險に對して反作用を示すかかる序數的選擇模型からどんな性質を期待できるか。われわれの問題を比較的「合理的な」人々に限定しなければ，**先天的**制限を資料に設けることはほとんど不可能である。さらに，「合理的な」人々に限定することに同意するとするならば，「合理性」という言葉を理解するのにはどんな實體を選ぶかということに全く依存する完全に反復的語法の結果に終るという危險が存在する。このようにして，われわれはつぎのような愚鈍な言葉をもって終るかも知れない。合理的な人々はベルヌーイ・マーシァルの條件を滿足する，なんとなれば それは合理性の定義であるから，と。

事實，このような程度の空虛さにまでくだる必要はない。V 函數または W 函數のある合目的特性は假說として用いられうる。かかる假說さえも，わたくしには，勝負事や危險塡補についての立派な社會學と矛盾するように思われる。例えば

3) かつまた，これが，矛盾のない序數的選擇についてのすべての性質を持つことを假定する。たとえば，A が B に劣り，B が C に劣ることは，A が C に劣り，同樣な推移關係 (transitivity relations) を意味する。

$p_1=1-p_2=p$ という，ただ二つの所得の狀態の簡單な場合において，無差別等高面は，(x_1, x_2, p) 空間における曲面

$$W[V(x_1, x_2;\ p)]=\text{const.}$$

によって定義せられる。つねに，p を二つの所得の**大きな方**の確率とし，$1-p$ を他の方の確率と考えることができるようにするために，$x_1 \geqq x_2$ の領域にわれわれ自身を限定することには害はない。

そこで，選擇模型に關する明らかに合目的な要求はつぎの如くである。

基礎的假說　三つの變數 x_1, x_2 あるいは p の任意の一つの增加は一層高い選擇に到達する傾向がある。

このようにして，所得のうちの一つを增加し，他には何等の變化も來さないものとすれば，このことはたしかに，まえの狀態の持っていたすべての條件を備えた新たな狀態をその人にもたらすと同時に，**附加的な何等かの條件**をも提供するであろう。あるいは，小さい方の所得をぎせいにして，大きい方の所得の確率を增加するならば，このことはたしかにかれを一層裕福にするであろう。二つの所得が等しいような限定された場合にかぎり p の變化は完全に無差別であろう。

經驗的統計學者の仕事は，かかる一つのパラメーターを持った無差別面族の正確な形をギニー・ピッグについて記錄することである。基礎的な假說から離れては，かれはある特殊の法則をこれらの曲面から期待するような合法的權利を持たない。いうまでもなく，かれは，空間の一部分にある曲面の行動が，その空間の他の部分においてそれらの曲面のいかに行動**しなければならない**かを記述する，ことを期待する權利を持つていない。——それはあたかも貧者の茶の消費から，かれが富者となったときヨットの消費がどんなものでな**ければならない**かを補外する權利を持っていないと同樣である。

4.　ベルヌーイ・マーシァル理論が，無差別面族についての容易に認められないような特殊の恣意的な假定を含んでいることは，容易に證明しえられる。すなわち，すべての曲面は，**空間内にある任意の曲線上**のそれらの偏微分が演ずる行動から，**至るところ**大膽な補外法によつて決定しえられる。[4)]

わたくしの判斷では，このことはナンセンスである。わたくしのかって面接した人のなかで，わたくしがイシドゥロ（Ysidro）と呼んでいる，最も合理的な人でさえ，かれ自身の序數的選擇模型を決定し，かつそれが，有名な「理想的指標」の正確な方程式

$$W=W[(p_1\psi_1+p_2\psi_2)^{\frac{1}{2}}(p_1\psi_1^{-1}+p_2\psi_2^{-1})^{-\frac{1}{2}}]$$

を滿足することを見出している。ここに $p_1+p_2=1$ であり，かつ $W'(V)$ は任意の正函數である。[5)] フォン・ノイマン・モルゲンシュテルンの

---

4)　$V=\int_0^x f'(s)ds$ のつねに成立することを證明する無限の方法から三つを取扱ったまえの脚註は種々の例を提供してくれる。ベルヌーイ・マーシァルの直線論を幾何學的に記述する方法はつぎの如くである。一定の $(x_1^a, x_2^a;\ p^a)$ に對して　$W(x_1, x_2;\ p^a)=W(x_1^a, x_2^a;\ p^a)$ の關係式は空間内の水平的無差別曲線を定義する。そこにはつねに軸 $x_i=f(x_i)$ の相互の張力が存在し，それが**この**曲線を直線にするであろう。しかしながら，ベルヌーイ・マーシァル曲線の場合だけは，かかる張力は**すべての曲面をして任意の關係式** $px+(1-p)x_2=\text{const.}$ **を滿足**せしめるであろう。そしてこの場合にはすべての水平的無差別曲線が完全な直線となる。

經驗的資料が B-M 型となる必要かつ充分な條件は多くのこれと等値の方法で書きえられる。一つの計算的に意味のある方法は

$$G=\log(1-p)-\log p+\log(-\partial x_2/\partial x_1) \qquad v=\text{const.}$$

と定義することである。
そうすれば

$$\frac{\partial G}{\partial p}\equiv 0,\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2}\equiv 0,\quad G(x_1, x_2)\equiv -G(x_2, x_1)$$

はともに必要かつ充分な條件である。もちろん

$$G(x_1, x_2)=\log f'(x_2)-\log f'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2}[d\log f'(x)/dx]dx$$

である。

シカゴのヤコブ・マルシァック教授は，二つ以上の所得の狀態が存在するとき滿足せられねばならないある他の條件を作り出した。わたくしの友人のロバート・エル・ビショップ教授は B-M 理論から出てくる種々の矛盾のない條件を作り出した。またわたくしはプリンストンのウィリアム・ジェイ・ボゥモル教授から，かれが B-M 理論について未發表の批判を行っているという報告を受けた。

5)　イシドゥロの父母は B-M 型の W 函數を持っておるが，かれの受け繼いだ兩親の血はかかる函數のものでは**ない**。

公理[6]のことごとくは滿足されないといわれたとき，かれは，かれの選擇を滿足し，そしてそれらの公理自身を滿足せしめることを一層合理的であると考えると答えた。ひとたびフォン・ノイマン・モルゲンシュテルンの公理の經驗的意味が理解されれば，それらの公理の恣意性やベルヌーイ・マシァル理論の恣意性が明らかにせられる。

統計理論の歴史は，著者達が無邪氣に思われるような制約を假定したり，遠大な恣意的な結果をなしとげてきたような場合で滿ち溢れている。偉大なガウス自身も，かれがのちになって嘆くに至ったのであるが，つぎの二つの例を提供した。すなわち，かれは一度は，理想的な「平均」というものは，(1) 各觀察値を a だけ增したとき，a だけ增大し，さらに (2) 各觀察値を b 倍したとき，比例因數 b を乘じた大さを有する對稱的で連續的に微分可能な函數でなければならないと思った。このことは，一世紀にわたって多くの教科書に書き留められた高度に恣意的な結果たる理想的統計量 (ideal statistic) として，算術平均を考えるに至らしめるのである。同樣にして，かれは最尤統計量 (maximum likelihood statistic) の計算で誤りをおかし，結局において，算術平均が最尤統計量であるような函數として，「理想的誤差曲線」を定義することに終ってしまった。かれは $\sum x/n$ と $\sum(x-\sum x/n)/n$ とが獨立に分布するような函數と同樣に安價に，「完全な」誤差函數を定義することによって，同種の根據のない結果を求めたかも知れなかったであろう。ある教科書の著者達はまた，座標の軸廻轉 (axis-rotation of coordinates) のもとにおける任意に假定せられた不變量 (invariances) に基礎をおいた正規曲線のクラーク・マックスウェルの與えた同型の證明にしたがった。エディントンは最近かかる古い先天的推理の方法をさらに深く研究している。單に資料が人々の考えている通りに與えられるとすれば，遊星は完全な圓の形に運動し，所得はパレート曲線に沿って分布せられるかも知れない。

5.　效用極大のかかる尤もらしい理論が，どうしてこのような尤もらしくない——たとえ全くナンセンスだとはいわぬまでも——結果に導かれたか。わたくしが思うには，その答えは，ひとたび諸君がこれを注意深く檢討するならば，これが實際ははなはだ尤もらしい理論でない，という事實にあるのである。アーヴィング・フィッシァーや，フリッシュや，サムエルスンが基數的效用という兎をかれらの帽子の中へ入れることの可能であるような魔術に親しんでいる人々は，**算術平均**を使用することが**加法的**假定を含むということを容易に認識する。[7] どうして中位數ではいけないのであろうか。さもなければ，他の形の平均はどうであろうか。全部とはいわぬまでも，これらの多くはベルヌーイ・マーシァル理論を否定するかも知れない。

「效用の數學的希望値」またはその「算術平均」を承認することは，これが漸近線的な過程に適用されるような大數の法則の數學理論から輕卒に引延された結果である，とわたくしは考える。二人の賭博者の各自が無限量の貨幣または信用を持っ

6) J. v. Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd ed., 1947, pp. 17-31, およびその附錄。さらに詳細なことについてはわたくしの附錄を見よ。將來これらの公理について一層長文の展望を書くことを望んでいる。

7) Irving Fisher, "A Statistical Method for Measuring 'Marginal Utility' and Testing the Justice of a Progressive Income Tax" in *Economic Essays in Honor of John Bates Clark* (1927). R. Frisch, "New Methods of Measuring Marginal Utility," *Beiträge zur ökonomischen Theorie*, no. 3 (1932). これらは豫算的消費の資料の分野における「加法的」假定を含んでいる。なおまた，時間を伴う效用のなかにある加法的假定の他の型は——將來所得の期待された增加分によつて生ずる利子についてのボェーム・バヴェルクの第一の理由の線に沿って——便宜的に定義された基數的效用を一義的に測定することを許容する。P. A. Samuelson, "A Note on the Measurement of Utility," *Review of Economic Studies*, Vol. 4, (1937), pp. 155-61. ここでは，かかる方法の，全部ではないが，若干の經驗的意味が示されている。モルゲンシュテルンのえた結果には毛頭明らかになってはいない「獨立の假定」のあることを示すことができる。效用の基數性に興味のある讀者はビショップ，ヴィックリー，ランゲ，ベルナルデリー，ラーナー，アームストロング，ツォイテンおよびこの問題に關係のあるその他の人々の技術的勞作を見出すであろう。K. Menger, "Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre," *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Vol. 5 (1934), pp. 458-85, とくに 481 ff. を參照せよ。

ており，さらにかれらが無限回もしくははなはだ多くの回數にわたつて「できるだけ公平な條件で」賭けをするものと想像する。賭博者の一人が（かれらの效用では**なく**）かれの貨幣の賞金の算術平均を極大ならしめるように行動し，そしてもう一人がこれとは異った何等かのものを極大ならしめるものと想像する。そうすれば，勝負が長びくにつれて，その確率は**極限においては**最初の人の賞金がある一定の數を超過するような單位に**近迫する**。それがいかに長くても，有限の回數に對しては，基礎的な哲學の問題が殘る。そして無限の回數に對してさえも，その無限の富という假定によって，限界效用におけるある變化を假定してしまっているものと思われる。貨幣の問題の關するかぎり，算術平均の加法的假定は，富のストックを形成するに當って，**硬貨が硬貨に加えられる**という理由から，固有の理論的根據を持っている。しかしながら，ここにいわば**一つの效用銀行があって，その銀行に人々が繰返し預けたり引出したりする**と假定するならば，このことは尤もらしくないナンセンスであるのみならず，未決の問題を根據としたことに近くなる。

ベルヌーイ・マーシァルの方法をできるだけ限定して有效に利用する場合は，曲面のうちの不完全に觀察された部分を平滑にするときである。このことは，それらを空間のいまだ觀察されない部分の補外に利用することとは全然異る。不幸にして，現存の實驗的技術は，すべてを檢定する——すなわち，ベルヌーイ・マーシァル理論の持っている制約が無效であるか有效であるかの限度を檢定する——最も興味のある方法とするには餘りにも粗雜であるように思われる。*

---

* さらに，これらの特殊の關係が妥當するような無智でない階級の人々の存在することが明らかにせられても，興味のあるのは，かれらの**序數的行動**であることを忘れてはならない。そして特殊の效用指標 $V=pf(x_1)+(1-p)f(x_2)$ を眞の效用の測度と呼ぶことの便法には何等特別な意味はない。$W(V)=f^{-1}(V)$ は $W(x, x; p)=x$ という興味のある性質を有するが，これもまた序數的效用の番號附けとして何等特權的な地位を示すものではない。

附　　錄

1.　非常に多くの優秀な數學者や經濟學者が純粹な演繹の研究の分野でまれに誤りをおかすことがあるので，わたくしが，フォン・ノイマン・モルゲンシュテルンやフリードマン・サヴェジの理論の論理的基礎を說明するにあたって非常に當惑することがあるように思う。それで，この二つの體系を承認しえないものとみなし，さらに，わたくしの知るかぎりでは，それらの間に矛盾がないとさえいえないということを，少々不安を感じながら告白する。

フリードマンとサヴェジとは（前揭 pp. 287-8）かれらの全體の論理的立場をつぎの點においている。

[α]「いま要約したような行動を合理化するために提供された假說はつぎの如く簡潔に述べることができる。この假說を受入れるような種々の代替關係 (alternatives) のなかで，これらの關係が危險を含むか否かを選定するにあたって，消費者單位（一般的には家族であり，時としては個人である）があたかも，(a) その單位が矛盾のない選擇の組を有するか，(b) これらの選擇が，そのおのおのが確實であるような代替關係に——「效用」といわるべき——數字的な値を附與する一つの函數によって完全に記述しえられるか，(c) その單位の對象がその期待效用 (expected utility) をできうるかぎり大きくするか，の如く行動する。

[β] 同樣の假說をつぎの如く他の仕方で記述することを示したのはフォン・ノイマン・モルゲンシュテルンの貢獻である。すなわち，個人はつぎの性質を有するような選擇の體系にしたがって選定を行う。

1.　體系は完全であり，矛盾がない。すなわち，二つの對象のうちの何れを選ぶかということ，または何れにも無差別であること，さらに，

かれが B よりも C を好まず，A よりも B を好まないとすれば，A よりも C を好まないということを，明言することができる。（かかる關係において，「對象 object」という言葉は對象と一定の確率との結合の意味を含んでいる。たとえば，A と B とが對象であれば，A または B の 40-60 の確率もまた對象である。）

2. 他の對象と一定の確率との結合であるような任意の對象は，これらの他の對象のうちのいずれの一つよりも決して好ましくないし，それらのうちのいずれの一つもかかる結合よりは決して好ましくない。

3. 對象 A が對象 B よりも好ましく，B が對象 C よりも好ましいならば，個人にとって B と無差別であるような A と C との結合の確率が存在する。」（二つの脚註を省略する。）

わたくしにとっては，[α] は完全に恣意的であり承認しえないものであるが，[β] は全く容認しえられかつあまり害のないものであるように思われる。事實わたくしの連續性の假定と V 函數および $W(V)$ 函數についての基礎的假說（これらの二つを [γ] と呼ぼう）とは，わたくしの微分可能性という過度の嚴密さに關する若干の技術的な細目を除けば，[β] と等値であるようにわたくしには思われる。イシドゥロの函數は [β] を滿足するが [α] を滿足しないものと信ずる。

しかしながらフリードマンとサヴェジとはフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンとが [α] と [β] との完全な等値關係を示したものと信じている。フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンとの完全な公理（*Theory of Games*, pp. 26-7）は餘り長くてここに引用することはできないが，これを [δ] と呼ぶことにしよう。[δ] が論理的に [α] に等値であるという意味において，これもまたわたくしにとっては承認しえられないものでなければならない。それ故に，わたくしは，[β]≡[δ] と [δ]≡[α] とがともに眞であるということを疑わねばならない。

あまり世間では聞きなれないわたくしの考え方のすべてをどうして說明しえられるか。一番可能な說明をすれば，わたくしはただ困惑しているというに過ぎない。しかしながら，その反對の場合を假定すれば，フォン・ノイマン・モルゲンシュテルンの公理は，それらが [β] と等値であるという意味，および經濟的に承認しえられるという意味において [α] と等値ではないという暗示を記しておこう。「遊戲の理論」の著者達が――かれらの間違いであることが判明したとするならば――效用の可測性についてのかれらの證明の必然性に關して，自らをいかに欺いてきたか。わたくしの試驗的な推測はつぎの如くである。かれらは論理においては一つの過りをもおかしていないが，かれらの公理のなかに隱された承認しえられない前提を無意識のうちに附加している。かれらの公理の經驗的な內容は序數的效用 $W=W[V(x;p)]$ という術語に飜譯しえられ，したがってかれらの意見は反對しえられないものとなる。かかる純粹な序數という關係において，この公理を [δ] よりもむしろ [δ]′ と呼ぶことにしよう。* わたくしの信ずるところでは，[δ] と [δ]′ との間には無限の差異が存在する。

フォン・ノイマン・モルゲンシュテルンの完全な公理についての論理的眞實性や經濟的許容性が何であろうとも，これらの公理に到達する豫備的な文章的な討論は反擊を甘受しなければならないように思われる。たとえば，著者達はパレート，バッリィおよびランゲの卓越した例に從って，つぎのように論じている。われわれがつねに任意の**二つの厚生の變化と序數的に**關連を保つとすればわれわれは厚生もしくは效用の**基數的**測定を定義することができる，と。このようにして，「わたくしはロンドンよりもパリーを好み，シカゴよりもニュー・ヨークを好む」という型の敍述を越えることができないとすれば，**序數的な**效用の敍述

---

* かれらの公理 3：A から 3：C までの言葉で表現すれば，[δ]′ はつぎの如であろうと考える。

A： 普通の推移關係を滿足するような $V(x_1, x_2, \cdots; p_1, p_2, \cdots)$ と $W(V)$ とが存在する。

B： W 函數と V 函數とは適當な連續性の性質を有し，かつ $\partial V/\partial x_i>0$, $\dfrac{\partial V/\partial x_i}{\partial V/\partial x_j}-1$ は (x_i-x_j) の符號を有する。

C： V は對稱的であり，くじ札と確率とがいかなる仕方で混ぜ合わされていても，これは最初の所得狀態にのみ依存する。あとの論文で示そうと思うが，かかる定義においては [β]≡[γ]≡[δ]′≢[δ]≡[α] である。

だけが可能となる。しかしながら，つぎのような叙述，すなわち，「わたくしはシカゴよりもニュー・ヨークを好むと同じ程度にロンドンよりもパリーを好む」,を行うことができるとすれば，効用の数字的尺度が定義しえられる。

さて，かかる型の討論については若干の微妙な困難が存在し，さらに結果を求めるときある種の陰伏的な假定が設けられなければならない。* しかしながら，これらの微妙性を放棄し，しばらくの間つぎのような便宜を著者達に與えることとしよう。その便宜というのは，**ローマのわたくしにとっての基數的効用は，ローマへ行く一定の見込とロンドンまたはパリーへ行く (0.5,0.5 の) 確率とについて無差別であるとするならば，ロンドンおよびパリーの基數的効用の正確に半分である，**というのである。このことはわたくしの同僚ロバート・エル・ビショップ教授によって示されたが，かれは一般的な場合では効用の滿足な尺度を定義**しなかった**のである。ただ極めて特殊なベルヌーイ・マーシァルの場合にだけ一義的な内部無矛盾の尺度が定義されるであろう。「ビショップ効果」の眞實性が許容せられるならば，著者達はこの部分のかれらの討論について係爭中の問題の論據をえたものと思われる。

何故にかれらの方法が矛盾のある尺度を導入したかを知るために，かれらの定義した計量單位を用いて等間隔に位置したつぎの五つの狀態を考えたと想像しよう。

ミルク，酒，茶，**フルーツ・ジュース**，コーヒー

このことは，ある確かな一杯の茶が一杯のフルーツ・ジュースあるいは一杯の酒をうる (0.5,0.5 の) 確率と同様に魅力があり，他の項目についても同様のことが考えられることを意味する。さて，太字で記した中間の項目を除外すれば

ミルク，茶，コーヒー

という系列をうる。本論文において述べたような一般曲面については，したがって，茶がミルクとコーヒーとの「中間」にあることは必然的に眞であるであろう。

ビショップ教授の示したように，その答は「否，必然的ではない。」わたくしはかれがのちほどかれの討論を公表することを希望する。

* O. Lange, "The Determinateness of the Utility Function," *Review of Economic Studies*, Vol. I (1934), pp. 218-25, および R. G. D. Allen, Phelps Brown, Bernardelli, Lange, および Samuelson による以後五ヵ年間にわたる同誌にあらわれたのちの論文を見よ。F. Alt は Zeitschrift für Nationalökonomie (1936) に論文を發表し，同類の問題を公理的に取扱っている。