經濟量の統計的豫測理論

――國民所得の統計的豫測――

山田　勇

I 序　論

「すべての科學の窮極の目的は豫測にある。」これは計量經濟學の事實上の創始者ヘンリー・ムーア (H. L. Moore) の言葉であるが,[1] かれは,棉花の生產量と價格とを豫測するのに,標準誤差もしくは平均自乘偏差を計算することによって,豫測の正確度を測定している。

しかしながら,その理論の根底には,現在の統計理論からみて,多くの批判さるべき餘地を殘している。計量經濟學にかぎらず,統計理論一般の,アメリカおよび北歐における最近の發展は目覺ましいものがあり,[2] これらを無視することはとうてい許さるべきではない。

科學的豫測の問題は,もとより,容易になしとげられる業ではない。とりわけ,このことは經濟量の統計的豫測についていわれることである。

第二次大戰後のアメリカにおける國民總生產額および失業者に對する誤まった豫測は,はなはだしく計量經濟學者の權威を失墜せしめた。しかしながら,このことはクライン (L. R. Klein) もいっているように,計量經濟學的方法を放棄すべきことを意味するものでなく,問題は,それらの推計方法の改善にあることを忘れてはならない。事實クラインは,ヘイゲン (E. E. Hagen) およびカークパトリック (N. Kirkpatrick) のえた結果に對する修正として,新らしく推計を改算し,[3] さらに最近,統計的豫測の新らしい方法を驅使することによって,ふたたび,訂正版を出している。[4] そこで用いられている統計理論は,「誘導形法」(method of reduced forms)[5] と,ホッテリング (H. Hotelling) の統計的豫測の理論[6] とである。

そこで,本稿では,豫測の近代統計的基本理論を展開した,ホーヴェルモー (T. Haavelmo) の所論[7] に基きつつ,經濟量,とくに國民所得の統計的豫測の方式を誘導することをこころみた。かかる方式を用いて,實際の經濟量の統計的豫測を行うことは,紙數の關係上他の機會にゆずることとした。

---

1) H. L. Moore: Forecasting the Yield and the Price of Cotton, New York, 1917, p. 1.

2) 現在,われわれのおかれている情勢では,いまだに英國およびソ連における統計理論,とくに統計的豫測理論にふれる機會が與えられていない。

3) L. R. Klein: A Post-Mortem on Transition Predictions of National Product. (*Journal of Political Economy*, Vol. 54, No. 4–Aug. 1946, pp. 289—308.)

4) L. R. Klein: The Use of Econometric Models as a Guide to Economic Policy. *Econometrica*, Vol. 15, No. 2—April, 1947, pp. 111–151.

5) 「誘導形法」の骨子とするところは,最近の統計理論に基きつつ,統計式中にある常數を推定する方法である。すなわち,2 個以上の統計式中の常數決定にあたって,これらの式を,個々別々のものとしてではなく,連立式として取扱うものである。主な文獻としてつぎのものを揭げておこう。M.A. Girshick and T. Haavelmo: Satistical Analysis of the Demand for Food: Examples of Simultaneous Estimation of Structural Equations. *Econometrica*, Vol. 15, No. 2—April, 1947, pp. 79–110. W. W. Leontief: Econometrics. *A Survey of Contemporary Economics*, 1948, ed. by H.S. Ellis. pp. 393–403. 山田勇「經濟の計量」(叢書．經濟理論と統計 3) 1949, pp. 40–84.

6) Harold Hotelling: Problems of Prediction. *The American Journal of Sociology*, Vol. XLVIII, No. 1—July, 1942, pp. 61–76.

7) T. Haavelmo: Probability Approach in Econometrics. *Econometrica*, Vol. 12, Supplement, 1944, pp. 105–113.

Ⅱ　ムーアの古典方法

ムーアの豫測理論は，前節でも述べた如く，現今の統計理論からみれば，古典的方法であって，いわゆる記述統計學の觀點に止まるものとみることができる。[8] いまこれを一べつすることは，今後の理論の展開上一應の參考となるであろう。その骨子を述べれば，つぎの如くである。

記述統計學でよく知られている直線回歸方程式は，つぎの式によってあらわされる。

$$(1)\qquad Y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X$$

ただし，この式のなかの X および Y は，それぞれ統計値 x および y の平均からの偏差であって，いまそれらの平均を $\bar{x}$, $\bar{y}$ であらわせば，$X_i=x_i-\bar{x}$; $Y_i=y_i-\bar{y}$ $(i=1, 2, \cdots, N)$ である。さらに r は，x と y との相關係數であり，σ_x, σ_y はそれぞれ，x および y の標準偏差であることはいうまでもない。

ところで，ここに N 個の統計値

$$(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2), \cdots,\ (X_N, Y_N)$$

の (1) 式に關する偏差はそれぞれ

$$Y_1-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X_1,\quad Y_2-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X_2, \cdots,\quad Y_N-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X_N$$

であり，したがって，その分散 (variance) V はつぎの式によってあらわされる。

$$(2)\qquad V=\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X_i\right)^2$$

この式から，容易につぎの式が誘導せられる。

$$(3)\qquad \frac{V}{N}=\sigma_y^2(1-r^2)$$

上式から

$$(4)\qquad S=\sqrt{\frac{V}{N}}=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

がえられる。

さて，ムーアは，經濟豫測を行うのに，(4) 式を利用する。この式は，記述統計學の用語を用いれば，標準誤差にほかならない。

$r=+1$, -1 の場合には，$S=0$ となり，x を與えることによって，これに對應する y は，正確に豫測されうる。$-1<r<+1$ の場合にも，x に對應する y の値を豫測することができるが，この場合の豫測の正確さの程度は，(4) 式による S によって測定せられるものと，ムーアは考える。[9]

すなわち，いま，(1) 式によってあらわされる直線の周りの各點の分布が，正常分布によって示されるものとすれば，大標本に關する確率論の知識から，100 個の統計値のうち，99.7 個が $\pm 3S$ に等しい直線からの偏差のなかに落ち，95 個が $\pm 2S$ の間に，68 個が $\pm S$ の間に落ちることが知られる。ムーアは，かかる S を豫測の正確度 (degree of accuracy of forecasts) と呼んでいる。[10]

かれは，例として，1915 年の 9 月 11 日から 10 月 30 日までの北米西部における棉花の現物相場の變動から，ニューヨークの先物相場の最も確からしい變動を豫想した。すなわち前者を x とし，後者を y とすれば，これらの間につぎの豫測方程式を見出だした。

$$y=1.45x+0.002$$

さらに，この場合の r および σ_y の値としてつぎの結果をえた。

$$r=0.714, \qquad \sigma_y=0.085$$

これから (4) 式によって S を求めれば

$$S=0.085\times\sqrt{1-0.714^2}=0.0595$$

そこでつぎのことが推論せられる。

すべての豫測値の 99.7% は，その豫測の誤差が $-3S$ と $+3S$ との間にあり，95% は，$-2S$ と $+2S$ との間にあり，68% は，$-S$ と $+S$ との間にある。

以上がムーアの豫測理論であるが，まえにも注意した如く，記述統計學の立場にあるものであって，ストカスティックスに基礎をおく近代統計學からみれば，はなはだ不充分といわなければならない。次節以下に述べる近代理論と，ムーアの方法とを對比すれば，兩者の差異が確然とし，しか

8) ここでは記述統計學というのは，北川教授の用語によるものであって，Galton-Pearson 統計學を特徴的にいいあらわしたものである。（北川敏男「統計學の認識」—統計學の基礎と方法—1948, pp. 413–417.）

9) H. L. Moore: Forecasting the Yield and the Price of Cotton, p. 50.

10) H. L. Moore: ibid., p. 51.

も，その論理構造において，前者がはるかに後者をしのぐことを指摘しうるであろう。

Ⅲ 最近の統計的豫測理論 (1)

統計的豫測の問題を近代統計學の立場から取扱ったものにホーヴェルモーがある。[11] 以下かれの考え方の要旨を述べてみよう。

統計的豫測は，いまだ觀測されない標本點の位置づけに關する統計的敍述に過ぎない。

いま，N 個の觀測されうる變數（これを以下，觀測變數と呼ぼう）を $x_1, x_2 \cdots, x_N$ とし，M 個の豫測せらるべき變數（これを以下豫測變數と呼ぼう）[12]を $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M}$ とする，そこで，豫測の問題とは，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ の觀測變數のある種の函數を確立して，この函數により，豫測變數 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M}$ の値を豫測することにほかならない。

ところで，$N+M$ 個の變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M}$ の同時根元確率法則 (joint elementary probability law) が存在することを假定しよう。かかる同時分布を

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M})$$

もしくは p とあらわす。いま，われわれは p が既知であると考える。つぎに，

$$p_1(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

もしくは p_1 をもって，觀測變數 $x_1, x_2 \cdots, x_N$ に關する同時確率法則をあらわし，さらに

$$p_2(x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M} | x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

もしくは p_2 をもって，N 個の觀測變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ が與えられた場合の，M 個の豫測變數 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M}$ の條件附根元確率法則をあらわすものとする。そうすれば，つぎの式の成立することは明らかである。

$$p = p_1 \cdot p_2 \tag{5}$$

つぎに，E_1 をもって觀測變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ のある特別の値を，E_2 をもって豫測變數 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M}$ のある特別の値を，あらわすこととしよう。いかなる E_1 も觀測變數の N 次元標本空間 R_1 のなかの一點によって，同様に，いかなる E_2 も豫測變數の M 次元空間 R_2 のなかの一點によって，あらわしえられる。最後に，E をもって $N+M$ 個の變數の標本空間のなかの一點をあらわすものとする。

そこで，われわれの問題は，任意の特別な E_1 が與えられた場合，標本空間 R_2 の一定の點集合に落ちる E_2 の條件附確率を，p_2 から計算することである。かかる條件附確率は，一般に，E_1 の函數であろう。さらに，任意の與えられた E_1 および任意の與えられた確率水準，たとえば β に對して，R_2 のなかで點集合系を導き，しかも，これらの集合の任意の一つに落ちる E_2 の確率が β であるようにする。R_2 のなかのかかる點集合を豫測域 (region of prediction) と呼び，これを W_2 によってあらわす。

ここで注意を要する點は，われわれの興味が確率 β のすべての豫測域 W_2 にあるのではなく，ある意味における「最狭域」であるような，確率 β を有する領域にあるということ，あるいはさらに，標本點 E_2 がある一定の領域に落ちないことを豫測することにあるということ，である。これらのいずれの場合においても，あるいはその他のいかなる場合においても，確率水準 β の選擇，ならびに，豫測方程式として用いようと欲する，確率 β を有する領域 W_2 の位置の選擇は，それを利用する實際上の用途に依存しており，しかも，かかる選擇は統計的な問題からは離れたものである。條件附確率法則 p_2 がどんなものであろうとも，われわれの統計的豫測の目的は，觀測變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ のすべての値に對して，E_2 を豫測するのに必要な一つの，しかもただ一つの領域 W_2 を求めることにある。

それ故に，もしもわれわれが p_2 を知ることができれば，豫測の問題はただ單に確率計算の問題となり終って，標本からの統計的推理の問題ではなくなってしまう。しかしながら，多くの實際問題においては，p_2 は容易に知られない。そのた

---

11) T. Haavelmo: Probability Approach in Econometrics, pp. 105–113.

12) ホッテリングの用語では，この場合の觀測變數を predictor，豫測變數を predictand という。(H. Hotelling: Problems of Prediction. *The American Journal of Sociology*, Vol. XLVIII, No. 1—July, 1942, p. 62.)

めに，観測値の標本 E_1 から p_2 についての知識をえようとするのである。そこで，このことが可能であるためには，つぎのような根本的な假定を必要とする。すなわち，$N+M$ 個の變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M}$ は，p_1 の特徴づけが，p の，したがって p_2 の完全な特徴づけを意味するという性質を有することがこれである。

さて，p_1 について，これが根元確率法則のある特徴づけられた空間 Ω_1 に屬するということ，および，それ故に，p_2 があるこれに對應する空間 Ω_2 に屬するということだけを假定しよう。いま，Ω_1 のある任意の要素を p_1^* とし，さらに，$W_1(p_1^*)$ を，ある規則によって選ばれた，R_1 のなかの $(1-\alpha)$ の大さの臨界域 (critical region) とする。E_1 が $W_1(p_1^*)$ に落ちるとき，そしてこのときにかぎり，$p_1=p_1^*$ という假説が棄却される。Ω_1 のすべての要素 p_1^* に對して，R_1 のなかで，かかる臨界域系を構成する。もしも E_1 が若干の $W_1(p_1^*)$ の外に落ちるときは，假説 $p_1=p_1^*$ は棄却されない。E_1 は，まえに述べた如く，N 個の観測變數の任意の一標本點であるから，$\omega(E_1)$ を Ω_1 の部分集合とし，Ω_1 の $(1-\alpha)$ の大さの臨界域には E_1 が落ちないものとしよう。かくして，$p_1\in\omega(E_1)$ によって，未知の確率法則 p_1 を推定することは，合理的であろう。

さて，すでに假定した如く Ω_1 のすべての要素 p_1^*，もしくは Ω_2 のすべての要素 p_2^* に對して，さらに，観測變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の數値のすべての集合に對して，豫測公式を選擇することは，β の大さの一つにして，しかもただ一つの豫測域 W_2^* をうることにほかならない。それ故に，部分空間 $\omega(E_1)$ に，かかる豫測域のある種の部分空間が對應する。そこで，$K(E_1)$ をもって，かかる部分空間のすべての要素 W_2^* の論理的合計としよう。そうすれば

(6)　　E_2 が $K(E_1)$ に落ちる

と記述することによって，標本點 E_1 に基いて，E_2 を豫測することが，一應合理的であると思われるに至る。それでは，かかる (6) の記述が眞である確率は何であるかという疑問が提出されなければならない。これに對する解答はつぎの如くである。すなわち，(6) の確率を $P(E_2\in K)$ であらわせば

$$(7)\quad P(E_2\in K)=\alpha g\{K|p_1\in\omega(E_1)\} +(1-\alpha)\bar{g}\{K|p_1\in[\Omega_1-\omega(E_1)]\}$$

上式において，$g\{K|p_1\in\omega(E_1)\}$ は $p_1\in\omega(E_1)$ のときの E_2 の K に落ちる確率であり，$\bar{g}\{K|p_1\in[\Omega_1-\omega(E_1)]\}$ は p_1 が $\omega(E_1)$ の外側に落ちるときの E_2 の K に落ちる確率である。g と $\bar{g}$ とは一般に眞の分布 p_1 の函數である。$1\geqq g\geqq\beta$，$0\leqq\bar{g}\leqq1$ であることは明らかであるから

$$(8)\quad 1\geqq P(E_2\in K)\geqq\alpha\beta$$

ところで，實際問題としては，與えられた確率水準 β に對して，できるだけ小さい E_2 の豫測域を導くことが必要であることは，まえに述べた。これに對する實際的な方法は，ワルト (A. Wald) の加重函數 (weight function) の思想[13]を使って，つぎの如く述べられる。

E_2 によって，豫測變數 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M}$ の標本點 R_2 のなかの任意の一點をあらわし，$\overline{E_2}$ によって，E_2 の豫測のために用いられる R_2 のなかの一點をあらわすものとしよう。かかる $\overline{E_2}$ は豫測函數 (prediction function) と呼ばれる。E_2 が $\overline{E_2}$ と一致しないにもかかわらず，これを一致すると記述すれば，過誤をおかすのであるが，このような種々な過誤に，ウエイトを割當てることが考えられる。かかるウエイトを一つの加重函數 $Q(E_2, \overline{E_2})$ によって定義し，$E_2=\overline{E_2}$ のときは $Q=0$，$E_2\neq\overline{E_2}$ なるすべての點に對しては $Q\geqq0$ とする。かかる Q は $E_2\neq\overline{E_2}$ のときの危険と考えられる。このような危険の期望値を r によってあらわすならば

$$(9)\quad r=\int_R Q(E_2, \overline{E_2})p\,dE$$

であることはいうまでもない。この場合の積分は $N+M$ 個の變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+M}$ の全標本點 R についてとられる。實際の豫測に際しては，$\overline{E_2}$ は観測變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の函數として選擇され，かつ危険の期望値 r がで

13) A. Wald: Contributions to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypotheses. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 10, Dec. 1939. pp. 299–326.

きうるかぎり小となるように $\overline{E}_2(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ が選擇される必要がある。

觀測變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ のみによって決定せられる豫測函數 $\overline{E}_2(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ が存在するものと假定し，この特別の函數に對して，r が極小になる如くする。この極小値には，Ω_1 のなかの眞の分布 p_1 は獨立である。そうすれば，かかる函數をして，與えられた加重函數 Q に關する最良豫測函數たらしめることができる。この場合の豫測函數は，「與えられた加重函數に關して (Ω_1 內で) 一樣最良」(uniformly best (within Ω_1) relative to the given weight function) であると稱せられる。

しかしながら，かかる一樣最良豫測函數は，一般には，存在しないであろう。そこで，この豫測函數の選定のために，若干の原理を附加しなければならない。まず第一に，Ω_1 のすべての要素に對して r を一層小ならしめるような他の豫測函數は存在しないものとする。このような豫測函數を許容的豫測函數 (admissible prediction function) と呼ぶ。[14] すべての許容的豫測函數について，危險の期望値 r は，眞の分布 p の函數である。許容的豫測函數のなかで $\overline{E}_2$ を考え，これについて r の最大値が極小なる如くする。かかる豫測函數が存在するとすれば，これは許容的豫測函數のなかで最も危險の小さいものであるといいうる。

Ⅳ　最近の統計的豫測理論 (2)

前節によって，ホーヴェルモーの統計的豫測理論の論理構造を説明したのであるが，かれも注意している如く，加重函數 Q の決定は統計理論の問題ではなく，さらに，豫測公式も，一樣最良豫測函數の存在しない場合には，主觀的な因子を含むことをまぬがれない。[15] そこで，かれは進んで豫測公式の實用的な誘導法を提供する。

いま，つぎの假定が滿足されるものと考えよう。

1.　觀測變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の分布 p_1 は k 個の未知のパラメーター $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ を含んだ分布のパラメーター族に屬することが知られている。すなわち，

$$p_1 = p_1(x_1, x_2, \cdots, x_N\,;\, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$$

もしくは，簡單に

$$p_1 = p_1\{E_1\,;\,(\alpha)\}$$

である。

2.　すべての $N+M$ 個の變數の分布 p は，p_1 において，N の代りに $N+M$ とおきかえることによってえられる。ただし，N および M は任意の正整數であり，さらに N はある正整數 N_0 よりも大であることを要する。したがって，p_2 も，パラメーター α の値以外は既知である。

3.　觀測された標本 E_1 について $p_1\{E_1\,;\,(\alpha)\}$ からえられた α の最尤推定値は，不偏であり，したがって，N が增大するにつれて眞のパラメーターの値に確率的に近迫し，さらに N の適當な大さに對しても，また良好な推定値であるとする。

$$\bar{r} = \int_{R_2} Q(E_2, \overline{E}_2)\, p\{E_2;(\alpha)|E_1\}\, dE_2 \tag{10}$$

によって定義せられる條件附危險 $\bar{r}$ を考えよう。E_1 を一定とすれば，$\bar{r}$ は $\overline{E}_2$ の函數と考えられる。そこで，豫測函數

$$\overline{E}_2 = \overline{E}_2(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

を導くために，つぎの手續をとる。

A.　α の與えられた集合と觀測變數 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の與えられた標本とに對して，$\bar{r}$ を極小ならしめるような點 $\overline{E}_2$ を求める。$\bar{r}$ のかかる極小に對應する點 $\overline{E}_2$ は，一般に，α および $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の函數であろう。かかる函數を $\overline{\overline{E}}_2$ によってあらわせば

$$\overline{\overline{E}}_2 = \overline{\overline{E}}_2(x_1, x_2, \cdots, x_N\,;\, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$$

である。

B.　函數 $\overline{\overline{E}}_2$ のなかへ，α の代りに，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ および分布 p_1 からえられたその最尤推定値 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_k$ を代入する。そうすれば，その結果えられる豫測公式

$$\overline{\overline{E}}_2 = \overline{\overline{E}}_2(x_1, x_2, \cdots, x_N\,;\, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_k)$$

は，既知の要素のみを含み，その値は決定せられ

---

14) ワルトは，「許容的」という概念のほかに，「同等」(equivalent)，「一樣良好」(uniformly better) の概念を導入する。この點に關するかれの考え方の要旨は，つぎの文獻に紹介されている。北川敏男「統計學の認識」——統計學の基盤と方法—1948, pp. 342–352.

15) T. Haavelmo: Probability Approach in Econometrics, p. 110.

る。

以上のことを，ホーヴェルモーは，つぎの例によって說明している。いま，直線

(11) $x_t = kx_{t-1} + \varepsilon_t$ $(t=1, 2, \cdots)$

を考える。ここに x_0 は與えられた常數であり，k は未知の常數である。さらに，ε_t は，その平均が零でかつ σ^2 に等しい分散をもって，獨立，正常に分布しているものとする。そこで，われわれの問題は，觀測變數を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ として，變數 x_{N+1} と x_{N+2} との二つを豫測することである。つぎの加重函數を採用するものとする。

(12) $$Q = a(x_{N+1} - \bar{x}_{N+2})^2 + 2b(x_{N+2} - \bar{x}_{N+2}) \times (x_{N+1} - \bar{x}_{N+1}) + c(x_{N+1} - \bar{x}_{N+1})^2$$

上式において，$\bar{x}_{N+1}, \bar{x}_{N+2}$ は x_{N+1}, x_{N+2} の豫測値である。さらに，上式は，豫測に關する誤差のウェイトが，$\bar{x}_{N+1}$ と $\bar{x}_{N+2}$ とを中心とする楕圓に沿って一定であるようにとられる。したがって $ac > b^2$ とする。

$x_1, x_2, \cdots x_N$ が與えられた場合の，x_{N+1} と x_{N+2} との同時分布 p_2 は

(13) $$p_2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} Y\right\}$$

ただし

(14) $$Y = (x_{N+1} - kx_N)^2 + (x_{N+2} - kx_{N+1})^2$$

(10) 式に相當する條件附危險の期望値は

(15) $$\bar{r} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} Q \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} Y\right\} \times dx_{N+1} dx_{N+2}$$

であらわされる。$\bar{r}$ を $\bar{x}_{N+1}$ と $\bar{x}_{N+2}$ とに關して極小にすれば，つぎの二つの條件式がえられる。

(16) $$\left.\begin{aligned} a\bar{x}_{N+2} + b\bar{x}_{N+1} &= ak^2 x_N + bkx_N, \\ b\bar{x}_{N+2} + c\bar{x}_{N+1} &= bk^2 x_N + ckx_N \end{aligned}\right\}$$

これから

(17) $$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{N+1} &= kx_N, \\ \bar{x}_{N+2} &= k^2 x_N \end{aligned}\right\}$$

が導かれる。この式は，まえの a, b および c には無關係であることに注意する必要がある。k の最尤推定値 $\hat{k}$ は，いうまでもなく

(18) $$\hat{k} = \frac{\sum_{t=1}^{N} x_t x_{t-1}}{\sum_{t=1}^{N} x_{t-1}^2}$$

であるから，結局

(19) $$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{N+1} &= \hat{k} x_N, \\ \bar{x}_{N+2} &= \hat{k}^2 x_N \end{aligned}\right\}$$

となって，豫測變數 $\bar{x}_{N+1}$ および $\bar{x}_{N+2}$ が，既知數 $\hat{k}$ および x_N によって與えられるに至る。

V 經濟量の統計的豫測

以上の近代的統計豫測理論を經濟量の豫測に適用してみよう。ここに，經濟量の統計的豫測といっても，經濟量にだけ特有な理論を指すのではない。この意味においては，經濟量の豫測理論も，以上に考察した一般的統計豫測理論のなかに包攝されてしまう。ただ經濟量と稱するかぎり，それは，いうまでもなく，經濟法則によって特質づけられるものであり，統計的豫測の前提となるべき理論的經濟模型の構成に，特有の問題が存在するに過ぎない。

さて，經濟量として國民所得をとり，その統計的豫測を考えよう。この場合，投資がそれ自身經濟體系の外部から與えられる，いわゆる主動的投資 (autonomous investment) であるか，または，この經濟體系の内部において決定せらるべき誘導的投資 (induced investment) であるかによって，統計的解析を異にすることは，ホーヴェルモーによって明らかにせられたところである。[16)]

そこで，いま國民所得の豫測を行うにあたり，投資が主動的の場合と，誘導的の場合とに分けて，分析を行うこととしよう。なお，投資が一部分主動的で，一部分誘導的の場合についても，容易に分析しうるであろう。

さらに，本節におけるわれわれの意圖は，從來，理論的にのみ考察せられ，統計式としては取扱われなかったサミュエルソンの式を，以下に展開する如く，理論式に確率誤差項を附加することによって，これを統計式として解析することをもその目的とするものである。

(1) 投資が主動的の場合

いま，最も簡單な場合として，經濟模型がつぎ

16) Trygve Haavelmo: Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume. *The Journal of the American Statistical Association*, March, 1947, Vol. 42, pp. 105–122.

の式によってあらわされるものとしよう。[17]

$$Y_t=C_t+I_t,\quad C_t=\alpha Y_{t-1}+\beta+u_t \tag{20}$$

ここに，Y_t は t 期における國民所得，C_t, I_t はそれぞれ t 期における消費および投資，α および β は未知の常數である。そのうち，α は，いうまでもなく，限界消費性向である。さらに，u_t は確率變數であって，

$$E(u_t)=0,\quad E(u_t^2)=\sigma_u^2$$

をもって，獨立，正常に分布するものとする。

(20) 式の第一式は定義的恒等式であり，したがって，確率變數の項を缺く。第二式は，これに對して統計式であり，いわゆる消費函數 (comsumption function) である。全體系を通じて，I_t は主動的投資，すなわち，數學的には獨立變數とする。

さて，(20) 式の誘導形 (reduced form)[18] は

$$Y_t=\alpha Y_{t-1}+\beta+I_t+u_t \quad (t=1, 2, \cdots) \tag{21}$$

である。いま，この式において，Y は t まで観測されたものとし，$t+1$ と $t+2$ の Y を豫測する問題を取扱ってみよう。そうすれば，この場合の観測變數は $Y_0, Y_1, \cdots, Y_t$ であって，豫測變數は Y_{t+1} と Y_{t+2} とである。Y_{t+1} および Y_{t+2} の豫測値を $\overline{Y}_{t+1}$ および $\overline{Y}_{t+2}$ であらわそう。つぎに，加重函數は，ホーヴェルモーの場合と同じく

$$Q=a(Y_{t+2}-\overline{Y}_{t+2})^2+2b(Y_{t+2}-\overline{Y}_{t+2})\times(Y_{t+1}-\overline{Y}_{t+1})+c(Y_{t+1}-\overline{Y}_{t+1})^2 \tag{22}$$

とする。ただし $ac>b^2$ である。

$Y_0, Y_1, \cdots, Y_t$ が與えられた場合の Y_{t+1} および Y_{t+2} の同時分布 p_2 は

$$p_2=\frac{1}{2\pi\sigma_u^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_u^2}(u_{t+1}^2+u_{t+2}^2)\right\} \tag{23}$$

ただし，u_{t+1}，u_{t+2} は (21) 式から

$$u_{t+1}=Y_{t+1}-\alpha Y_t-\beta-I_{t+1},\quad u_{t+2}=Y_{t+2}-\alpha Y_{t+1}-\beta-I_{t+2} \tag{24}$$

17) この式はサミュエルソンの式に β および u_t を附加して，消費函數を統計式としたものである。(cf. P. A. Samuelson: Dynamic Process Analysis. *A Survey of Contemporary Economics*, 1948, ed. by H. S. Ellis. p. 364.)

18) 第 1 節註 7 參照。

つぎに，(10) 式もしくは (15) 式に對應する條件附危險の期望値は

$$\bar{r}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q}{2\pi\sigma_u^2}\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_u^2}(u_{t+1}^2+u_{t+2}^2)\right\}dY_{t+1}dY_{t+2} \tag{25}$$

$\bar{r}$ を $\overline{Y}_{t+1}$ および $\overline{Y}_{t+2}$ に關して極小にする。これがために，まず，(25) 式の積分を計算して，$\overline{Y}_{t+1}$ と $\overline{Y}_{t+2}$ を含むものだけを求めると

$$\begin{aligned}&-2\alpha(\alpha Y_t+\beta+I_{t+1})(a\overline{Y}_{t+2}^2+b\overline{Y}_{t+1})\\&-2(\alpha Y_t+\beta+I_{t+1})(b\overline{Y}_{t+2}+c\overline{Y}_{t+1})\\&+a\overline{Y}_{t+2}^2+2b\overline{Y}_{t+2}\overline{Y}_{t+1}+c\overline{Y}_{t+1}^2\end{aligned}$$

上式を，$\overline{Y}_{t+1}$ および $\overline{Y}_{t+2}$ に關して極小にすれば

$$a\overline{Y}_{t+2}+b\overline{Y}_{t+1}=(\alpha a+b)(\alpha Y_t+\beta+I_{t+1}),\quad b\overline{Y}_{t+2}+c\overline{Y}_{t+1}=(\alpha b+c)(\alpha Y_t+\beta+I_{t+1}) \tag{26}$$

これから

$$\overline{Y}_{t+1}=\alpha Y_t+\beta+I_{t+1},\quad \overline{Y}_{t+2}=\alpha(\alpha Y_t+\beta+I_{t+1}) \tag{27}$$

がえられる。(27) 式において，α および $\hat{\beta}$ は未知であるが，これらの一致推定値 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ はつぎの式であらわされる。[19]

$$\hat{\alpha}=\frac{m_{yy'}-m_{y'i}}{m_{y'y'}},\quad \hat{\beta}=\frac{m_y m_{y'y'}-m_{y'}m_{yy'}+m_{y'}m_{y'i}-m_i m_{y'y'}}{m_{y'y'}} \tag{28}$$

この式において，m_y，$m_{k'k'}m_i$ はそれぞれ Y_t, I_t の平均値，$m_{yy'}$，$m_{y'y'}$，$m_{y'i}$ はそれぞれ平均値の周りの Y_t，Y_{t-1}；Y_{t-1}；Y_{t-1}, I_t に關する第二次モーメントである。

(28) 式の値を (27) 式の α, β に代入すれば豫測値 $\overline{Y}_{t+1}$，$\overline{Y}_{t+2}$ が求められる。

(2) 投資が誘導的の場合

(20) 式においては I_t が主動的であったが，これからさきは，これが誘導的の場合を考えよう。まず，經濟模型をつぎの如く構成する。[20]

19) この場合の一致推定値については，つぎの文獻を見よ。T. Haavelmo: Methods, etc. p. 109. 山田勇「經濟の計量」p. 159.

20) この式はサミュエルソンの式を統計式化したものである。(cf. P. A. Samuelson: Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration. *The Review of Economic Statistics*, Vol. XXI, 1939, p. 76.)

$$\text{(29)}\quad \left.\begin{aligned} &Y_t=C_t+I_t,\\ &C_t=\alpha Y_{t-1}+\beta+u_t,\\ &I_t=\gamma(C_t-C_{t-1})+\delta+v_t \end{aligned}\right\}$$

この式の第一式および第二式において，I_t を誘導的投資とすれば，その他の變數およびパラメーターの意味は，まえと全然同一である。第三式において γ および δ は常數であるが，このうち γ はいわゆる關係（relation）もしくは加速度（acceleration）と稱せられる。v_t は u_t と同じく

$$E(v_t)=0,\qquad E(v_t^2)=\sigma_v^2$$

をもって，獨立，正常に分布し，かつ u_t と v_t とも獨立であるとする。すなわち

$$E(u_tv_t)=0$$

さらにまた，u_t の自己相關もないものとする。したがって

$$E(u_tu_{t-\theta})=0\qquad(\theta\neq0)$$

(29) 式の誘導形は

$$\text{(30)}\quad \begin{aligned} Y_t=&\alpha(1+\gamma)Y_{t+1}-\alpha\gamma Y_{t-2}+(\beta+\delta)\\ &+[(1+\gamma)u_t-\gamma u_{t-1}+v_t] \end{aligned}$$

さて，Y の値は t まで觀測されたものとし，$t+1$ と $t+2$ の Y を豫測することとしよう。この場合の加重函數も，まえと同じく (22) 式を採用する。ここで

$$\text{(31)}\quad U_t\equiv(1+\gamma)u_t-\gamma u_{t-1}+v_t$$

とし，さらに

$$\text{(32)}\quad \alpha(1+\gamma)\equiv\mu,\ \alpha\gamma\equiv-\nu,\ \beta+\delta\equiv\kappa$$

で，しかも $\mu\neq\nu$ とすれば，(30) 式は

$$\text{(33)}\quad Y_t=\mu Y_{t-1}+\nu Y_{t-2}+\kappa+U_t\quad(t=1,2,\cdots)$$

となる。

いま，u_t と u_{t-1} とが同一の分散を有するものとして，これを σ_u^2 であらわし，さらに，v_t の分散を σ_u^2 であらわせば，U_t は

$$E(U_t)=0,$$
$$E(U_t^2)=(1+2\gamma+2\gamma^2)\sigma_u^2+\sigma_v^2$$

をもって，獨立，正常に分布することが知られる。[21]

そこで，$Y_0, Y_1, \cdots, Y_t$ が與えられた場合の Y_{t+1} および Y_{t+2} の同時分布 p_2 は，(23) 式に對應して

$$\text{(34)}\quad p_2=\frac{1}{2\pi\sigma_U^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_U^2}(U_{t+1}^2+U_{t+2}^2)\right\}$$

(25) 式に對應する條件附危險の期望値は

$$\text{(35)}\quad \bar{r}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q}{2\pi\sigma_U^2}\times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_U^2}(U_{t+1}^2+U_{t+2}^2)\right\}dY_{t+1}dY_{t+2}$$

上式の $\bar{r}$ を，$\bar{Y}_{t+1}$ および $\bar{Y}_{t+2}$ に關して極小にすれば，(27) 式に對應して

$$\text{(36)}\quad \left.\begin{aligned} &\bar{Y}_{t+1}=\mu Y_t+\nu Y_{t-1}+\kappa,\\ &\bar{Y}_{+t2}=\mu(\mu Y_t+\nu Y_{t-1}+\kappa) \end{aligned}\right\}$$

この式のなかの μ，ν，κ の一致推定値を求めれば

$$\text{(37)}\quad \left.\begin{aligned} &\hat{\mu}=\frac{m_{yy'}m_{y''y''}-m_{yy''}m_{y'y''}}{m_{y'y'}m_{y''y''}-(m_{y'y''})^2},\\ &\hat{\nu}=\frac{m_{y'y'}m_{yy''}-m_{yy'}m_{y'y''}}{m_{y'y'}m_{y''y''}-(m_{y'y''})^2},\\ &\hat{\kappa}=m_y-\frac{m_{y'}(m_{yy'}m_{y''y''}-m_{yy''}m_{y'y''})}{m_{y'y'}m_{y''y''}}\\ &\qquad\frac{+m_y(m_{y'y'}m_{yy''}-m_{yy'}m_{y'y''})}{-(m_{y'y''})^2} \end{aligned}\right\}$$

となり，この値から (36) 式によって，$\bar{Y}_{t+1}$ および $\bar{Y}_{t+2}$ がえられる。ただし，(37) 式において $m_{y'}$，m_y，$m_{y''}$ はそれぞれ Y_t，Y_{t-1}，Y_{t-2} の平均値であり，$m_{yy'}, m_{yy''}, m_{y''y}, m_{y'y''}, m_{y''y''}$ はそれぞれ平均値の周りの Y_t，Y_{t-1}；Y_t，Y_{t-2}；Y_{t-1}；Y_{t-1}，Y_{t-2}；Y_{t-2} に關する第二次モーメントである。[22]

21) 末綱恕一「確率論」1941, pp. 103–107.

22) (27) 式あるいは (36) 式の豫測方程式の $\bar{Y}_{t+1}$，$\bar{Y}_{t+2}$ に關する豫測の分散は，ホッテリングの公式から導くことができる。いま，豫測方程式を，一般に

$$Y=b_1Y_1+b_2Y_2+\cdots+b_pY_p$$

とし，觀測回數を N とすれば，Y の豫測の分數 S_F^2 は，次式によってあらわされる。

$$S_F^2=\frac{N}{N-1}S^2+\sum_i\sum_j Y_iY_jS_{ij}$$

この式において，S^2 は Y の豫測値に關する標本分散，S_{ij} は b_i と b_j との標本共變量である。(cf. H. Hotelling: Problems of Prediction. *The American Journal of Sociology*, Vol. XLVIII, No. 1—July, 1942, pp. 62–68.)